分割(n+1,n)に付随するPainlevé系について

山本, 聖爾
立教大学院理学研究科

https://doi.org/10.15017/23475

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (29), pp.189-195, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 29 (pp. 189 - 195)

分割(n+1,n)に付随するPainlevé系について

山本　聖爾（YAMAMOTO Seiji）

(Received 14 January 2012; accepted 7 February 2012)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

『分割 $(n+1,n)$ に付随する Painlevé 方程式系について』

立教大学院理学研究科　山本聖爾　(YAMAMOTO Seiji)

概要

自然数の分割に対応してソリトン方程式が構成され, 相似条件を課すことで (高階)Painlevé 方程式が得られることが知られている．藤-鈴木によって分割 $(n+1,n+1)$ に対応するソリトン方程式を相似簡約することで, Painlevé 第 6 方程式 P_{VI} の Hamiltonian を n 個結合したものを Hamiltonian とする高階 Painlevé 方程式が構成されている．今回分割 $(n+1,n)$ に対応するソリトン方程式から Painlevé 第 5 方程式 P_V の Hamiltonian を n 個結合したものを Hamiltonian とする高階 Painlevé 方程式を得た. これらの方程式は以下の性質を持つものである．(1)$A^{(1)}_{2n}$ 型 affine Weyl 群対称性, (2) 一般合流型超幾何関数 ${}_nF_n$ で表される特殊解, (3) 分割 $(n+1,n+1)$ に対応する高階 Painlevé 方程式からの退化.

1　はじめに

ソリトン方程式に相似条件なる制約条件を課すことで (高階)Painlevé 方程式が得られることが知られている．その最初の例は mKdV 方程式と Painlevé 第 2 方程式 P_{II} との関係であろう [AS]．また V.G.Drinfeld と V.V.Sokolov は mKdV 階層を $A^{(1)}_1$ の場合として含む形で affine Lie 代数に対して一般化した [DS]．これを Drinfeld-Sokolov 階層 (以下 DS 階層と略す) ということにする．DS 階層は affine Lie 代数の Heisenberg 部分代数を用いて構成される．$A^{(1)}_N$ 型の場合はその Heisenberg 部分代数の同型類と自然数 $N+1$ の分割とが 1 対 1 に対応する [KP, C]．A 型 DS 階層に相似条件を課すことで (高階)Painlevé 方程式が導かれ, 得られた方程式と Hisenberg 部分代数の同型類に対応する分割のリストを以下の表にあげる [NY, KIK, KK1, KK2, FS, S1].

partition	(2)	$(1,1)$	(3)	$(2,1)$	$(1,1,1)$	(4)	$(2,2)$
Painlevé 方程式	P_{II}	P_{IV}	P_{IV}	P_V	P_{VI}	P_V	P_{VI}

partition	$(n+1)$	$(n-1,1)$	$(n+1,n+1)$	$(n,n,1)$	$(n+1,n)$
高階 Painlevé 方程式	$P_{(n+1)}$	$P_{(n+1)}$	$P_{(n+1,n+1)}$	$P_{(n+1,n+1)}$	$P_{(n+1,n)}$

注意 1.1　上記の表の分割 $(n+1,n)$ に対応する場合が本稿の結果である．　□

藤-鈴木 [FS, S1] は以下のような $2n$ 個の従属変数 $q_i,p_i(i=1,\cdots,n)$ と $2n+2$ 個のパラメータ $\eta,\alpha_j(j=0,\cdots,2n,$ 但し $\sum_{i=0}^{2n+1}\alpha_i=1)$ に関する n 自由度の Hamilton 系

$$t(t-1)\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H_{(n+1,n+1)}}{\partial p_i},\quad t(t-1)\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H_{(n+1,n+1)}}{\partial q_i}\quad (i=1,\cdots,n),$$

$$\begin{aligned}H_{(n+1,n+1)}:=&\sum_{i=1}^{n}H\left[q_i,p_i\,;\sum_{j=0}^{n}\alpha_{2j+1}-\alpha_{2i-1}-\eta,\sum_{j=0}^{i-1}\alpha_{2j},\sum_{j=i}^{n}\alpha_{2j},\alpha_{2j-1}\eta\right]\\&+\sum_{1\le i<j\le n}(q_i-1)(q_j-t)\{(p_iq_i+\alpha_{2i-1})p_j+p_i(p_jq_j+\alpha_{2j-1})\},\end{aligned}$$

$$H\ [q,p;a,b,c,d]:=q(q-1)(q-t)p^2-a(q-1)(q-t)p-bq(q-t)p-(c-1)q(q-1)p+dq,$$

を分割 $(n+1,n+1)$ に対する $A^{(1)}_{2n+1}$ 型 DS 階層を相似簡約して得た．本稿ではこの方程式を $P_{(n+1,n+1)}$ ということにする．鈴木 [S1, S2] は $P_{(n+1,n+1)}$ が $A^{(1)}_{2n+1}$ 型 affine Weyl 群対称性と一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ で表される特殊解を持つことを示し, 超幾何関数と同様に $P_{(n+1,n+1)}$ にも退化構造があることを明らかにした.

注意 1.2　$P_{(n+1,n+1)}$ は KP 階層のもう一つの拡張である UC 階層からも得られる [T].　□

今回分割 $(n+1,n)$ に対する $A_{2n}^{(1)}$ 型 DS 階層の相似簡約から [S2] における ${}_nH_n$ と等価な方程式が得られ, 次のような $2n$ 個の従属変数 $q_i, p_i (i=1,\cdots,n)$ と $2n+1$ 個のパラメータ $\eta, \alpha_j (j=0,\cdots,2n,$ 但し $\sum_{i=0}^{2n}\alpha_i = 1)$ に関する n 自由度の Hamilton 系としての表示を新たに得た;

$$t\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H_{(n+1,n)}}{\partial p_i}, \quad t\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H_{(n+1,n)}}{\partial q_i} \quad (i=1,\cdots,n),$$

$$\begin{aligned} H_{(n+1,n)} =& \sum_{i=1}^{n} H \left[q_i, p_i\, ;\, \alpha_{2i-1}, \eta - \sum_{j=1}^{i}\alpha_{2j-1}, \eta + \sum_{j=i}^{n}\alpha_{2j} - \sum_{j=1}^{i}\alpha_{2j-1} \right] \\ &+ \sum_{1\le i<j\le n} (q_j - 1)(q_i p_i p_j + q_j p_i p_j + \alpha_{2j-1} p_i). \end{aligned}$$

ここで $H_V[q,p;a,b,c]$ は Painlevé 第 5 方程式 P_V の Hamiltonian であり, 具体的には次の形で与えられる;

$$H\ [q,p;a,b,c] := q(q-1)p(p+t) + atq + bp - cpq.$$

この方程式を以後 $P_{(n+1,n)}$ と表すことにする. $P_{(n+1,n)}$ は次の性質を持ち, 以下でこのことを紹介する.

定理 1.1

1. $P_{(n+1,n)}$ は分割 $(n+1,n)$ に対する $A_{2n}^{(1)}$ 型 DS 階層を相似簡約することで得られる.
2. $P_{(n+1,n)}$ は $A_{2n}^{(1)}$ 型 affine Weyl 群対称性を持つ.
3. $P_{(n+1,n)}$ は一般合流型超幾何関数 ${}_nF_n$ で表される特殊解を持つ [S2].
4. $P_{(n+1,n)}$ は $P_{(n+1,n+1)}$ からの退化として得られる [S2].

□

2　DS 階層とその相似簡約

先ず分割 $(n+1,n)$ に対する $A_{2n}^{(1)}$ 型 DS 階層とその相似簡約について述べる [KK1, FS].

定義 2.1　$(2n+1)\times(2n+1)$ 行列 $\Lambda_i\ (i=1,2)$ を以下で定める;

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} E_{2i-1,2i+1} + zE_{2n+1,1}, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{n-1} E_{2i,2i+2} + zE_{2n,2}.$$

ここで, $E_{i,j} = (\delta_{ai}\delta_{bj})_{ab=1}^{2n+1}$ は行列単位である.　□

以下 $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ を $\mathbf{N}_1 := \mathbf{N}\backslash(n+1)\mathbf{N}, \mathbf{N}_2 := \mathbf{N}\backslash n\mathbf{N}$ と定める. Λ_1, Λ_2 によって定まる次のような, 無限個の独立変数 $t_{i,k}(i=1,2,k\in\mathbf{N}_i)$ とパラメータ z に依存する $(2n+1)\times(2n+1)$ 行列 $G = G(z;t), t = (t_{i,k})_{i=1,2,k\in\mathbf{N}_i}$ に関する偏微分方程式系を考える；

$$\partial_{i,k}(G) = \Lambda_i^k G, (i=1,2,k\in\mathbf{N}_i). \tag{2.1}$$

但し $\partial_{i,k}=\partial/\partial t_{i,k}$ とする．G を $G=W^{-1}Z, W$ は下３角, Z は上３角 と３角分解すると, $W=W(z;t)$ は次の佐藤方程式と言われる偏微分方程式 (2.2) を満たし, その両立条件から DS 階層といわれる非線形偏微分方程式 (2.3) が得られる;

命題 2.1　$B_{i,k}$ を $W\Lambda_i^k W^{-1}$ の上三角部分とすると, $W=W(z;t)$ は次を満たす；

$$\partial_{i,k}(W)=B_{i,k}W-W\Lambda_i^k \quad (i=1,2,k\in\mathbf{N}_i). \tag{2.2}$$

この方程式 (2.2) の両立条件として分割 $(n+1,n)$ に対する $A_{2n}^{(1)}$ 型 DS 階層といわれる非線形偏微分方程式

$$[\partial_{i,k}-B_{i,k},\partial_{j,l}-B_{j,l}]=0 \quad (i,j=1,2,k\in\mathbf{N}_i,l\in\mathbf{N}_j), \tag{2.3}$$

が得られる．ここにブラケット積は交換子積 $[X,Y]=XY-YX$ と定義する．　□

ここで, 偏微分方程式 (2.1) の解 $G=G(z;t)$ で次の相似条件

$$\begin{aligned}&G(\lambda^{-2n(n+1)}z;\bar{t})=\lambda^{2n(n+1)K-\rho H}G(z;t)\lambda^{-2n(n+1)K-\rho' H},\\ &\bar{t}=(\bar{t}_{i,k})_{i=1,2,k\in\mathbf{N}_i},\quad \bar{t}_{i,k}=d_ikt_{i,k},\quad d_1=2n,\quad d_2=2(n+1),\end{aligned} \tag{2.4}$$

を満たすものを考える [KK1]．ここで $\rho,\rho'\in\mathbf{C}$ は t に依存しないパラメータであり,

$$\begin{aligned}H&=n\sum_{i=1}^{n+1}E_{2i-1,2i-1}-(n+1)\sum_{i=1}^{n}E_{2i,2i}=\mathrm{diag}(n,-(n+1),n,-(n+1),\cdots,n,-(n+1),n),\\ K&=\frac{1}{2n(n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n+1}(n^2+2n-2ni)E_{2i-1,2i-1}+\sum_{i=1}^{n}((n+1)^2-2(n+1)i)E_{2i,2i}\right),\end{aligned}$$

である．このとき $\vartheta:=2n(n+1)(zd/dz+\mathrm{ad}K)$ とおくと, 次で定める $\Psi=\Psi(z;t)$ が Lax 形式を満たす.

命題 2.2

$$\Psi=Wz^{\rho H}\exp\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{k\in\mathbf{N}_i}t_{i,k}\Lambda_i^k\right),\quad M:=\rho H+\sum_{i=1}^{2}\sum_{k\in\mathbf{N}_i}d_ikt_{i,k}B_{i,k},$$

とおく．$G=G(z;t)$ が相似条件 (2.4) を満たすならば $\Psi=\Psi(z;t)$ は次の Lax 形式

$$\vartheta(\Psi)=M\Psi,\quad \partial_{i,k}(\Psi)=B_{i,k}\Psi \quad (i=1,2,k\in\mathbf{N}), \tag{2.5}$$

を満たす．よって (2.5) の両立条件から次が得られる;

$$[\partial_{i,k}-B_{i,k},\vartheta-M]=0,\quad [\partial_{i,k}-B_{i,k},\partial_{j,l}-B_{j,l}]=0,\quad (i,j=1,2,\quad k,l\in\mathbf{N}). \tag{2.6}$$

□

3　高階 Painlevé 方程式系

以下 $t_{2,1}=1,t_{i,k}=0$ $(i=1,2,k\geq 2)$ とし, 簡単のため $t_1:=t_{1,1},B_i:=B_{i,1}(i=1,2)$ とおくと (2.6) は

$$\partial_1(M)-\vartheta(B_1)=[B_1,M],\quad M=\rho H+2nt_1B_1+2(n+1)B_2, \tag{3.7}$$

と等価である. ここで M は

$$M = \sum_{i=1}^{2n+1} \epsilon_i E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i E_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{n} (2(n+1)\lambda_{i+1} - 2nt_1\lambda_i) E_{2i,2i+1}$$
$$+\lambda_1\mu_{n+1} z E_{2n+1,1} + \mu_{n+1} z E_{2n+1,2} + 2(n+1)\lambda_1 z E_{2n,1} + 2nt_1\Lambda_1 + 2(n+1)\Lambda_2,$$

とかける. このとき (3.7) は $2n+2$ 個の従属変数 $\lambda_i, \mu_i (i = 1, \cdots, n+1)$ に関する Hamilton 系でかける.

定理 3.1　$2n+2$ 個の従属変数 $\lambda_i, \mu_i (i = 1, \cdots, n+1)$ による Poisson 構造

$$\{\mu_i, \lambda_j\} = 2n(n+1)\delta_{i,j} \quad (i, j = 1, \cdots, n+1),$$

の下で, (3.7) が成り立つならば次の $2n+2$ 階 Hamilton 系が成り立つ.

$$\frac{d\lambda_i}{dt_1} = \{K_{(n+1,n)}, \lambda_i\}, \quad \frac{d\mu_i}{dt_1} = \{K_{(n+1,n)}, \mu_i\} \quad (i = 1, \cdots, n+1), \tag{3.8}$$

$$2n(n+1)K_{(n+1,n)} := \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\lambda_i\mu_i + 2(n\rho_1 - \epsilon_{2i-1})}{4nt_1} \lambda_i\mu_i - \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{nt_1}{n+1}\right)^j \mu_{j+1}\lambda_{n+1}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i\mu_i + \epsilon_{2i} - \epsilon_{2i-1} + 2i - 1}{2(n+1)} \sum_{j=0}^{n-i} \left(\frac{nt_1}{n+1}\right)^j \mu_{i+j+1}\lambda_i.$$

但し ϵ_i, ρ_1 $(i = 1, \cdots, 2n+1)$ は t_1 に依存しない定数であり, $\lambda_i, \mu_i (i = 1, \cdots, n+1)$ は次を満たす;

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j\mu_j = \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon_{2j-1} - n(n+1)\rho_1.$$

□

さて Hamilton 系 (3.8) において

$$q_i = n^{i-2}(n+1)^{n+1-i} \frac{t_1^{i-n-1}\lambda_{n+1}}{\lambda_i}, \quad p_i = -n^{2-i}(n+1)^{i-n-1} \frac{t_1^{n+1-i}\lambda_i}{\lambda_{n+1}} \left(\frac{\lambda_i\mu_i}{2n(n+1)} + \alpha_{2i-1}\right),$$
$$\alpha_{2i-1} = \frac{\epsilon_{2i} - \epsilon_{2i-1} + 2i - 1}{2n(n+1)}, \quad \alpha_{2i} = \frac{\epsilon_{2i+1} - \epsilon_{2i} + 2n - 2i + 1}{2n(n+1)},$$
$$\alpha_0 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_{2n+1} + 2n}{2n(n+1)}, \quad \eta = \frac{\rho}{2} - \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\epsilon_{2j-1}}{2n(n+1)}, \quad t = n^n(n+1)^{-(n+1)} t_1^{n+1} \quad (i = 1, \cdots, n),$$

とおくと、$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j} (i, j = 1, \cdots, n)$ が成り立ち q_i, p_i は $P_{(n+1,n)}$ の解となる.

定理 3.2　$q_i, p_i (i = 1, \cdots, n)$ は高階 Painlevé 方程式 $P_{(n+1,n)}$ を満たす. このとき λ_{n+1} は次を満たす.

$$t\frac{d}{dt}\log\lambda_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} ((q_j - 1)p_j + \alpha_{2j-1}) - t - \frac{n}{n+1}\eta + \frac{n}{2n+2}\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{n-2j}{2n+2}(\alpha_{2j-1} + \alpha_{2j}).$$

□

今回得た $P_{(n+1,n)}$ は $P_{(n+1,n+1)}$ を退化したものになっている [S2]. 実際には次が成り立つ.

定理 3.3　$P_{(n+1,n+1)}$ において, 変数の置き換え

$$q_i \to \frac{1}{\varepsilon t q_i}, \quad p_i \to -\varepsilon t q_i (p_i q_i + \alpha_{2i-1}), \quad t \to \frac{1}{\varepsilon t}, \quad \alpha_{2n+1} \to -\varepsilon^{-1}, \quad \alpha_0 \to \alpha_0 + \varepsilon^{-1} \quad (i = 1, \cdots, n),$$

と極限 $\varepsilon \to 0$ によって $P_{(n+1,n)}$ が得られる. □

4　affine Weyl 群対称性

$P_{(n+1,n)}$ の対称性について触れる. G に対する次の変換から $P_{(n+1,n)}$ の対称性が得られる [N, KK1].

$$r_i(G) = GS_i \quad (i = 0, \cdots, 2n).$$

$$S_0 = \sum_{k=2}^{2n} E_{k,k} + z^{-1} E_{1,2n+1} - z E_{2n+1,1}, \quad S_i = \sum_{k \neq i, i+1} E_{k,k} + E_{i+1,i} - E_{i,i+1}, \quad (i = 1, \cdots, 2n).$$

定理 4.1　$f = q_i, p_j$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ に対して、以下で定められる変換 $r_0, \cdots, r_{2n}$ で方程式系 $P_{(n+1,n)}$ は不変であり、変換群 $\langle r_0, \cdots, r_{2n} \rangle$ は $A_{2n}^{(1)}$ 型 Affine Weyl 群と同型である;

$$\begin{aligned}
&r_0(q_j) = q_j + \frac{\alpha_0 q_j}{tq_1 + \sum_{j=1}^n (p_j q_j + \alpha_{2j-1}) - \eta}, \quad r_0(p_j) = \frac{p_j(tq_1 + \sum_{k=1}^n (p_k q_k + \alpha_{2k-1}) - \eta) - \delta_{j1}\alpha_0 t}{tq_1 + \sum_{k=1}^n (p_k q_k + \alpha_{2k-1}) - \eta + \alpha_0}, \\
&r_{2i-1}(f) = f + \frac{\alpha_{2i-1}}{p_i}\{p_i, f\} \quad (i = 1, \cdots, n), \\
&r_{2i}(f) = f + \frac{\alpha_{2i}}{q_i - q_{i+1}}\{q_i - q_{i+1}, f\} \quad (i = 1, \cdots, n-1), \quad r_{2n}(f) = f + \frac{\alpha_{2n}}{q_n - 1}\{q_n, f\}, \\
&r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{i,j}\alpha_i, \quad r_0(\eta) = \eta, \quad r_i(\eta) = \eta + (-1)^i \alpha_i \quad (i, j = 1, \cdots, n).
\end{aligned}$$

ここで、$A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{2n}$ は $A_{2n}^{(1)}$ 型 Cartan 行列である. □

5　超幾何解

$P_{(n+1,n)}$ は一般合流型超幾何関数 ${}_nF_n$ を特殊解に持つ [S2]. ${}_nF_n$ は次のベキ級数で定義される:

$${}_nF_n\left[\begin{matrix} a_1, \cdots, a_n \\ b_1, \cdots, b_n \end{matrix} ; x\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_n)_k}{(1)_k (b_1)_k \cdots (b_n)_k} x^k, \quad (a)_k := a(a+1)\cdots(a+k-1).$$

定理 5.1

$$q_i := \frac{{}_nF_n\left[\begin{matrix} a_1^{(0)}, \cdots, a_n^{(0)} \\ b_1^{(0)}, \cdots, b_n^{(0)} \end{matrix} ; -(n+1)t\right]}{t\,{}_nF_n\left[\begin{matrix} a_1^{(i)}, \cdots, a_n^{(i)} \\ b_1^{(i)}, \cdots, b_n^{(i)} \end{matrix} ; -(n+1)t\right]}, \quad p_i = -\frac{\alpha_{2i-1}}{q_i} \quad (i = 1, \cdots, n),$$

は, $\eta = 0$ なる特殊化の下で $P_{(n+1,n)}$ の解である. また $a_j^{(i)}, b_j^{(i)}$ は $\alpha_i (i = 0, \cdots, 2n)$ で表される定数である.

$$a_j^{(i)} = n + 1 + (n+1)\alpha_{2(n-j+1)-1} - (n+1)\sum_{k=n+1-j}^{n} (\alpha_{2k-1} + \alpha_{2k}) \quad (j = 1, \cdots, n+1-i),$$

$$a_j^{(i)} = 2n+1+(n+1)\alpha_{2(n-j+1)-1} - (n+1)\sum_{k=n+1-j}^{n}(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}) \quad (j = n+2-i,\cdots,n),$$

$$b_j^{(i)} = 1-(n+1)\sum_{k=n+1-j}^{n}(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}) \quad (j=1,\cdots,n-i),$$

$$b_j^{(i)} = n+2-(n+1)\sum_{k=n+1-j}^{n}(\alpha_{2k-1}+\alpha_{2k}) \quad (j=n+1-i,\cdots,n), \quad (i=0,\cdots,n).$$

□

付録 A　Lax pair

最後に Lax pair を載せておく. (3.7) における M, B_1 は次で与えられる;

$$M = \sum_{i=1}^{2n+1}\epsilon_i E_{i,i} + \sum_{i=1}^{2n}\varphi_i E_{i,i+1} + \varphi_0 z E_{2n+1,1} + \varphi_{2n+1} z E_{2n+1,2} + \varphi_{2n+2} z E_{2n,1} + 2(n+1)((nt)^{\frac{1}{n+1}}\Lambda_1 + \Lambda_2),$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{2n+1} u_i E_{i,i} + \sum_{i=1}^{2n} x_i E_{i,i+1} + \frac{(nt)^{\frac{1}{n+1}}}{n}\Lambda_1,$$

$$\varphi_0 = \frac{2n(n+1)(nt)^{-\frac{n}{n+1}}}{q_1}\left\{\sum_{j=1}^{n}(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) - \eta\right\}, \quad \varphi_{2i-1} = -\frac{2n(n+1)(nt)^{1-\frac{i}{n+1}}}{\lambda_{n+1}} q_i(p_iq_i+\alpha_{2i-1}),$$

$$\varphi_{2i} = 2(n+1)(nt)^{\frac{i+1}{n+1}-1}\lambda_{n+1}\frac{q_i-q_{i+1}}{q_iq_{i+1}}, \quad \varphi_{2n} = 2(n+1)\lambda_{n+1}\frac{q_n-1}{q_n},$$

$$\varphi_{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{\lambda_{n+1}}\left\{\sum_{j=1}^{n}(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) - \eta\right\}, \quad \varphi_{2n+2} = 2(n+1)(nt)^{-\frac{n}{n+1}}\frac{\lambda_{n+1}}{q_1},$$

$$x_{2i-1} = -\frac{(nt)^{1-\frac{i}{n+1}}}{\lambda_{n+1}}\left\{\sum_{j=1}^{i}(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) + \sum_{j=i+1}^{n}(1-q_j)(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) - \eta\right\}, x_{2i} = -\frac{(nt)^{\frac{i+1}{n+1}-1}\lambda_{n+1}}{nq_i},$$

$$u_{2i-1} = -\frac{1}{q_i}\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) + \sum_{j=i}^{n}(1-q_j)(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) - \eta\right\}$$

$$-\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{j=1}^{i-1}(\frac{j}{n+1} - j(\alpha_{2j-1}+\alpha_{2j})) - \sum_{j=i}^{n}(\frac{n+1-j}{n+1} - (n+1-j)(\alpha_{2j-1}+\alpha_{2j})) + \eta\right\},$$

$$u_{2n+1} = -\sum_{j=1}^{n}(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) + \eta - \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{j=1}^{n}(\frac{j}{n+1} - j(\alpha_{2j-1}+\alpha_{2j})) + \eta\right\},$$

$$u_{2i} = \frac{1}{q_i}\left\{\sum_{j=1}^{i}((p_jq_j+\alpha_{2j-1}) + \sum_{j=i+1}^{n}(1-q_j)(p_jq_j+\alpha_{2j-1}) - \eta\right\}, \quad (i=1,\cdots,n).$$

参考文献

[AS] M. J. Ablowitz and H. Segur; Phys. Rev. Lett. 38 (1977) 1103-1106.
[C] R. Carter; Compositio Math. 25 (1972), 1-59.
[DS] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov; J. Sov. Math. 30 (1985) 1975-2036.
[FS] K. Fuji and T. Suzuki; Funkcial. Ekvac. 53 (2010) 143-167.
[KIK] T. Kikuchi, T. Ikeda and S. Kakei; J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 11465-11480.

[KK1] S. Kakei and T. Kikuchi; Int. Math. Res. Not. 78 (2004) 4181-4209.

[KK2] S. Kakei and T. Kikuchi; Lett. Math. Phys. 79 (2007) 221-234.

[KP] V. G. Kac and D. H. Peterson; In Symposium on anomalies, geometry and topology. W. A. Bardeen, A. R. White (eds). Singapore: World Scientific (1985) 276-298.

[N] M. Noumi; in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III Beijing, (2002), 497-509.

[NY] M. Noumi and Y. Yamada; Funkcial. Ekvac. 41 (1998), 483-503.

[S1] T. Suzuki; Preprint (arXiv:1002.2685).

[S2] T. Suzuki; SIGMA 6 (2010) 078.

[T] T. Tsuda; MI Preprint Series 7 (Kyushu Univ., 2010) 1-31 (arXiv:1007.3450).