九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

シフト付きLR変換に付随する離散ハングリー系について

濱，洋輔
東京理科大学大学院理学研究科

福田，亜希子
東京理科大学理学部

石渡，恵美子
東京理科大学理学部

岩崎，雅史
京都府立大学生命環境学部

他

https://doi.org/10.15017/23469

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (23), pp.159-164, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 23 (pp. 159 - 164)

シフト付きLR変換に付随する離散ハングリー系について

濱　洋輔（HAMA Yousuke），福田　亜希子（FUKUDA Akiko），石渡　恵美子（ISHIWATA Emiko），岩崎　雅史（IWASAKI Masashi），山本　有作（YAMAMOTO Yusaku），中村　佳正（NAKAMURA Yoshimasa）

（Received 15 January 2012; accepted 1 March 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

シフト付き LR 変換に付随する離散ハングリー系について

東京理科大学大学院理学研究科　濱 洋輔　(HAMA Yosuke)
東京理科大学理学部　福田 亜希子　(FUKUDA Akiko)
東京理科大学理学部　石渡 恵美子　(ISHIWATA Emiko)
京都府立大学生命環境学部　岩崎 雅史　(IWASAKI Masashi)
神戸大学大学院工学研究科　山本 有作　(YAMAMOTO Yusaku)
京都大学大学院情報学研究科　中村 佳正　(NAKAMURA Yoshimasa)

概　要　離散ハングリー系として，離散ハングリー戸田方程式および 2 種の離散ハングリーロトカ・ボルテラ系がある．これらの離散ハングリー系は時間変数を含むか否かによって，非自励系と自励系に分類される．本報告では，非自励な 3 種の離散ハングリー系を結ぶ Bäcklund 変換を明らかにする．

1　はじめに

可積分な離散ハングリー系として，離散ハングリー戸田方程式 (dhToda: discrete hungry Toda equation) [1] と離散ハングリーロトカ･ボルテラ系 (dhLV: discrete hungry Lotka-Volterra system)[2, 3] がある．離散ハングリー戸田方程式

$$\begin{cases} Q_i^{(n+M)} + E_{i-1}^{(n+1)} = Q_i^{(n)} + E_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \\ Q_i^{(n+M)} E_i^{(n+1)} = Q_{i+1}^{(n)} E_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \\ E_0^{(n)} \equiv 0, \quad E_m^{(n)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

は有名な離散戸田方程式の拡張版とみなすことができる．ここで，上付き添え字 n は離散時間，下付き添え字 i は空間変数を表す．2 種類の離散ハングリーロトカ・ボルテラ系

$$\begin{cases} u_k^{(\ell+1)} \prod_{p=1}^{M} (1 + \delta^{(\ell+1)} u_{k-p}^{(\ell+1)}) = u_k^{(\ell)} \prod_{p=1}^{M} (1 + \delta^{(\ell)} u_{k+p}^{(\ell)}), \quad k = 1, 2, \ldots, M_m, \quad \ell = 0, 1, \ldots, \\ u_{1-M}^{(\ell)} \equiv 0, \ldots, u_0^{(\ell)} \equiv 0, \quad u_{M_m+1}^{(\ell)} \equiv 0, \ldots, u_{M_m+M}^{(\ell)} \equiv 0, \quad M_k := (M+1)k - M, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} v_k^{(\ell+1)} (1 + \delta^{(\ell+1)} \prod_{p=1}^{M} v_{k-p}^{(\ell+1)}) = v_k^{(\ell)} (1 + \delta^{(\ell)} \prod_{p=1}^{M} v_{k+p}^{(\ell)}), \quad k = 1, 2, \ldots, M_m + M - 1, \\ v_{1-M}^{(\ell)} \equiv 0, \ldots, v_0^{(\ell)} \equiv 0, \quad v_{M_m+M}^{(\ell)} \equiv 0, \ldots, v_{M_m+M+(M-1)}^{(\ell)} \equiv 0, \quad \ell = 0, 1, \ldots \end{cases} \tag{1.3}$$

は生物数理モデルの離散化で得られる離散ロトカ・ボルテラ系を拡張した離散可積分系であり，上付き添え字 ℓ は離散時間，下付き添え字 k は生物番号，$\delta^{(\ell)}$ は離散時間 ℓ における差分パラメータを表す．ここで，M は各生物種が捕食できる生物種数を表す自然数である．以降，簡略化のために (1.2), (1.3) をそれぞれ $\mathrm{dhLV_I}$，$\mathrm{dhLV_{II}}$ と呼ぶことにする．$\mathrm{dhLV_I}$ (1.2), $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) において $M = 1$ とすれば，ともに離散ロトカ・ボルテラ系と一致する．

差分パラメータに対する条件 $\delta^{(\ell)} \to \infty$ のもとで，3 つの離散ハングリー系を結ぶ Bäcklund 変換が導かれている [4, 5]．dhToda (1.1) はもとから，$\mathrm{dhLV_I}$ (1.2), $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) は極限 $\delta^{(\ell)} \to \infty$ において時間変数 ℓ に陽に依存する項を含まないので，[4, 5] は自励な離散ハングリー系に対する結果といえる．[6] では，dhToda (1.1) に非自励項を追加しているが，本報告ではこれを非自励 dhToda と呼ぶことにする．また，$\delta^{(\ell)}$ が有限な場合の (1.2), (1.3) をそれぞれ非自励 $\mathrm{dhLV_I}$，非自

励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ と呼ぶ．非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ (1.2) を結ぶ Bäcklund 変換が報告されている [7] が，非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換についての議論はない．本報告では，まず非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換を導出し，[7] の結果を踏まえて 3 つの非自励な離散ハングリー系の間の Bäcklund 変換を明らかにする．[6] では，非自励 dhToda だけでなく，付随するシフト付き LR 変換も示されている．[6] に倣って非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) をシフト付き LR 変換と関連付け，これを変数変換によって [6] のシフト付き LR 変換と対応付け，非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換を導く．

2 非自励 dhToda と付随するシフト付き LR 変換

本節では，[6] で示された非自励 dhToda と付随するシフト付き LR 変換について述べる．

dhToda 変数 $Q_k^{(n)}, E_k^{(n)}$ を成分にもつ m 次 2 重対角行列として，

$$L^{(n)} := \mathrm{lowerbidiag}\left\{\begin{matrix} Q_1^{(n)} & & Q_2^{(n)} & & \dots & & Q_m^{(n)} \\ & 1 & & 1 & \dots & 1 & \end{matrix}\right\}, \tag{2.1}$$

$$R^{(n)} := \mathrm{upperbidiag}\left\{\begin{matrix} & E_1^{(n)} & & E_2^{(n)} & \dots & E_{m-1}^{(n)} & \\ 1 & & 1 & & \dots & & 1 \end{matrix}\right\} \tag{2.2}$$

を導入する．ただし，lowerbidiag{} の上段は下 2 重対角行列の対角成分を，下段は下副対角成分を表す．また，upperbidiag{} の上段は上 2 重対角行列の上副対角成分を，下段は対角成分を表す．このとき，$A^{(n)} := L^{(n)}L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-1)}R^{(n)}$ とすると，自励 dhToda (1.1) の時間発展 $n \to n+M$ によって LR 変換

$$A^{(n)} = (L^{(n)}L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-1)})R^{(n)}, \quad A^{(n+M)} = R^{(n)}(L^{(n)}L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-1)}) \tag{2.3}$$

が実現できる．詳しくは [4] を参照されたい．LR 変換 (2.3) に原点シフトを追加したシフト付き LR 変換として，

$$A^{(n)} - s^{(n)}I = \bar{L}^{(n)}R^{(n,0)}, \quad A^{(n+M)} = R^{(n,0)}\bar{L}^{(n)} + s^{(n)}I \tag{2.4}$$

を考える．ただし，$\bar{L}^{(n)}$ は下 3 角行列，$R^{(n,0)}$ は上 2 重対角行列である．(2.4) より

$$A^{(n+M)} = R^{(n,0)}(\bar{L}^{(n)}R^{(n,0)} + s^{(n)}I)(R^{(n,0)})^{-1} = R^{(n,0)}A^{(n)}(R^{(n,0)})^{-1} \tag{2.5}$$

なので，$A^{(n)}$ と $A^{(n+M)}$ は相似であることが分かる．ここで，新たに以下の関係を満たす上 2 重対角行列 $R^{(n,k)}$ を導入する．

$$L^{(n+M+j)}R^{(n,j+1)} = R^{(n,j)}L^{(n+j)}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \tag{2.6}$$

$$R^{(n+M)}R^{(n,0)} = R^{(n,M)}R^{(n)}, \tag{2.7}$$

$$R^{(n,j)} := \mathrm{upperbidiag}\left\{\begin{matrix} & E_1^{(n,j)} & & E_2^{(n,j)} & \dots & E_{m-1}^{(n,j)} & \\ 1 & & 1 & & \dots & & 1 \end{matrix}\right\}.$$

このとき，$R^{(n,0)}A^{(n)}(R^{(n,0)})^{-1}$ に対して (2.6) の LR 変換を M 回，(2.7) の変換を 1 回使って変形

すると，

$$
\begin{aligned}
R^{(n,0)}A^{(n)}(R^{(n,0)})^{-1} &= (R^{(n,0)}L^{(n)})L^{(n+1)}\cdots L^{(n+M-1)}R^{(n)}(R^{(n,0)})^{-1} \\
&= L^{(n+M)}(R^{(n,1)}L^{(n+1)})\cdots L^{(n+M-1)}R^{(n)}(R^{(n,0)})^{-1} \\
&\quad\vdots \\
&= L^{(n+M)}L^{(n+M+1)}\cdots L^{(n+2M-1)}(R^{(n,M)}R^{(n)})(R^{(n,0)})^{-1} \\
&= L^{(n+M)}L^{(n+M+1)}\cdots L^{(n+2M-1)}R^{(n+M)} \\
&= A^{(n+M)}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

となる．これは $R^{(n,0)}$ が与えられると (2.6), (2.7) によって，シフト付き LR 変換 (2.4) が求まることを意味する．LR 変換 (2.6) において，(i,i) 成分，$(i,i+1)$ 成分が満たす等式を書き下すと，

$$
\begin{cases}
Q_i^{(n+M+j)} = Q_i^{(n+j)} + E_i^{(n,j)} - E_{i-1}^{(n,j+1)}, \quad i=1,2,\ldots,m, \quad j=0,1,\ldots,M-1, \\
E_i^{(n,j+1)} = \dfrac{Q_{i+1}^{(n+j)}}{Q_i^{(n+M+j)}}E_i^{(n,j)}, \quad i=1,2,\ldots,m-1, \quad j=0,1,\ldots,M-1, \\
E_0^{(n,j+1)} := 0, \quad E_m^{(n,j)} := 0, \quad j=0,1,\ldots,M-1
\end{cases}
\tag{2.9}
$$

となる．同様に，(2.7) の $(i,i+1)$ 成分，$(i,i+2)$ 成分に着目すると，

$$
\begin{cases}
E_i^{(n+M)} = E_i^{(n)} + E_i^{(n,M)} - E_i^{(n,0)}, \quad i=1,2,\ldots,m-1, \\
E_{i+1}^{(n,0)} = \dfrac{E_{i+1}^{(n)}}{E_i^{(n+M)}}E_i^{(n,M)}, \quad i=1,2,\ldots,m-2
\end{cases}
\tag{2.10}
$$

が得られる．実際は，$R^{(n,0)}$ のすべての成分ではなく $(1,2)$ 成分さえ求まれば (2.9), (2.10) を使ってシフト付き LR 変換 (2.4) が実現できる．詳しくは [6] を参照されたい．ちなみに $R^{(n,0)}$ の $(1,2)$ 成分 $E_1^{(n,0)}$ は，

$$
E_1^{(n,0)} = \frac{(Q_1^{(n)}Q_1^{(n+1)}\cdots Q_1^{(n+M-1)})E_1^{(n)}}{Q_1^{(n)}Q_1^{(n+1)}\cdots Q_1^{(n+M-1)} - s^{(n)}}
\tag{2.11}
$$

で与えられる．LR 変換 (2.3) は自励 dhToda (1.1) と関連付くのに対して，(2.3) に原点シフトを導入したシフト付き LR 変換 (2.4) は (2.9)–(2.11) に関連付くので，時間変数 n に依存する項 $s^{(n)}$ を含むという意味で (2.9)–(2.11) を非自励 dhToda と呼ぶ．もちろん，(2.11) において $s^{(n)}=0$ とすると，(2.9)–(2.11) は自励 dhToda (1.1) と一致する．

3　非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ を結ぶ Bäcklund 変換

本節では，まず非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) をシフト付き LR 変換と対応付ける．続いてこの結果を 2 節で示した非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と関連付くシフト付き LR 変換と組み合わせて，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換を導出する．さらに，[7] で得られた非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{I}}$ (1.2) を結ぶ Bäcklund 変換を踏まえ，非自励 $\mathrm{dhLV_{I}}$ (1.2) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換を与える．

非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) に対して，変数変換 $\omega_k^{(\ell)} := v_k^{(\ell)}(1+\delta^{(\ell)}\prod_{p=1}^{M} v_{k-p}^{(\ell)}), k=1,2,\ldots,M_m+M-1$, $\gamma_k^{(\ell)} := \delta^{(\ell)}\prod_{p=0}^{M} v_{k+p}^{(\ell)}, k=1,2,\ldots,M_m-1$ を施すと，

$$
\begin{cases}
\omega_k^{(\ell+1)} + \gamma_{k-M}^{(\ell)} = \omega_k^{(\ell)} + \gamma_k^{(\ell)}, \quad k=1,2,\ldots,M_m+M-1, \\
\omega_k^{(\ell+1)}\gamma_{k+1}^{(\ell)} = \omega_{k+M+1}^{(\ell)}\gamma_k^{(\ell)}, \quad k=1,2,\ldots,M_{m-1}+M-1
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

が得られる．このとき，(3.1) の行列形式は，

$$\mathcal{L}_{j+1}^{(\ell+1)}\mathcal{R}_{j+1}^{(\ell)} = \mathcal{R}_{j}^{(\ell)}\mathcal{L}_{j+1}^{(\ell)}, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R}^{(\ell+1)}\mathcal{R}_{0}^{(\ell)} = \mathcal{R}_{M}^{(\ell)}\mathcal{R}^{(\ell)}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}_{j+1}^{(\ell)} := \mathrm{lowerbidiag}\left\{\begin{matrix} \omega_{M_1+j}^{(\ell)} & & \omega_{M_2+j}^{(\ell)} & & \cdots & & \omega_{M_m+j}^{(\ell)} \\ & 1 & & 1 & \ldots & 1 & \end{matrix}\right\},$$

$$\mathcal{R}^{(\ell)} := \mathrm{upperbidiag}\left\{\begin{matrix} & \omega_{M_1+M}^{(\ell)} & & \omega_{M_2+M}^{(\ell)} & \cdots & \omega_{M_{m-1}+M}^{(\ell)} & \\ 1 & & 1 & & \ldots & & 1 \end{matrix}\right\},$$

$$\mathcal{R}_{j}^{(\ell)} := \mathrm{upperbidiag}\left\{\begin{matrix} & \gamma_{M_1+j}^{(\ell)} & & \gamma_{M_2+j}^{(\ell)} & \cdots & \gamma_{M_{m-1}+j}^{(\ell)} & \\ 1 & & 1 & & \ldots & & 1 \end{matrix}\right\}$$

となる．ここで，$\mathcal{L}_j^{(\ell)}, \mathcal{R}^{(\ell)}$ の積によって m 次行列を $\mathcal{A}^{(\ell)} := \mathcal{L}_1^{(\ell)}\mathcal{L}_2^{(\ell)}\cdots\mathcal{L}_M^{(\ell)}\mathcal{R}^{(\ell)}$ と定める．さらに，シフト付き LR 変換

$$\mathcal{A}^{(\ell)} - \bar{s}^{(\ell)}I = \bar{\mathcal{L}}^{(\ell)}\mathcal{R}_0^{(\ell)}, \quad \mathcal{A}^{(\ell+1)} = \mathcal{R}_0^{(\ell)}\bar{\mathcal{L}}^{(\ell)} + \bar{s}^{(\ell)}I \tag{3.4}$$

を導入する．ただし，$\bar{s}^{(\ell)}$ はシフト量，$\bar{\mathcal{L}}^{(\ell)}$ は下 3 角行列である．(3.4) より

$$\mathcal{A}^{(\ell+1)} = \mathcal{R}_0^{(\ell)}(\bar{\mathcal{L}}^{(\ell)}\mathcal{R}_0^{(\ell)} + \bar{s}^{(\ell)}I)(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} = \mathcal{R}_0^{(\ell)}\mathcal{A}^{(\ell)}(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} \tag{3.5}$$

なので，$\mathcal{A}^{(\ell)}$ と $\mathcal{A}^{(\ell+1)}$ は相似である．一方，$\mathcal{R}_0^{(\ell)}\mathcal{A}^{(\ell)}(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1}$ を (3.2), (3.3) によって変形すると，

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_0^{(\ell)}\mathcal{A}^{(\ell)}(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} &= (\mathcal{R}_0^{(\ell)}\mathcal{L}_1^{(\ell)})\mathcal{L}_2^{(\ell)}\cdots\mathcal{L}_M^{(\ell)}\mathcal{R}^{(\ell)}(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} \\ &= \mathcal{L}_1^{(\ell+1)}(\mathcal{R}_1^{(\ell)}\mathcal{L}_2^{(\ell)})\cdots\mathcal{L}_M^{(\ell)}\mathcal{R}^{(\ell)}(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} \\ &\quad\vdots \\ &= \mathcal{L}_1^{(\ell+1)}\mathcal{L}_2^{(\ell+1)}\cdots\mathcal{L}_M^{(\ell+1)}(\mathcal{R}_M^{(\ell)}\mathcal{R}^{(\ell)})(\mathcal{R}_0^{(\ell)})^{-1} \\ &= \mathcal{A}^{(\ell+1)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．(3.6) から，(3.2) の LR 変換を M 回と (3.3) の変換を 1 回の組み合わせによって，シフト付き LR 変換 (3.4) を実現できることが分かる．つまり，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) の時間発展 $\ell \to \ell+1$ によって，シフト付き LR 変換 (3.4) を実行できることを意味する．

続いて，シフト付き LR 変換 (3.4) のシフト量 $\bar{s}^{(\ell)}$ と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) の差分パラメータ $\delta^{(\ell)}$ の関係を明確にする．シフト付き LR 変換 (3.4) の第 1 式において，行列の $(1,1)$ 成分，$(1,2)$ 成分をそれぞれ比較して整理すると，

$$\bar{s}^{(\ell)} = \left(\prod_{p=0}^{M-1}\omega_{M_1+p}^{(\ell)}\right)\left(1 - \frac{\omega_{M_1+M}^{(\ell)}}{\gamma_{M_1}^{(\ell)}}\right) \tag{3.7}$$

が得られる．ここで，$\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) の境界条件より $\omega_{M_1}^{(\ell)}, \omega_{M_1+1}^{(\ell)}, \ldots, \omega_{M_1+M-1}^{(\ell)}$ と $v_{M_1}^{(\ell)}$，$v_{M_1+1}^{(\ell)}$，$\ldots, v_{M_1+M-1}^{(\ell)}$ について，$\prod_{p=0}^{M-1}\omega_{M_1+p}^{(\ell)} = \prod_{p=0}^{M-1}v_{M_1+p}^{(\ell)}$ が成り立つことに注意したい．さらに，$\omega_{M_1+M}^{(\ell)}/\gamma_{M_1}^{(\ell)} = 1 + 1/(\delta^{(\ell)}\prod_{p=0}^{M-1}v_{M_1+p}^{(\ell)})$ なので，(3.7) の右辺は簡略化されて，

$$\bar{s}^{(\ell)} = -\frac{1}{\delta^{(\ell)}} \tag{3.8}$$

となる．(3.8) より，極限 $\delta^{(\ell)} \to \infty$ において $\bar{s}^{(\ell)} = 0$ なので，シフト付き LR 変換 (3.4) はシフト無しの LR 変換となる．これは，自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ がシフト無し LR 変換と関連付けられた [5] の結果に矛盾しない．

最後に，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換を示す．非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) に付随するシフト付き LR 変換に現れる行列間の関係を考察する．まず，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) の離散時間 ℓ を用いて，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) の離散時間を $n = \ell M + j,\ j = 0, 1, \ldots, M-1$ と置き換える．このとき，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) の時間発展 $\ell \to \ell + 1$ は非自励 dhToda (2.9)–(2.11) の時間発展 $\ell M + j \to (\ell+1)M + j$ と対応する．ある ℓ において

$$R^{(\ell M)} = \mathcal{R}^{(\ell)}, \quad L^{(\ell M + j)} = \mathcal{L}^{(\ell)}_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{3.9}$$

および $s^{(\ell M)} = -1/\delta^{(\ell)}$ と仮定すると，$A^{(\ell M)} - s^{(\ell M)} I = \mathcal{A}^{(\ell)} + (1/\delta^{(\ell)}) I$ のように (2.4), (3.4) の第 1 式の左辺が等しくなるので，右辺に着目すると，

$$\bar{L}^{(\ell M)} R^{(\ell M, 0)} = \bar{\mathcal{L}}^{(\ell)} \mathcal{R}^{(\ell)}_0$$

が得られる．定義より $R^{(\ell M, 0)}, \mathcal{R}^{(\ell)}_0$ は対角成分が 1 である上 2 重対角行列なので，LU 分解の一意性より $R^{(\ell M, 0)} = \mathcal{R}^{(\ell)}_0$ が成り立つ．このとき，仮定である $L^{(\ell M)} = \mathcal{L}^{(\ell)}_1$ と合わせると $R^{(\ell M, 0)} L^{(\ell M)} = \mathcal{R}^{(\ell)}_0 \mathcal{L}^{(\ell)}_1$ なので，(2.6), (3.2) より

$$L^{((\ell+1)M)} R^{(\ell M, 1)} = \mathcal{L}^{(\ell+1)}_1 \mathcal{R}^{(\ell)}_1$$

となる．定義より $R^{(\ell M, 1)}, \mathcal{R}^{(\ell)}_1$ も対角成分が 1 である上 2 重対角行列なので，LU 分解の一意性より，

$$L^{((\ell+1)M)} = \mathcal{L}^{(\ell+1)}_1, \quad R^{(\ell M, 1)} = \mathcal{R}^{(\ell)}_1$$

が成り立つ．さらに，同様の議論を繰り返せば，

$$R^{(\ell M, j)} = \mathcal{R}^{(\ell)}_j, \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

$$L^{((\ell+1)M + j)} = \mathcal{L}^{(\ell+1)}_{j+1}, \quad j = 0, 1, \ldots, M, \tag{3.10}$$

$$R^{((\ell+1)M)} = \mathcal{R}^{(\ell+1)} \tag{3.11}$$

が導かれる．よって，ある ℓ に対して $R^{(\ell M)} = \mathcal{R}^{(\ell)}, L^{(\ell M + j)} = \mathcal{L}^{(\ell)}_{j+1}$ および $s^{(\ell M)} = -1/\delta^{(\ell)}$ ならば，ℓ を $\ell + 1$ で置き換えた (3.10), (3.11) も成り立つ．以上より，(3.9) を行列の成分ごとに書き下すと，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) について次の定理が成り立つ．

定理 3.1. $s^{(\ell M)} = -1/\delta^{(\ell)}$ とすると，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換は以下で与えられる．

$$Q^{(\ell M + j)}_i = \omega^{(\ell)}_{M_i + j} = v^{(\ell)}_{M_i + j} \Big(1 + \delta^{(\ell)} \prod_{p=1}^{M} v^{(\ell)}_{M_i + j - p} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1, \tag{3.12}$$

$$E^{(\ell M)}_i = \omega^{(\ell)}_{M_i + M} = v^{(\ell)}_{M_i + M} \Big(1 + \delta^{(\ell)} \prod_{p=1}^{M} v^{(\ell)}_{M_i + M - p} \Big), \quad i = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{3.13}$$

また，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ (1.2) を結ぶ Bäcklund 変換については，[7] において以下の定理が導かれている．

定理 3.2. $s^{(\ell M)} = -1/\delta^{(\ell)}$ とすると，非自励 dhToda (2.9)–(2.11) と非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ (1.2) を結ぶ Bäcklund 変換

$$U_{M_i}^{(\ell)} = \prod_{p=0}^{M-1} Q_i^{(\ell M+p)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{3.14}$$

$$U_{M_i+j+1}^{(\ell)} = \left(\prod_{p=0}^{M-2} Q_i^{(\ell M+p+j+1)} \right) E_i^{(\ell M+j)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad j = 0, 1, \ldots, M-1 \tag{3.15}$$

となる．ただし，$U_k^{(\ell)} := u_k^{(\ell)} \prod_{p=1}^{M} (1 + \delta^{(\ell)} u_{k-p}^{(\ell)})$ である．

さらに，定理 3.1, 3.2 より，非自励 dhToda 変数を介して，非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ (1.2) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換が導出できる．具体的には，(3.12), (3.13) と (3.14), (3.15) から非自励 dhToda 変数を消去すると $U_k^{(\ell)} = \prod_{p=0}^{M-1} \omega_{k+p}^{(\ell)}, k = 1, 2, \ldots, M_m$ となるので，非自励 $\mathrm{dhLV_I}$, $\mathrm{dhLV_{II}}$ 変数で書き換えると次の定理が得られる．

定理 3.3. 非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ (1.2) と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ (1.3) を結ぶ Bäcklund 変換は以下で与えられる．

$$u_k^{(\ell)} = \prod_{p=0}^{M-1} v_{k+p}^{(\ell)}, \quad k = 1, 2, \ldots, M_m.$$

4 まとめ

本報告ではまず，非自励 dhToda とシフト付き LR 変換の関係を説明した．続いて，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ の差分パラメータはシフト付き LR 変換のシフト量に対応することを示し，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ をシフト付き LR 変換に関連付けた．最後に，非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ に付随する 2 種類のシフト付き LR 変換を対応付ける変数変換を見出し，非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ を結ぶ Bäcklund 変換を導出した．非自励 dhToda と非自励 $\mathrm{dhLV_I}$ を結ぶ Bäcklund 変換は既存であるが，この結果を含めて非自励 dhToda, 非自励 $\mathrm{dhLV_I}$, 非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ の 3 種類の非自励な離散ハングリー系を結ぶ Bäcklund 変換を整理した．本報告で得られた Bäcklund 変換を利用すれば，非自励 $\mathrm{dhLV_{II}}$ の固有値計算への応用も可能である．

参考文献

[1] T. Tokihiro, A. Nagai, and J. Satsuma : “Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization”, *Inverse Probl.* **15** (1999) 1639–1662.

[2] R. Hirota, and S. Tsujimoto : “Conserved quantities of discrete Lotka-Volterra equation”, *RIMS Kokyuroku* **868** (1994) 31–38.

[3] Y. B. Suris : “Integrable discretizations of the Bogoyavlensky lattices”, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 3982–3996.

[4] A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, and Y. Nakamura : “A Bäcklund transformation between two integrable discrete hungry systems”, *Phys. Lett. A* **375** (2011) 303–308.

[5] Y. Hama, A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, and Y. Nakamura : “On some properties of a discrete hungry Lotka-Volterra system of multiplicative type”, *to appear in J. Math. Indust.*

[6] A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, and Y. Nakamura : “On a shifted LR transformation derived from the discrete hungry Toda equation”, *submitted.*

[7] Y. Yamamoto, A. Fukuda, M. Iwasaki, E. Ishiwata, and Y. Nakamura : “On a variable transformation between two integrable systems: the discrete hungry Toda equation and the discrete hungry Lotka-Volterra system”, *AIP Conf. Proc.*, **1281** (2010), 2045–2048.