

区分線形型FitzHugh-Nagumo方程式の逆超離散化

大川, 豪
立教大学大学院理学研究科

笥, 三郎
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/23476>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (30), pp.196-201, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 30 (pp. 196 - 201)

区分線形型 FitzHugh-Nagumo 方程式 の逆超離散化

大川 豪 (OKAWA Takeshi), 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

(Received 29 January 2012; accepted 7 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

区分線形型 FitzHugh-Nagumo 方程式の逆超離散化

立教大学大学院理学研究科 大川 豪 (OKAWA, Takeshi)
立教大学理学部 筧 三郎 (KAKEI, Saburo)

概要 神経細胞のモデルである FitzHugh-Nagumo 方程式には、非線形項の選び方を変えたいいくつかのバリエーションがある。その1つである区分線形型非線形項の場合 (McKean model) に対し、方程式の持つ定性的な性質を保つような逆超離散化を提案する。

1 はじめに

ソリトン・セルオートマトンの研究で発見された超離散化という手法 [HT, Ma] は、代数的に見ると、和・積・商の演算を、それぞれ“max”, “+”, “-” で置き換えることに対応している。この対応付けは、適当に変数を置き換えた上で「超離散極限」をとることと理解することもできる。例えば、2次式 $a_2x^2 + a_1x + a_0$ に対しては、 $a_i = e^{A_i/\varepsilon}$ ($i = 0, 1, 2$), $x = e^{X/\varepsilon}$ とした上で $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限 (超離散極限) をとると、

$$\varepsilon \log (a_2x^2 + a_1x + a_0) = \varepsilon \log \left(e^{(A_2+2X)/\varepsilon} + e^{(A_1+X)/\varepsilon} + e^{A_0/\varepsilon} \right) \\ \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \max \{A + 2X, B + X, C\} \quad (1.1)$$

となる。このことにより、正係数の有理式は“max”, “+”, “-” からなる数式に対応付けられる。また、この対応を逆に使えば、“max”, “+”, “-” からなる数式を、有理式と対応付けることができる。この手続きは「逆超離散化」と呼ばれるが、逆超離散化のとり方は一意ではなく、大きな自由度を伴う。

可積分系の場合には、離散系の持っていた様々な性質 (厳密解, 保存量, etc.) が、超離散化を行った後の方程式にも引き継がれる。これに対し非可積分系においては、超離散化の前後で系の性質が保たれることは、必ずしも期待できない。本稿では、非可積分系の超離散化に向けての一つの試みとして、FitzHugh-Nagumo 型の微分方程式を扱うことを目的とする。ここで FitzHugh-Nagumo 方程式とは、神経繊維上での電気信号の伝播を記述する、次の反応拡散型偏微分方程式である [F, NAY, KS]:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v) - w, \\ \kappa \frac{\partial w}{\partial t} = v - \gamma w. \end{cases} \quad (1.2)$$

ただし d, γ, κ は正定数であり、非線形項 $f(v)$ は、

$$f(v) = v(1-v)(v-a), \quad 0 < a < \frac{1}{2} \quad (1.3)$$

で与えられる。

方程式 (1.2) は、実験的に観察される以下のような神経パルスの性質をよく再現することが知られている [KS]:

閾値の存在: ある一定以上の強さ (閾値) を越える刺激与えないとパルスは生じないが、その値以上ならば刺激の強さに無関係にパルスが整形される。

伝播速度: 神経パルスの伝播速度はほぼ一定。

対消滅: 両端で発生したパルスは中央に向かって同じ速度で進み, 衝突した後はともに消滅する。

不応期の存在: 同じ場所で刺激を加え続けるとき, 刺激間の時間間隔が短いと二つ目の刺激のパルスは抑制されて消えてしまう。

McKean [Mc] は, 3 次の非線形項を区分線形関数

$$f(v) = \begin{cases} -v & (v < a) \\ 1-v & (v > a) \end{cases} \quad (1.4)$$

もしくは

$$f(v) = \begin{cases} -v & (v < a/2) \\ v-a & (a/2 < v < (a+1)/2) \\ 1-v & ((a+1)/2 < v) \end{cases} \quad (1.5)$$

で置き換えることを提案した。区分線形型の非線形項を用いても, 神経パルスのモデルとして持つべき定性的な性質を持つことが知られている [KS]。

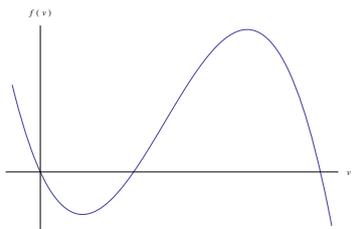


図 1: (1.3) のグラフ

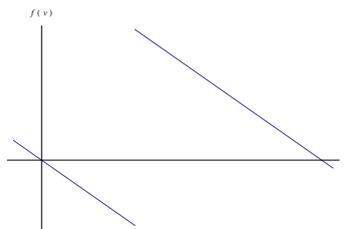


図 2: (1.4) のグラフ

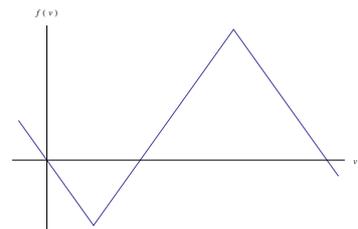


図 3: (1.5) のグラフ

上にあげたような性質を保つように, 方程式 (1.2) の離散化, 超離散化を行いたいのであるが, その目的にむけての出発点として, 本稿では拡散項を無視した (すなわち, (1.2) で $d = 0$ とした)

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f(v) - w, \\ \kappa \frac{dw}{dt} = v - \gamma w. \end{cases} \quad (1.6)$$

という形の連立常微分方程式系を考える。この常微分方程式も FitzHugh-Nagumo 方程式と呼ばれ, 単一の神経細胞の活動電位を記述するモデルである。非線形項 $f(v)$ を (1.3), (1.4), (1.5) のいずれの形にとっても, 「閾値の存在」等の定性的性質を再現する [KM]。

常微分方程式系 (1.6) に対して, 前進差分による差分化を行ってみる。

$$\begin{cases} \frac{\bar{v} - v}{\delta} = f(v) - w, \\ \kappa \frac{\bar{w} - w}{\delta} = v - \gamma w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{v} = v + \delta \{f(v) - w\}, \\ \bar{w} = w + \frac{\delta}{\kappa} (v - \gamma w) \end{cases} \quad (1.7)$$

ただし, $\bar{v} = v(t + \delta)$, $\bar{w} = w(t + \delta)$ である。差分方程式 (1.7) は係数が負である項を含むので, そのままでは超離散化は行えない。そこで, 節をあらためて, 村田 [Mu1, Mu2] による方法の適用を試みる。

2 超離散化可能な差分化

Alexander らは、正值性を持つ微分方程式系に対し、正值性を保つような数値計算スキームの構成法を与えている [AM, ASM]。村田 [Mu1, Mu2] は、可積分とは限らない微分方程式系に対して [AM, ASM] の手法を適用することで、超離散化可能な形の差分化を行うことを提案している。

差分方程式 (1.7) に [Mu1, Mu2] の考え方を適用してみよう。基本となるのは、公式

$$1 - a\delta = (1 + a\delta)^{-1} + O(\delta^2) \quad (2.1)$$

である。差分方程式 (1.7) において非線形項 $f(v)$ として、(1.3) に少しパラメータを加えた

$$f(v) = -v^3 + av^2 - cv + b \quad (2.2)$$

という形を選ぶことにして、公式 (2.1) を適用してみよう。

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v + \delta \{-v^3 + av^2 - cv + b - w\} = v + \delta(av^2 + b) - \delta(v^3 + cv + w) \\ &= \{v + \delta(av^2 + b)\} \left(1 + \delta \frac{v^3 + cv + w}{v}\right)^{-1} + O(\delta^2) \\ &= \frac{v^2 + \delta v(av^2 + b)}{v + \delta(v^3 + cv + w)} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

もう一方の方程式については、

$$\begin{aligned} \bar{w} &= w + \frac{\delta}{\kappa}(v - \gamma w) \\ &= \left(w + \frac{\delta}{\kappa}v\right) \left(1 + \frac{\gamma\delta}{\kappa}\right)^{-1} + O(\delta^2) \\ &= \frac{w + \frac{\delta}{\kappa}v}{1 + \frac{\gamma\delta}{\kappa}} + O(\delta^2) \end{aligned} \quad (2.4)$$

となる。得られた (2.3), (2.4) において $O(\delta^2)$ の項を無視すれば正係数有理写像が得られ、超離散化可能となる。実際、

$$v = e^{V/\varepsilon}, \quad w = e^{W/\varepsilon}, \quad a = e^{A/\varepsilon}, \quad b = e^{B/\varepsilon}, \quad c = e^{C/\varepsilon}, \quad \kappa = e^{K/\varepsilon}, \quad \gamma = e^{\Gamma/\varepsilon}, \quad \delta = e^{D/\varepsilon}, \quad (2.5)$$

とおくと、

$$\begin{cases} \bar{V} - V = \varepsilon \log \left[\frac{e^{V/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{(2V+A)/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}\}}{e^{V/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{3V/\varepsilon} + e^{(V+C)/\varepsilon} + e^{W/\varepsilon}\}} \right], \\ \bar{W} - W = \varepsilon \log \left[\frac{1 + e^{(V-W+D-K)/\varepsilon}}{1 + e^{(\Gamma+D-K)/\varepsilon}} \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

という形に書き換えられ、超離散極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ をとることによって max-plus 方程式系が得られる。

$$\begin{cases} \bar{V} - V = \max \{V, 2V + A + D, B + D\} - \max \{V, 3V + D, V + C + D, W + D\} \\ \bar{W} - W = \max \{0, V - W + D - K\} - \max \{0, \Gamma + D - K\} \end{cases} \quad (2.7)$$

しかし、こうして得られた max-plus 方程式系によって、元の微分方程式系 (1.6) の解の定性的振る舞いを忠実に再現することには、これまでのところは成功していない。1つの原因として、元の微分方程式 (1.6) の解軌道が必ずしも正值でないことが考えられるが、(1.6) の変数をシフトして同様の考察を試みても、現時点ではうまくいっていない。

3 McKean model の逆超離散化

前節で導出した (2.6) の第 1 式の右辺において, $W \rightarrow -\infty$ ($w = e^{W/\varepsilon} \rightarrow 0$ に対応) とした式を考える:

$$F_\varepsilon(V) := \varepsilon \log \left[\frac{e^{V/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{(2V+A)/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}\}}{e^{V/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{3V/\varepsilon} + e^{(V+C)/\varepsilon}\}} \right]. \quad (3.1)$$

この式の具体的な振舞いを観察してみよう。 $A = 6, B = 9, C = \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} - 1)$ ($F_\varepsilon(0) = 0$ とするため¹), $D = 0$ として, $\varepsilon = 1, \varepsilon = 0.1$ に対するグラフを描いたのが, それぞれ図 4, 図 5 である。

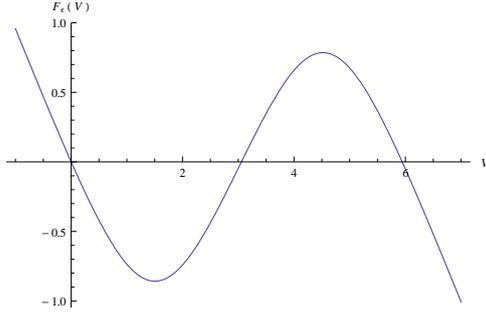


図 4: $\varepsilon = 1$ での $F_\varepsilon(V)$ のグラフ

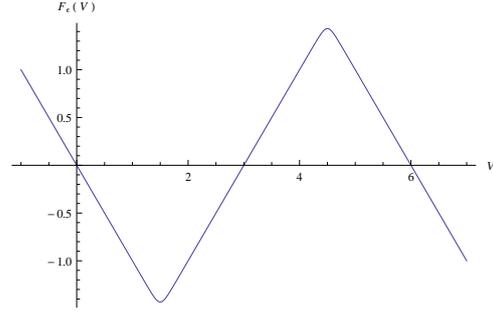


図 5: $\varepsilon = 0.1$ での $F_\varepsilon(V)$ のグラフ

図 5 と図 3 と比較すると, $F_\varepsilon(v)$ において超離散極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ をとったものは, McKean model での非線形項 (1.5) と同じ形であることが分かる。このことを逆に用いて, (1.7) の $f(v)$ を, (3.1) の $F_\varepsilon(v)$ で置き換えた差分方程式を考える:

$$\begin{cases} \frac{\bar{v} - v}{\delta} = \varepsilon \log \left[\frac{e^{v/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{(2v+A)/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}\}}{e^{v/\varepsilon} + e^{D/\varepsilon} \{e^{3v/\varepsilon} + e^{(v+C)/\varepsilon}\}} \right] - w, \\ \kappa \frac{\bar{w} - w}{\delta} = v - \gamma w. \end{cases} \quad (3.2)$$

ここでは, $\gamma, \delta, \varepsilon, \kappa, A, B, D$ は全て独立なパラメータとみなしている ($C = \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} - 1)$)。また, 従属変数を $V := e^{v/\varepsilon}, W := e^{w/\varepsilon}$ と置き, パラメータを $e^{A/\varepsilon} \rightarrow A$ 等と書き換えると, 次の形の差分方程式が得られる:

$$\begin{cases} \bar{V} = V \left\{ \frac{1}{W} \cdot \frac{V + D(AV^2 + B)}{V + D(V^3 + CV)} \right\}^\delta, \\ \bar{W} = W \left(\frac{V}{W^\gamma} \right)^{\delta/\kappa}. \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.2) は超離散極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ の下で McKean model に移行するので, ある種の「逆超離散化」とみなされる。

¹この条件は, $e^{A/\varepsilon} = 1 + e^{P/\varepsilon} + e^{Q/\varepsilon}, e^{B/\varepsilon} = e^{(P+Q)/\varepsilon}, e^{C/\varepsilon} = e^{P/\varepsilon} + e^{Q/\varepsilon} + e^{(P+Q)/\varepsilon}$ とおけば, 自動的に満たされる。このパラメータを用いると, (3.1) の $F_\varepsilon(V)$ は

$$F_\varepsilon(V) = \varepsilon \log \left[\frac{e^{(V-D)/\varepsilon} + e^{2V/\varepsilon} \{1 + e^{P/\varepsilon} + e^{Q/\varepsilon}\} + e^{(P+Q)/\varepsilon}}{e^{(V-D)/\varepsilon} + e^{3V/\varepsilon} + e^{V/\varepsilon} \{e^{P/\varepsilon} + e^{Q/\varepsilon} + e^{(P+Q)/\varepsilon}\}} \right]$$

という形に書き換えられることを注意しておく。

一例として, 上と同様に $A=6, B=9, D=0$ としてシミュレーションを行った結果が, 次ページの図6~図9である (他のパラメータは, $\gamma=1, \delta=0.5, \kappa=50$ と選んだ)。 v, w の初期値 $(v(0), w(0))$ は, 図6, 図8においては $(v(0), w(0)) = (2.9, 0)$ であり, 刺激に対して反応せずに原点に向かっていく。これに対し, $(v(0), w(0)) = (3.2, 0)$ とした図7, 図9においては刺激に反応していることが分かる。 $\varepsilon=1$ の場合 (図6, 図7) と $\varepsilon=0.1$ の場合 (図8, 図9) とを比較すると, ある閾値の前後で解軌道の振舞いに変化するという性質はまったく同じであることが見て取れる。すなわち, (3.2) は, 区分線形関数による非線形項を持つ McKean model の, 1つの逆超離散化を与えていると言える。

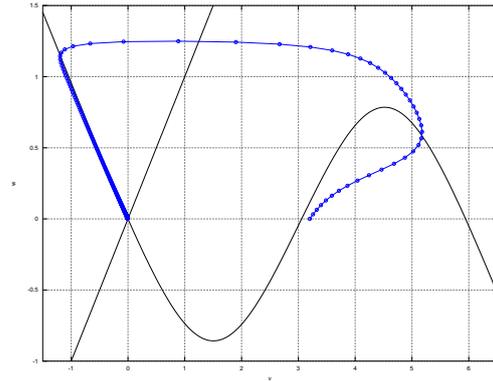
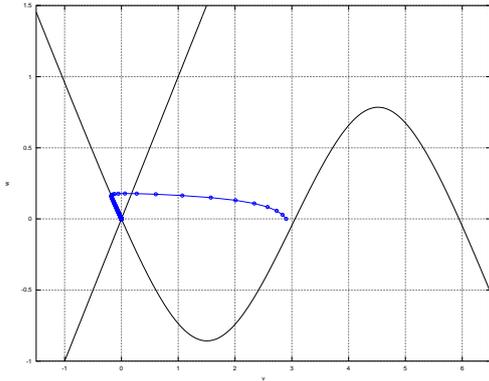


図6: $\varepsilon=1$ でのシミュレーション (閾値未満)

図7: $\varepsilon=1$ でのシミュレーション (閾値以上)

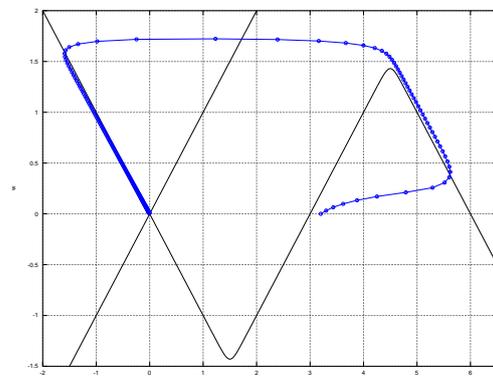
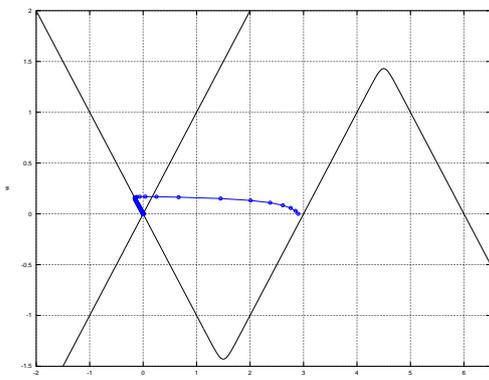


図8: $\varepsilon=0.1$ でのシミュレーション (閾値未満)

図9: $\varepsilon=0.1$ でのシミュレーション (閾値以上)

4 おわりに

本稿では, 非可積分系の超離散化に向けての研究の1つとして, FitzHugh-Nagumo 方程式に対する我々の試みを紹介した。

2節では, 3次式型の非線形項を持つ FitzHugh-Nagumo 方程式に対して村田の手法 [Mu1, Mu2] を適用することで, 正係数有理写像を導いた。しかし, 得られる超離散方程式が解の定性的振舞いを保つかどうかは, まだ解明できていない。

3節で提案した方程式では，2節で導いた正係数有理式を，FitzHugh-Nagumo 方程式の非線形項の部分にのみ適用している。この場合，逆超離散化の前後で共通の定性的振舞いを持つことを，数値実験により確かめた。しかし，離散方程式 (3.2) の連続極限をとることによってどのような方程式が得られるかは，まだよく分かっていない。

非可積分系に対して，元の微分方程式系の解の振る舞いが超離散化の前後で保たれるような正係数有理写像を導く手法を見出すことは大変興味深いテーマであるが，そのためには，今回のような実験を積み重ねていくことが必要であろう。

謝辞

査読者の方には大変有益なコメントをいただき，また，文献 [AM] をご教示いただいた。ここに謝意を表したい。

参考文献

- [AM] M.E. Alexander and S.M. Moghadas, $O(1)$ shift in Hopf bifurcations for a class of non-standard numerical schemes, *Electronic Journal of Differential Equations*, Conference 12 (2005), 9–19.
- [ASM] M.E. Alexander, A.R. Summers and S.M. Moghadas: Neimark-Sacker bifurcations in a non-standard numerical scheme for a class of positivity-preserving ODEs, *Proc. R. Soc. A* **462** (2006), 3167–3184.
- [F] R. FitzHugh: Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical J.* **1** (1961), 445–466.
- [HT] 広田良吾，高橋大輔：差分と超離散，共立出版，2003年。
- [KS] J. Keener and J. Sneyd (中垣俊之 監訳)：数理生理学 上 細胞生物学，日本評論社，2005年。
- [KM] 郡宏・森田善久，生物リズムと力学系，共立出版，2011年。
- [NAY] J. Nagumo, S. Arimoto and S. Yoshizawa: An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.* **50** (1962), 2061–2070.
- [Ma] 松木平淳太，超離散可積分系とソリトン・セルオートマトン，可積分系の応用数理 (中村佳正 編) 所収，裳華房，2000年。
- [Mc] H.P. McKean: Nagumo’s equation, *Adv. in Math.* **4** (1970), pp. 209–223.
- [Mu1] 村田実貴生：微分方程式の系統立った離散化の方法，九州大学応用力学研究所 研究集会報告 **22AO-S8** (2011), pp. 1–6.
- [Mu2] 村田実貴生：超離散反応拡散系，本報告集所収。