s2s-OVCAの線形化連続極限の定常解と安定性

矢嶋, 徹
宇都宮大学工学研究科

宇治野, 秀晃
群馬工業高等専門学校

小熊, 和仁
東京大学工学部

https://doi.org/10.15017/23471

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (25), pp.171-175, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 25 (pp. 171 - 175)

s2s-OVCAの線形化連続極限の定常解と安定性

矢嶋　徹（YAJIMA Tetsu），宇治野　秀晃（UJINO Hideaki），小熊　和仁（OGUMA Kazuhito）

（Received 13 January 2012; accepted 19 January 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

s2s-OVCA の線形化連続極限の定常解と安定性

宇都宮大学工学研究科　矢嶋 徹　(Tetsu YAJIMA)
群馬工業高等専門学校　宇治野秀晃　(Hideaki UJINO)
東京大学工学部　小熊和仁　(Kazuhito OGUMA)

概　要　s2s-OVCA（スロースタート効果を取り入れた最適速度セルオートマトン）とは，交通流の記述において，特徴的な基本図を自然に再現するなど，興味深い性質を持つ離散オートマトンモデルである．本稿ではこの s2s-OVCA に関連した連続極限のモデルを取り上げ，定常解まわりでの摂動を考えて，その安定性の解析を行う．

1　はじめに

交通流においては様々な興味深いモデルが提案されており，スロースタート (slow-to-start. 以下 s2s) 効果を取り入れた最適速度 (optimal velocity. 以下 OV) セルオートマトン（以下 s2s-OVCA）はその 1 つである．いま，単一経路上を車長 x_0 の何台かの車両が運動するものとして，離散時間 n における車両 j の位置を x_j^n で表す．各車は番号が大きい車両の向きに動くとすれば，s2s-OVCA は

$$\begin{aligned} x_j^{n+1} &= x_j + \min\left[\min_{n'=0}^{n_0}(\widetilde{\Delta} x_j^{n-n'}), v_0\delta t\right] \\ \widetilde{\Delta} x_j^n &\equiv x_{j+1}^n - x_j^n - x_0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

によって定式化される．ここで $n_0, v_0, \delta t$ はいずれも定数であり，δt は時間刻み，v_0 は車の持ち得る最大速度（自由速度）である．式 (1.1) において，各車は n_0 ステップまでさかのぼって前車の末尾までの距離（以下ここではこれを車間距離と呼ぶ）$\widetilde{\Delta} x_j^n$ を記憶して，その時刻での移動量を決定する．すなわち，s2s-OVCA では n_0 によって s2s 効果が取り入れられている．また，(1.1) の右辺第 2 項は最適速度関数を離散化したものである．すなわち，s2s-OVCA は遅延効果と最適速度効果を併せ持つモデルである．実際，適当な初期条件の下で数値解析を行うと自然渋滞が発生するほか，基本図において特徴的なメタ安定分岐（いわゆる「人型」）が存在し [1]，現実の状況をよく表している．

しかしながら，s2s-OVCA は離散系であり，解の安定性の議論が困難であって，どのような状態が基本図のどの部分に落ちるかを容易に判断することはできない．よってここでは，(1.1) に関連した連続モデルを導き，それに対して線形安定性解析を行って解の安定性を議論することにする．次の節では，連続モデルの導出を行い，3 節ではその定常解を求め，定常解まわりでの乱れが安定伝播する条件を調べる．4 節では定常解周りでの摂動の安定性を調べる．

2　連続極限 ー s2s-OV モデル

本節では，s2s-OVCA をよく表す連続極限の導出を目指そう．離散系で s2s 効果と OV 関数を持つモデルとしては，超離散 s2s-OV モデル [2]：

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \max\left[0, \min_{n'=0}^{n_0}\left(\Delta x_j^{n-n'}\right) - x_0\right] - \max\left[0, \min_{n'=0}^{n_0}\left(\Delta x_j^{n-n'}\right) - x_0 - v_0\delta t\right] \tag{2.1}$$

が提案されている．このモデルにおいて，$\min_{n'=0}^{n_0}\left(\Delta x_j^{n-n'}\right) - x_0 \geq 0$ であれば s2s-OVCA(1.1) となる．超離散 s2s-OV モデルは離散 s2s-OV モデルの超離散化により求められ，これは

$$\begin{aligned}\frac{x_k^{n+1}-x_k^n}{\delta} &= -\log(1+e^{-x_0/\delta x}) + \log(1+e^{-(x_0+v_0\delta t)/\delta x}) \\ &+ \log\left[1+\left(\sum_{n'=0}^{n_0}\frac{e^{-\widetilde{\Delta}x_j^{n-n'}/\delta x}}{n_0+1}\right)^{-1}\right] - \log\left[1+\left(\sum_{n'=0}^{n_0}\frac{e^{-(\widetilde{\Delta}x_j^{n-n'}+v_0\delta t)/\delta x}}{n_0+1}\right)^{-1}\right]\end{aligned} \tag{2.2}$$

で与えられる．式 (2.1), (2.2) における定数は，(1.1) と同様に定義される．また，(2.2) における δx は空間方向の刻みである．以上の離散モデルに対しては，安定性を系統的に解析することが難しいため，離散 s2s-OV モデル (2.2) であるため，この連続極限として得られる s2s-OV モデル：

$$\frac{dx_j}{dt} = v_0\left[1+\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} e^{-\Delta_j(t-t')}dt'\right]^{-1} - \frac{v_0}{1+e^{x_0/\delta x}} \tag{2.3}$$

を考えよう．ただし，$\Delta_j(t)$ は

$$\Delta_j(t) = \frac{x_{j+1}(t)-x_j(t)-x_0}{\delta x} \tag{2.4}$$

と定義され，これは連続時空間の中での車間距離を表す．また，T_0 は監視時間で，離散モデルの n_0 に相当するものである．以下，本稿では離散 s2s-OV モデルをはさんだペアである s2s-OVCA の解の安定性について知見を得ることを目的として，まず s2s-OV モデルの定常解を求め，その周りでの解の安定性を解析することとする．

3 s2s-OV モデルの定常解

まず s2s-OV モデル (2.3) の定常解とその存在条件を求めよう．解を

$$x_j = a(j+ct) \quad (a,\, c \text{ は正定数}) \tag{3.1}$$

とする．すなわち，等間隔 a で配置された車が等しく速度 ac で運動している状況である（右図 1）．これを (2.3) に代入すれば，速度を決定する式

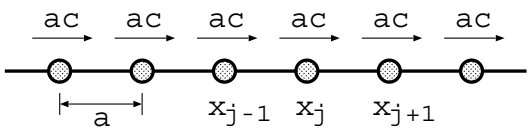

図 1: s2s-OV 模型の定常解 (3.1) が表す状況.

$$\frac{ac}{v_0} = \frac{e^{x_0/\delta x}(1-e^{-a/\delta x})}{[1+e^{(x_0-a)/\delta x}](1+e^{x_0/\delta x})}$$

が得られる．

さて，$x_j(t)$ として，定常解 s_j まわりでの微小な乱れの時間発展を考えよう．$x_j(t)$ として

$$x_j(t) = s_j + \widetilde{x}_j(t), \quad |\widetilde{x}_j(t)| \ll 1$$

を仮定し，式 (2.3) に代入して $\widetilde{x}_j(t)$ の主要項のみを残すと，線形化方程式

$$\begin{aligned}\frac{dx_j}{dt} &= \frac{\alpha}{T_0}\int_0^{T_0}\left[\widetilde{x}_{j+1}(t-t') - \widetilde{x}_j(t-t')\right]dt' \\ \alpha &\equiv \frac{v_0 e^{(x_0-a)/\delta x}}{\delta x[1+e^{(x_0-a)/\delta x}]^2}\end{aligned} \tag{3.2}$$

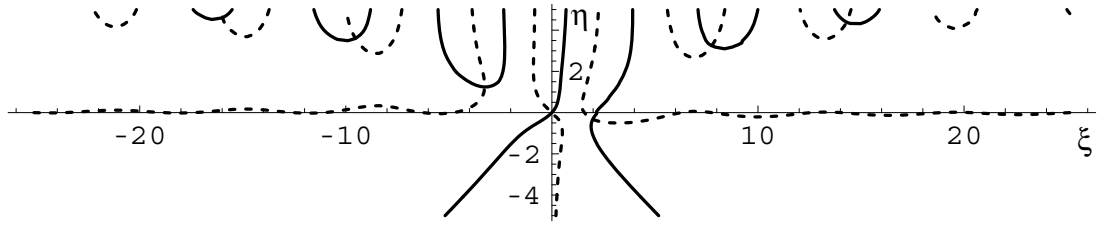

図 2: 分散関係 (3.4) を示すグラフ．実線は第 1 式，破線は第 2 式によって決まる曲線を表す．両者の共有点が ω を与えるが，$\xi = 0$ の近くに $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ の点が現れている．

が得られる．さて，$\widetilde{x}_j(t) \propto e^{i(kx+\omega t)}$ としよう．$\omega T_0 \to \omega$, $\alpha T_0 \to \beta$ とスケールし直せば，分散関係式

$$\omega^2 = -\beta(e^{ik} - 1)(1 - e^{-i\omega}) \tag{3.3}$$

が得られる．ただし，定義により $\beta > 0$ である．また，波数 k については，周期性があるため $0 < k < \pi$ の範囲で考えることになる．与えられた k に対して一般には複素数の ω が得られる．$\omega = \xi + i\eta$ とすれば，分散関係 (3.3) は

$$\begin{cases} \xi^2 - \eta^2 = 2\beta \sin\dfrac{k}{2}\left[\sin\dfrac{k}{2} + e^{\eta}\sin\left(\xi - \dfrac{k}{2}\right)\right] \\ \xi\eta = \beta\sin\dfrac{k}{2}\left[e^{\eta}\cos\left(\xi - \dfrac{k}{2}\right) - \cos\dfrac{k}{2}\right] \end{cases} \tag{3.4}$$

となる．乱れ $\widetilde{x}$ の成長については $\eta = \mathrm{Im}\,\omega$ の符号によって決まる．$\eta > 0$ の場合には乱れ $\widetilde{x}$ は指数的に減衰し，逆に $\eta < 0$ の場合には成長する．

図 2 に分散関係の各式を表す曲線を示した．図における実線と破線の共有点の座標が振動数 ω を与える．全体的な傾向として，η 軸から離れると両方の曲線とも U 字型の曲線の集合となり，その底部は増加していく．また，β が増加すると U 字型の曲線群は連続的に下方に移動し，η 軸に近いものは原点付近の曲線と一緒になって複雑な状況を示す．よって，不安定成長を示す乱れは，β が比較的大きい状況で $\xi = 0$ に近いところで現れると予想される．しかし，式 (3.3) は超越方程式であり，厳密に $\mathrm{Im}\,\omega$ の符号を分類するのは困難である．よってここでは実数の ω が得られる場合を調べ，安定に伝播する乱れが存在する条件を求めよう．

いま，$\omega = \xi \in \mathbb{R}$ の場合，(3.4) は

$$\begin{cases} \xi^2 = 2\beta\sin\dfrac{k}{2}\left[\sin\dfrac{k}{2} + \sin\left(\xi - \dfrac{k}{2}\right)\right] = 4\beta\sin\dfrac{k}{2}\sin\dfrac{\xi}{2}\cos\dfrac{k-\xi}{2} \\ 0 = \beta\sin\dfrac{k}{2}\left[\cos\left(\xi - \dfrac{k}{2}\right) - \cos\dfrac{k}{2}\right] = -2\beta\sin\dfrac{k}{2}\sin\dfrac{\xi}{2}\sin\dfrac{\xi-k}{2} \end{cases} \tag{3.5}$$

となる．ここで第 2 式により，$\dfrac{\xi}{2} = n\pi$, $\dfrac{\xi - k}{2} = n\pi$（$n \in \mathbb{Z}$）が得られるが，有意義なものは後者である．すなわち，

$$\xi = k + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \tag{3.6a}$$

であり，これを第 1 式に代入し，整理すれば

$$2\sqrt{\beta}\sin\frac{k}{2} = 2n\pi \pm k \tag{3.6b}$$

を得る．ただし，k の範囲を考慮すれば n は非負整数の範囲で考えればよい．すなわち，平面波型の $\widetilde{x}$ の場合に安定に伝播するものの波数は (3.6b) によって選択されるものである．図 3 に示すように，方程式 (3.6b) の解は 折れ線群 $y = 2n\pi \pm k$ と正弦曲線 $y = 2\sqrt{\beta}\sin\dfrac{k}{2}$ の $0 < k < \pi$ における共有点として求められ，その個数は β の値によって変化する．$\sqrt{\beta} \leq 1$ の場合は正弦曲線の立ち上がりが遅く，折れ線群との共有点はない．よってこの範囲ではいかなる乱れも安定伝播することはなく，速やかに解消してしまう．β が増えるに伴って安定伝播解として許される波数は増え，乱れの振動数 $\omega = \xi$ は n の選択とともに大きい値が許される．$\widetilde{x}$ が各車の位置の，定常解からの乱れであることを考えると，ω として重要なものは n が小さいものであることになる．

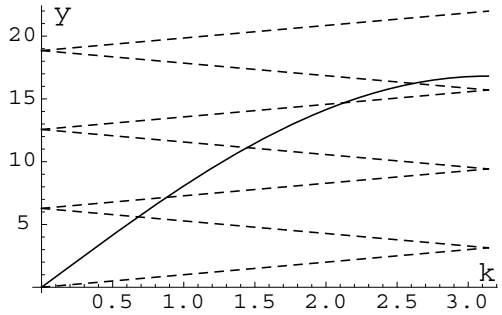

図 3: 方程式 (3.6b) の解を求めるグラフ．曲線 $y = 2\sqrt{\beta}\sin\dfrac{k}{2}$ と折れ線群 $y = 2n\pi \pm k$ （$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$）の共有点における k が許される波数となる．

安定伝播解の個数がこのように β の値によって変動することは次のように理解できる．$\beta = \alpha T_0$ と (3.2) によって，$\beta \propto v_0 T_0$ となる．すなわち，β が小さいのは監視時間が短く，自由速度が小さい場合に相当する．このような場合，安定運行状態の運動に乱れが生じたとしても，元の状態に容易に復帰することができる．逆に β が大きくなると，それだけ遠方からの情報によって運動が影響を受けることになり，生じた乱れが成長する可能性が増える．なお，β が大きくなるにつれて得られる ξ の値も大きくなる．また，(3.6) において大きい値の n に対応する解も存在し，全体的に振動数 ω が増加する傾向にある．

4 定常解のまわりでの安定性解析

次に，分散関係 (3.3) の複素数解を求めて定常運動に生じた乱れが不安定成長を示す条件を考えよう．ここでは，前節で求めた安定伝播波数の 1 つを $k = k_0$ とし，そのまわりでの微小変動によって生じるモードの成長を考える．すなわち，波数 k と振動数 ω を

$$\begin{aligned} &k = k_0 + \kappa, \quad \omega = \xi_0 + \varepsilon + i\delta \\ &k_0, \xi_0 \text{ は，安定伝播解の波数と振動数} \end{aligned} \tag{4.1}$$

とする．ただし，$|\kappa|, |\varepsilon|, |\delta| \ll 1$ と仮定しよう．(4.1) を分散関係 (3.4) に代入し，高次の項を無視すれば，

$$\begin{pmatrix} 2\xi_0 - \beta\sin k_0 & -2\beta\sin^2\dfrac{k_0}{2} \\ 2\beta\sin^2\dfrac{k_0}{2} & 2\xi_0 - \beta\sin k_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \delta \end{pmatrix} = \beta\kappa \begin{pmatrix} \sin k_0 \\ 1 - \cos k_0 \end{pmatrix}$$

を得る．これを解いて不安定成長率 $-\delta$ を求めると，

$$-\delta = -\frac{2\beta\kappa(1 - \cos k_0)(\xi_0 - \beta\sin k_0)}{(2\xi_0 - \beta\sin k_0)^2 + \beta^2\cos^2 k_0} \tag{4.2}$$

のようになる．これによると，δ は波数の変動 κ の 1 次に比例するため，不安定成長分岐は k_0 の片側にのみ現れることがわかる．どちらにずれた場合に摂動が成長するか消滅するかについては，k_0 と β の関係によって定まる．いま，ξ_0 は (3.6) によって決まるから，$\xi_0 = \pm 2\sqrt{\beta}\sin\dfrac{k_0}{2}$ である．

式 (4.2) で符号を決める因子は

$$-(\xi_0 - \beta \sin k_0) = 2\sqrt{\beta} \sin \frac{k_0}{2} \left(\sqrt{\beta} \cos \frac{k_0}{2} \mp 1 \right)$$

であるが，β が大きく，k_0 が微小であるほど成長率は大きくなる．たとえば，$\xi_0 = k_0 + 2n\pi$ のうち，もっとも主要なもの $\xi_0 = k_0$ についてはこの因子は $\sqrt{\beta} \cos \dfrac{k_0}{2} - 1$ に比例する．k_0 についての条件を考慮すれば，成長率は $\sqrt{\beta - \dfrac{k_0^2}{4}} - 1$ と同符号で，この符号変化は上記の考察に合致している．実際には k_0 は β の関数として (3.6b) によって定まるため，不安定成長を生じる波数の変動方向についてはさらなる議論の余地がある．

5　結論

本稿では，s2s-OVCA の安定性解析の手がかりを得る目的で，関係する連続モデルである s2s-OV モデルを取り上げてその 定常解まわりのずれの不安定成長を解析した．その結果，定常解として生じ得るものとしては，元のモデルにおけるパラメーターに条件が要請され，特定の波数が選択されることが示された．また，その要請は物理的状況に合致していることもわかった．不安定成長については，定常解のまわりでの摂動によって導出され，成長率のパラメーター依存性を調べた．パラメーターと波数の関係によって，乱れが成長するかどうかが決定されることがわかった．これからさらに詳細な成長率の分類やその物理的解釈などを行うことが，将来の問題として残されている．

参考文献

[1] K. Oguma and H. Ujino: “A hybrid of the optimal velocity and the slow-to-start models and its ultradiscretization”, JSIAM Letters **1** (2009) 68.

[2] 小熊和仁，宇治野秀晃，矢嶋徹：『スロースタート効果を取り入れた超離散最適速度模型と基本図』九州大学応用力学研究所研究集会報告 (22AO-S8) (2010) 111.