九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

中心多様体理論を用いた積型離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の局所解析

飛田, 明彦
東京理科大学大学院理学研究科

福田, 亜希子
東京理科大学理学部

石渡, 恵美子
東京理科大学理学部

岩崎, 雅史
京都府立大学生命環境学部

他

https://doi.org/10.15017/23468

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (22), pp.153-158, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 22 (pp. 153 - 158)

中心多様体理論を用いた積型離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の局所解析

飛田　明彦（TOBITA Akihiko），福田　亜希子（FUKUDA Akiko），石渡　恵美子（ISHIWATA Emiko），岩崎　雅史（IWASAKI Masashi），中村　佳正（NAKAMURA Yoshimasa）

（Received 15 January 2012; accepted 1 March 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

中心多様体理論を用いた積型離散ハングリーロトカ・ボルテラ系の局所解析

東京理科大学大学院理学研究科	飛田 明彦	(TOBITA Akihiko)
東京理科大学理学部	福田 亜希子	(FUKUDA Akiko)
東京理科大学理学部	石渡 恵美子	(ISHIWATA Emiko)
京都府立大学生命環境学部	岩崎 雅史	(IWASAKI Masashi)
京都大学大学院情報学研究科	中村 佳正	(NAKAMURA Yoshimasa)

概　要　力学系の平衡点付近における解挙動を調べる際に中心多様体理論は有効である．本報告では，中心多様体理論を用いて可積分な積型の離散ハングリーロトカ・ボルテラ (dhLV) 系に対する局所解析を行う．まず，積型 dhLV 系に関連する中心多様体の存在を示し，続いて，差分間隔のパラメータを適切に定めることで積型 dhLV 系の解がその平衡点へ指数的に収束することを明らかにする．

1　はじめに

可積分な離散ロトカ・ボルテラ (dLV: discrete Lotka-Volterra) 系は，どの生物種も他の生物種を 2 種以上捕食しないとした可積分なロトカ・ボルテラ型生物数理モデルの時間離散版である．最高 M 種まで捕食できると拡張した場合，時間離散化で得られる可積分系の 1 つは，離散ハングリーロトカ・ボルテラ (dhLV: discrete hungry Lotka-Volterra) 系

$$\begin{cases} v_k^{(n+1)}\left(1+\delta\prod_{j=1}^{M} v_{k-j}^{(n+1)}\right) = v_k^{(n)}\left(1+\delta\prod_{j=1}^{M} v_{k+j}^{(n)}\right), \quad k=1,2,\dots,M_m+M-1, \\ v_{1-M}^{(n)} := 0,\dots,v_0^{(n)} := 0, \quad v_{M_m+M}^{(n)} := 0,\cdots,v_{M_m+M+(M-1)}^{(n)} := 0, \quad n=0,1,\dots \end{cases} \tag{1.1}$$

となる．ここで，n を離散時間変数，k を生物種番号，$v_k^{(n)}$ を離散時刻 n における生物種 k の個体数，任意定数 $\delta > 0$ を差分間隔とする．また，添え字が煩雑になるため，$M_k := (k-1)M + k$ とおく．dhLV 系 (1.1) は乗積記号 $\prod$ を含む可積分系の離散化で得られるので，本報告では積型 dhLV 系と呼ぶことにする．積型 dhLV 系 (1.1) に対し和型 dhLV 系もあるが，詳しくは [3] を参照されたい．

中心多様体理論 [1, 8] を利用した局所解析は，離散可積分系に基づく行列の固有値・特異値計算アルゴリズムに関して，収束の最終局面における平衡点付近での解の漸近的な振る舞いを調べることができる有効な手法といえる．このような挙動は一般に大域解析では捉えきれない．離散戸田方程式，離散ハングリー戸田方程式，dLV 系，和型 dhLV 系，qd 型 dhLV 系は，行列の固有値・特異値計算アルゴリズムの核となる漸化式に利用でき，それらに関連する中心多様体の存在については表 1 に示すとおりである．離散戸田方程式と離散ハングリー戸田方程式に関連する中心多様体は常に存在するとは限らないが，dLV 系，和型 dhLV 系，qd 型 dhLV 系に関連する中心多様体は，差分間隔を表す任意のパラメータ δ を適切に定めることで常に存在する．中心多様体が存在する場合は，離散可積分系の平衡点付近の解は指数的に平衡点へ近づくことが保証され，これらの離散可積分系に基づくアルゴリズムは安定した収束性をもつことを意味する [2, 5, 6]．積型 dhLV 系 (1.1) からも行列の固有値計算アルゴリズムを定式化できる [4] が，局所解析についてはまだ行われていない．本報告では，積型 dhLV 系 (1.1) に関連する中心多様体の存在について調べ，平衡点付近における解挙動を明らかにする．

表 1: 行列の固有値・特異値計算アルゴリズムに関連付けられる離散可積分系と関連する中心多様体

離散可積分系	中心多様体
離散戸田方程式	常に存在するとは限らない [5]
離散ハングリー戸田方程式	常に存在するとは限らない [7]
dLV 系	常に存在 [5]
和型 dhLV 系	常に存在 [2]
qd 型 dhLV 系	常に存在 [6]

2　中心多様体理論

中心多様体理論は力学系に対する古典的な解析手法の１つであり，これを用いて力学系の平衡点付近における解挙動を調べることができる．本節では，中心多様体理論について概説する．$\boldsymbol{x}^{(n)} := (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{\ell_1}^{(n)}) \in \boldsymbol{R}^{\ell_1}$，$\boldsymbol{y}^{(n)} := (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \ldots, y_{\ell_2}^{(n)}) \in \boldsymbol{R}^{\ell_2}$ に関する離散力学系

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \mathcal{A}\boldsymbol{x}^{(n)} + \zeta(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)}), \\ \boldsymbol{y}^{(n+1)} = \mathcal{B}\boldsymbol{y}^{(n)} + \chi(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)}) \end{cases} \tag{2.1}$$

を考える．ここで，複素平面上において $\mathcal{A} \in \boldsymbol{R}^{\ell_1 \times \ell_1}$ の固有値はすべて単位円周上，$\mathcal{B} \in \boldsymbol{R}^{\ell_2 \times \ell_2}$ の固有値はすべて単位円内部に分布すると仮定する．さらに，C^2 級関数 $\zeta : \boldsymbol{R}^{\ell_1+\ell_2} \to \boldsymbol{R}^{\ell_1}$，$\chi : \boldsymbol{R}^{\ell_1+\ell_2} \to \boldsymbol{R}^{\ell_2}$ は，

$$\zeta(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad \chi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad D\zeta(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O}, \quad D\chi(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O} \tag{2.2}$$

を満たすとする．ただし，$D\zeta$，$D\chi$ はそれぞれ ζ，χ のヤコビ行列である．このとき，次の定理が成り立つ．

定理 2.1. 離散力学系 (2.1) に対して，$h(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$，$Dh(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O}$ かつ $\boldsymbol{y}^{(n+1)} = h(\boldsymbol{x}^{(n+1)})$ となる C^2 級関数 $h : \boldsymbol{R}^{\ell_1} \to \boldsymbol{R}^{\ell_2}$ が存在する．ただし，十分に小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\|\boldsymbol{x}^{(n)}\| < \varepsilon$ とする．

関数 h が離散力学系 (2.1) に対する中心多様体である．離散力学系 (2.1) を中心多様体 h に制限することで，低次元化した離散力学系

$$\boldsymbol{z}^{(n+1)} = \mathcal{A}\boldsymbol{z}^{(n)} + \zeta(\boldsymbol{z}^{(n)}, h(\boldsymbol{z}^{(n)})), \quad \boldsymbol{z}^{(n)} \in \boldsymbol{R}^{\ell_1} \tag{2.3}$$

が与えられ，次の定理が得られる．

定理 2.2. (2.3) の零解が安定であると仮定すると，

1. (2.1) の零解は安定である．
2. $(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{y}^{(n)})$ を十分小さな初期値 $(\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{y}^{(0)})$ に対する解とする．このとき，(2.3) の解 $\boldsymbol{z}^{(n)}$ が存在し，すべての n に対して $\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{z}^{(n)}\| \le \kappa\beta^n$ かつ $\|\boldsymbol{y}^{(n)} - h(\boldsymbol{z}^{(n)})\| \le \kappa\beta^n$ を満たす．ここで κ, β は正の定数，$\beta < 1$ である．

3　積型 dhLV 系に関連する中心多様体の存在と局所的収束性

本節では，まず積型 dhLV 系 (1.1) に関連する中心多様体 h の存在を調べる．続いて中心多様体 h を導き，最終的に中心多様体理論を利用して積型 dhLV 系 (1.1) の局所的な解挙動を明らかにする．

[4] において積型 dhLV 系 (1.1) の大域的収束性に関する次の定理が示されている．

定理 3.1. 正の定数 K に対して $0 < v_1^{(0)}, v_2^{(0)}, \ldots, v_{M_m+M-1}^{(0)} < K$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} v_{M_k+\ell}^{(n)} = c_{k,\ell}, \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad \ell = 0,1,\ldots,M-1,$$
$$\lim_{n\to\infty} v_{M_k+M}^{(n)} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m-1$$

となる．ただし，定数 $c_{k,\ell}$ は $\prod_{\ell=0}^{M-1} c_{1,\ell} > \prod_{\ell=0}^{M-1} c_{2,\ell} > \cdots > \prod_{\ell=0}^{M-1} c_{m,\ell} > 0$ を満たす.

定数 $\prod_{\ell=0}^{M-1} c_{k,\ell}$ は Totally Nonnegative 行列の固有値となるが，詳しくは [4] を参照されたい.

ここで，$k = 1,2,\ldots,m$, $\ell = 0,1,\ldots,M-1$ に対して新たな変数 $\bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)} := v_{M_k+\ell}^{(n)} - c_{k,\ell}$ を導入する．また，$\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)} = (\bar{\boldsymbol{v}}_1^{(n)}, \bar{\boldsymbol{v}}_2^{(n)}, \ldots, \bar{\boldsymbol{v}}_m^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^{M_m+M-m}$, $\bar{\boldsymbol{v}}_k^{(n)} := (\bar{v}_{M_k}^{(n)}, \bar{v}_{M_k+1}^{(n)}, \ldots, \bar{v}_{M_k+M-1}^{(n)})$ および $\boldsymbol{v}^{(n)} = (v_{M_1+M}^{(n)}, v_{M_2+M}^{(n)}, \ldots, v_{M_{m-1}+M}^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^{m-1}$ とする．このとき，積型 dhLV 系 (1.1) は平衡点が $(\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ となるように容易に変形できる．さらに，次の補題に示すように線形部分と非線形部分に分離できる．以降，記号の簡略化のため，$c_{k,i:j} := \prod_{p=i}^{j} c_{k,p}$ とおく.

補題 3.2. $\bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)} := v_{M_k+\ell}^{(n)} - c_{k,\ell}$ とする．また，

$$\begin{aligned}\delta <\Bigg\{ &\max\Bigg[0, \max_{k=1,2,\ldots,m}\left(\left|-\prod_{p=0}^{M-1} v_{M_k+p}^{(n+1)} + \prod_{p=0}^{M-1} c_{k,p}\right| - \prod_{p=0}^{M-1} c_{k,p}\right),\\ &\max_{\substack{k=1,2,\ldots,m\\ \ell=1,2,\ldots,M-1}} \left(\alpha_k v_{M_k+M}^{(n)} + g_{M_k+M}\right)\left(\prod_{p=\ell+1}^{M-1} v_{M_k+p}^{(n+1)}\right)\left(\prod_{p=0}^{\ell} v_{M_{k+1}+p}^{(n)}\right)\Bigg]\Bigg\}^{-1}\end{aligned} \tag{3.1}$$

とする．このとき，

$$\begin{aligned}\bar{v}_{M_k+\ell}^{(n+1)} =& -\delta\alpha_{k-1} c_{k,0:\ell} c_{k-1,\ell+1:M-1} v_{M_{k-1}+M}^{(n)} + \bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)} + \delta c_{k+1,0:\ell-1} c_{k,\ell:M-1} v_{M_k+M}^{(n)}\\ &+ \bar{f}_{M_k+\ell}(\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}), \quad k = 1,2,\ldots,m, \quad \ell = 0,1,\ldots,M-1,\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$v_{M_k+M}^{(n+1)} = \alpha_k v_{M_k+M}^{(n)} + g_{M_k+M}(\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}), \quad \alpha_k := \frac{1+\delta c_{k+1,0:M-1}}{1+\delta c_{k,0:M-1}}, \quad k = 1,2,\ldots,m \tag{3.3}$$

が成り立つ．ここで，$\bar{f}_{M_k+\ell}$, g_{M_k+M} は $\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}$, $\boldsymbol{v}^{(n)}$ の関数で，

$$\bar{f}_{M_k+\ell}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = 0, \quad \nabla \bar{f}_{M_k+\ell}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \tag{3.4}$$
$$g_{M_k+M}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = 0, \quad \nabla g_{M_k+M}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} \tag{3.5}$$

を満たす．ただし，$\nabla \bar{f}_{M_k+\ell}$, ∇g_{M_k+M} はそれぞれ関数 $\bar{f}_{M_k+\ell}$, g_{M_k+M} の偏導関数である.

証明. 積型 dhLV 系 (1.1) において $v_{M_1+\ell}^{(n+1)} = \bar{v}_{M_1+\ell}^{(n+1)} + c_{1,\ell}$, $v_{M_1+\ell}^{(n)} = \bar{v}_{M_1+\ell}^{(n)} + c_{1,\ell}$, $v_{M_2+\ell}^{(n)} = \bar{v}_{M_2+\ell}^{(n)} + c_{2,\ell}$ として変形すると，$\ell = 0,1,\ldots,M-1$ のとき，

$$\begin{aligned}\bar{v}_{M_1+\ell}^{(n+1)} =& \bar{v}_{M_1+\ell}^{(n)} + (\bar{v}_{M_1+\ell}^{(n)} + c_{1,\ell})\delta v_{M_1+M}^{(n)} \left[\prod_{p=\ell+1}^{M-1}(\bar{v}_{M_1+p}^{(n)} + c_{1,p})\right]\left[\prod_{p=0}^{\ell-1}(\bar{v}_{M_2+p}^{(n)} + c_{2,p})\right]\\ =& \bar{v}_{M_1+\ell}^{(n)} + \delta c_{2,0:\ell-1} c_{1,\ell:M-1} v_{M_1+M}^{(n)}\\ &+ \delta v_{M_1+M}^{(n)}\left\{\left[\prod_{p=0}^{\ell-1}(\bar{v}_{M_2+p}^{(n)} + c_{2,p})\right]\left[\prod_{p=\ell}^{M-1}(\bar{v}_{M_1+p}^{(n)} + c_{1,p})\right] - c_{2,0:\ell-1} c_{1,\ell:M-1}\right\}\end{aligned} \tag{3.6}$$

となる．(3.6) の非線形項を $\bar{f}_{M_1+\ell}$ とみなすと (3.4) を満たすので，$k = 1$ のとき (3.2),(3.4) が成り立つ．ここで (3.2) より明らかに $\bar{v}_{M_1+\ell}^{(n+1)} = \bar{f}_{M_1+\ell}^{+}(\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)})$ なる関数 $\bar{f}_{M_1+\ell}^{+}$ が存在することに注意したい．また，$v_{M_1+M}^{(n+1)}$ について，

$$v_{M_1+M}^{(n+1)} = v_{M_1+M}^{(n)} \frac{1+\delta\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{v}_{M_2+p}^{(n)} + c_{2,p})}{1+\delta\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{v}_{M_1+p}^{(n+1)} + c_{1,p})}$$

$$=v_{M_1+M}^{(n)}\alpha_1\left[1+\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{v}_{M_2+p}+c_{2,p})-c_{2,0:M-1}}{1+\delta c_{2,0:M-1}}\right]\left[1+\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{f}_{M_1+p}^{+}+c_{1,0:M-1})}{1+\delta c_{1,0:M-1}}\right]^{-1}$$

が得られる．このとき，$\delta<[|-\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{f}_{M_1+p}^{+}+c_{1,p})+c_{1,0:M-1}|-c_{1,0:M-1}]^{-1}$ として $[\,\cdot\,]^{-1}$ の部分をべき級数展開すると，

$$\begin{aligned}
v_{M_1+M}^{(n+1)}=&\alpha_1 v_{M_1+M}^{(n)}\left[1+\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{v}_{M_2+p}^{(n)}+c_{2,p})-c_{2,0:M-1}}{1+\delta c_{2,0:M-1}}\right]\\
&\times\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\left[-\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{f}_{M_1+p}^{+}+c_{1,p})-c_{1,0:M-1}}{1+\delta c_{1,0:M-1}}\right]^{j}\right\}\\
=&\alpha_1 v_{M_1+M}^{(n)}+\alpha_1 v_{M_1+M}^{(n)}\left\{\left[1+\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{v}_{M_2+p}^{(n)}+c_{2,p})-c_{2,0:M-1}}{1+\delta c_{2,0:M-1}}\right]\right.\\
&\left.\times\left[1+\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\delta\frac{\prod_{p=0}^{M-1}(\bar{f}_{M_1+p}^{+}+c_{1,p})-c_{1,0:M-1}}{1+\delta c_{1,0:M-1}}\right)^{j}\right]-1\right\}
\end{aligned}\tag{3.7}$$

となる．(3.7) の非線形項を g_{M_1+M} とおくと (3.5) を満たすので，$k=1$ のとき (3.3),(3.5) が成り立つ．

続いて，k を $k-1$ で置き換えた (3.2),(3.3) が成り立つと仮定して，$\ell=0$ のとき (3.2) が成り立つことを示す．$v_{M_{k-1}+\ell}^{(n+1)}=\bar{v}_{M_{k-1}+\ell}^{(n+1)}+c_{k-1,\ell}$，$v_{M_k+\ell}^{(n)}=\bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)}+c_{k,\ell}$ なので，$\bar{v}_{M_{k-1}+\ell}^{(n+1)}=\bar{f}_{M_{k-1}+\ell}^{+}(\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)},\boldsymbol{v}^{(n)})$ とすると，

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{M_k}^{(n+1)}+c_{k,0}&=(\bar{v}_{M_k}^{(n)}+c_{k,0})\frac{1+\delta v_{M_k+M}^{(n)}\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{v}_{M_k+p}^{(n)}+c_{k,p})}{1+\delta v_{M_{k-1}+M}^{(n+1)}\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{v}_{M_{k-1}+p}^{(n+1)}+c_{k-1,p})}\\
&=(\bar{v}_{M_k}^{(n)}+c_{k,0})\frac{1+\delta v_{M_k+M}^{(n)}\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{v}_{M_k+p}^{(n)}+c_{k,p})}{1+\delta(\alpha_{k-1}v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+g_{M_{k-1}+M})\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{f}_{M_{k-1}+p}^{+}+c_{k-1,p})}
\end{aligned}$$

が得られる．このとき，$\delta<[(\alpha_{k-1}v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+g_{M_{k-1}+M})\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{f}_{M_{k-1}+p}^{+}+c_{k-1,p})]^{-1}$ として $[1+\delta(\alpha_{k-1}v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+g_{M_{k-1}+M})\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{f}_{M_{k-1}+p}^{+}+c_{k-1,p})]^{-1}$ をべき級数展開すると，

$$\begin{aligned}
\bar{v}_{M_k}^{(n+1)}+c_{k,0}=&(\bar{v}_{M_k}^{(n)}+c_{k,0})\left[1+\delta v_{M_k+M}^{(n)}\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{v}_{M_k+p}^{(n)}+c_{k,p})\right]\\
&\times\left\{1+\sum_{j=1}^{\infty}\left[-\delta(\alpha_{k-1}v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+g_{M_{k-1}+M})\prod_{p=1}^{M-1}(\bar{f}_{M_{k-1}+p}^{+}+c_{k-1,p})\right]^{j}\right\}
\end{aligned}\tag{3.8}$$

となる．ここで，(3.8) の右辺が定数項 $c_{k,0}$，線形項 $-\delta\alpha_{k-1}c_{k,0}c_{k-1,1:M-1}v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+\bar{v}_{M_k}^{(n)}+\delta c_{k,0:M-1}v_{M_k+M}^{(n)}$ および非線形項からなることに注意する．非線形項を $\bar{f}_{M_k}$ とおくと，明らかに $\ell=0$ のとき (3.4) が成り立つ．よって，$\ell=0$ のとき (3.2),(3.4) が成り立つことが示された．$\ell=1,2,\ldots,M-1$ のときも同様に (3.2),(3.4) を，さらに (3.3),(3.5) も示すことができる．なお，証明の途中で δ に対して条件を課したが，これは (3.1) の条件に矛盾しない． □

ここで，新しい変数

$$p_{M_k+\ell}^{(n)}:=-\beta_k v_{M_{k-1}+M}^{(n)}+\bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)}+\gamma_k v_{M_k+M}^{(n)},\quad k=1,2,\ldots,m,\quad \ell=0,1,\ldots,M-1,$$

$$\beta_k := c_{k,0:\ell} c_{k-1,\ell+1:M-1} \frac{1+\delta c_{k,0:M-1}}{c_{k-1,0:M-1} - c_{k,0:M-1}},$$
$$\gamma_k := c_{k+1,0:\ell-1} c_{k,\ell:M-1} \frac{1+\delta c_{k,0:M-1}}{c_{k,0:M-1} - c_{k+1,0:M-1}}$$

を導入すると，次の補題が得られる．

補題 3.3. $k = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\boldsymbol{p}_k^{(n)} := (p_{M_k}^{(n)}, p_{M_k+1}^{(n)}, \ldots, p_{M_k+M-1}^{(n)})$ とし，$\boldsymbol{p}^{(n)} := (\boldsymbol{p}_1^{(n)}, \boldsymbol{p}_2^{(n)}, \ldots, \boldsymbol{p}_m^{(n)})^\top \in \boldsymbol{R}^{M_m+M-m}$ とする．このとき，積型 dhLV 変数からなる離散力学系

$$\begin{cases} \boldsymbol{p}^{(n+1)} = A\boldsymbol{p}^{(n)} + f(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}), \\ \boldsymbol{v}^{(n+1)} = B\boldsymbol{v}^{(n)} + g(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}), \end{cases} \tag{3.9}$$
$$A = \mathrm{diag}\,(1, 1, \ldots, 1) \in \boldsymbol{R}^{(M_m+M-m)\times(M_m+M-m)}, \tag{3.10}$$
$$B = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}) \in \boldsymbol{R}^{(m-1)\times(m-1)} \tag{3.11}$$

が得られる．さらに，関数 f, g とそのヤコビ行列 Df, Dg は

$$f\,(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad g\,(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}, \quad Df\,(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O}, \quad Dg\,(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{O} \tag{3.12}$$

を満たす.

証明. まず，$p_{M_k+\ell}^{(n+1)}$ を $\bar{\boldsymbol{v}}^{(n)}$, $\boldsymbol{v}^{(n)}$ の関数として線形部分と非線形部分に分離すると，

$$\begin{aligned} p_{M_k+\ell}^{(n+1)} &= -\beta_k v_{M_{k-1}+M}^{(n+1)} + \bar{v}_{M_k+\ell}^{(n+1)} + \gamma_k v_{M_k+M}^{(n+1)} \\ &= -\alpha_{k-1}(\beta_k + \delta c_{k,0:\ell} c_{k-1,\ell+1:M-1}) v_{M_{k-1}+M}^{(n)} + \bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)} \\ &\quad + (\alpha_k \gamma_k + \delta c_{k+1,0:\ell-1} c_{k,\ell:M-1}) v_{M_k+M}^{(n)} + \bar{f}_{M_k+\ell} - \beta_k g_{M_{k-1}+M} + \gamma_k g_{M_k+M} \end{aligned}$$

となる．ここで，$\alpha_{k-1}(\beta_k + \delta c_{k,0:\ell} c_{k-1,\ell+1:M-1}) = \beta_k$, $\alpha_k \gamma_k + \delta c_{k+1,0:\ell-1} c_{k,\ell:M-1} = \gamma_k$ に注意する．さらに，$f_{M_k+\ell}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{v}^{(n)}) := \bar{f}_{M_k+\ell} - \beta_k g_{M_{k-1}+M} + \gamma_k g_{M_k+M}$ とおくと，

$$p_{M_k+\ell}^{(n+1)} = -\beta_k v_{M_{k-1}+M}^{(n)} + \bar{v}_{M_k+\ell}^{(n)} + \gamma_k v_{M_k+M}^{(n)} + f_{M_k+\ell} = p_{M_k+\ell}^{(n)} + f_{M_k+\ell} \tag{3.13}$$

となる．$k = 1, 2, \ldots, m-1$ に対して $\boldsymbol{f}_k := (f_{M_k}, f_{M_k+1}, \ldots, f_{M_k+M-1})$ とし，$\boldsymbol{f} := (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_m)^\top$ とすると，$\boldsymbol{f}$ は (3.12) を満たす．さらに，$\boldsymbol{g} := (g_{M_1+M}, g_{M_2+M}, \ldots, g_{M_m+M})^\top$ とおくと，$\boldsymbol{g}$ もまた (3.12) を満たす．よって，(3.10),(3.11) の A, B を使って (3.3),(3.5),(3.13) をまとめると (3.9) が得られる． □

定理 3.1 より $c_{k,0:M-1} > c_{k+1,0:M-1}$ なので，(3.3) より明らかに $0 < \alpha_k < 1$ である．よって，B の固有値の絶対値は 1 未満なので，中心多様体の存在に関する 2 節の議論を援用することができ，次の定理が得られる．

定理 3.4. 仮定 (3.1) のもとで，積型 dhLV 系 (1.1) から導かれる (3.12) を満たす離散力学系 (3.9) に対して，中心多様体 $h : \boldsymbol{R}^{M_m+M-m} \to \boldsymbol{R}^{m-1}$ が存在する．

離散力学系 (3.9) に対する中心多様体 h は $\boldsymbol{v}^{(n)} = h(\boldsymbol{p}^{(n)})$ であることを踏まえると，

$$h(A\boldsymbol{p}^{(n)} + f(\boldsymbol{p}^{(n)}, h(\boldsymbol{p}^{(n)}))) - Bh(\boldsymbol{p}^{(n)}) - g(\boldsymbol{p}^{(n)}, h(\boldsymbol{p}^{(n)})) = \boldsymbol{0}$$

を満たす．ここで，$\phi(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$D\phi(\mathbf{0})=\boldsymbol{O}$ を満たす C^1 級関数を $\phi:\boldsymbol{R}^{M_m+M-m}\to\boldsymbol{R}^{m-1}$ とする．さらに，ϕ に対する作用素 $\mathcal{M}$ を

$$\mathcal{M}\phi(\boldsymbol{p}^{(n)}):=\phi(A\boldsymbol{p}^{(n)}+f(\boldsymbol{p}^{(n)},\phi(\boldsymbol{p}^{(n)})))-B\phi(\boldsymbol{p}^{(n)})-g(\boldsymbol{p}^{(n)},\phi(\boldsymbol{p}^{(n)})) \tag{3.14}$$

とする．補題 3.3 より $f(\boldsymbol{p}^{(n)},\mathbf{0})=\mathbf{0}$，$g(\boldsymbol{p}^{(n)},\mathbf{0})=\mathbf{0}$ なので，(3.14) において $\phi(\boldsymbol{p}^{(n)})=\mathbf{0}$ とすると，

$$\mathcal{M}(\mathbf{0})=\phi(A\boldsymbol{p}^{(n)}+f(\boldsymbol{p}^{(n)},\mathbf{0}))-g(\boldsymbol{p}^{(n)},\mathbf{0})=\phi(A\boldsymbol{p}^{(n)})=\mathbf{0}$$

が得られる．[8] によると，離散力学系 (3.9) に対する中心多様体 h は $\boldsymbol{p}^{(n)}$ が十分小さいとき $h(\boldsymbol{p}^{(n)})=\mathcal{O}(\|\boldsymbol{p}^{(n)}\|^q)$ となり，離散力学系 (3.9) は,

$$\boldsymbol{p}^{(n+1)}=A\boldsymbol{p}^{(n)}+f(\boldsymbol{p}^{(n)},h(\boldsymbol{p}^{(n)}))=\boldsymbol{p}^{(n)}+f(\boldsymbol{p}^{(n)},\mathcal{O}(\|\boldsymbol{p}^{(n)}\|^q)) \tag{3.15}$$

と低次元化できる．(3.15) の零解は明らかに安定なので，定理 2.2 を利用すると平衡点への指数的収束性に関する次の定理が導かれる．

定理 3.5. 仮定 (3.1) のもとで $v_{M_k+\ell}^{(n^*)}-c_{k,\ell}$，$v_{M_k+M}^{(n^*)}$ が十分小さくなるような $n\geq n^*$ に対して，n の増加とともに $v_{M_k+\ell}^{(n)}$ は $c_{k,\ell}$ に，$v_{M_k+M}^{(n)}$ は 0 に穏やかに近づく．ここで，$v_{M_k+M}^{(n)}$ は 0 に穏やかに近づくとは，$\|\boldsymbol{v}^{(n)}\|$ が単調に 0 に近づくことを意味する．

4　まとめ

本報告では，積型 dhLV 系に関連する中心多様体の存在と，大域解析では把握できない積型 dhLV 系の局所的な解挙動を調べた．積型 dhLV 系に含まれる任意パラメータ δ を適切に定めることで，積型 dhLV 系に関連する中心多様体が常に存在することを明らかにした．さらに，中心多様体の存在を利用して，収束の最終局面において積型 dhLV 系の解が指数的に平衡点へ近づくことを示した．本研究によって，表 1 で示した離散可積分系に基づく行列の固有値・特異値計算アルゴリズムのクラスにおいて，離散戸田方程式に基づくアルゴリズムと dLV 系に基づくアルゴリズムの間の相違点が一段と鮮明になった．

参考文献

[1] J. Carr: "Applications of Centre Manifold Theory", Springer-Verlag, New York, 1981.

[2] A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki, and Y. Nakamura: "Discrete hungry integrable systems related to matrix eigenvalue and their local analysis by centre manifold theory", RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B13** (2009), 1-17.

[3] A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki, and Y. Nakamura: "Discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues", Inverse Problems, **25** (2009), 015007.

[4] Y. Hama, A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, and Y. Nakamura: "On some properties of a discrete hungry Lotka-Volterra system of multiplicative type", to appear in J. Math. Indust.

[5] M. Iwasaki, and Y. Nakamura: "Center manifold approach to discrete integrable systems related to eigenvalues and singular values", Hokkaido Math. J., **36** (2007), 759-775.

[6] Y. Takahashi, M. Iwasaki, A. Fukuda, E. Ishiwata, and Y. Nakamura: "Asymptotic analysis for an extended discrete Lotka-Volterra system related to matrix eigenvalues", to appear in Appl. Anal.

[7] Y. Takahashi, M. Iwasaki, A. Fukuda, E. Ishiwata, and Y. Nakamura: "On the periodic convergence in the discrete hungry Toda equation", preprint.

[8] S. Wiggins: "Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos", Springer-Verlag, New York, 2003.