符号付き超離散Bessel方程式とその特殊解について

奈良崎, 史貴
青山学院大学大学院理工学研究科

礒島, 伸
青山学院大学理工学部

薩摩, 順吉
青山学院大学理工学部

https://doi.org/10.15017/23460

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (14), pp.96-101, 2012-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 14 (pp. 96 - 101)

符号付き超離散Bessel方程式とその特殊解について

奈良崎　史貴（NARASAKI Fumitaka），礒島　伸（ISOJIMA Shin），薩摩　順吉（SATSUMA Junkichi）

（Received 13 January 2012; accepted 8 February 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

符号付き超離散 Bessel 方程式とその特殊解について

青山学院大学大学院理工学研究科　奈良崎史貴　(NARASAKI Fumitaka)
青山学院大学理工学部　礒島伸　(ISOJIMA Shin)
青山学院大学理工学部　薩摩順吉　(SATSUMA Junkichi)

概　要　符号が一定でない解を持つ方程式に対しては通常の超離散化を施すことができない. そうした方程式を超離散化する手法として,「符号付き超離散化」が提案されている [1]. 本稿では q-Bessel 方程式の超離散類似を「符号付き超離散化」の手続きによって構成する. さらに, その初期値問題を解くことで得られる特殊解について議論する.

1　q-Bessel 方程式の符号付き超離散化

Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2J_\nu}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dJ_\nu}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)J_\nu=0 \tag{1.1}$$

は線形独立な解として Bessel 関数と Neumann 関数を持ち, それらの関数は $\nu=0,1,2,3$ に対して図 1, 図 2 のような振る舞いをする. 以下, 簡単のため $\nu\in\mathrm{Z}_{\geq 0}$ とする. Bessel 関数, Neumann 関数は

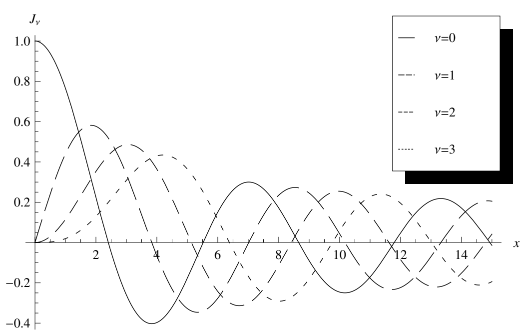

図 1: Bessel 関数

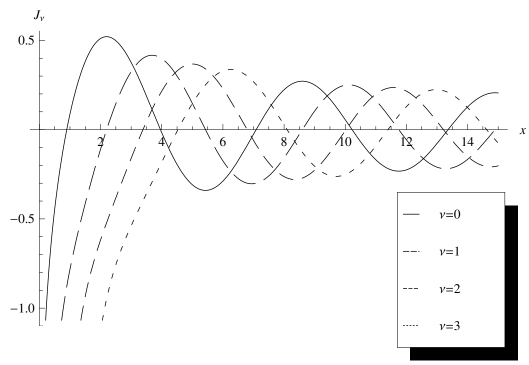

図 2: Neumann 関数

以下の特徴を持つ.

- Bessel 関数, Neumann 関数共に $x\to+\infty$ で減衰振動をする
- $x\to 0$ で Bessel 関数は $\nu=0$ の場合を除いて 0 を通り, Neumann 関数は発散する
- Bessel 関数, Neumann 関数共に ν の値が大きくなるほど零点が右へシフトする

Bessel 方程式を差分化したものの１つが q-Bessel 方程式

$$J_\nu\left(q^{n+1}\right)-\left(q^\nu+q^{-\nu}\right)J_\nu\left(q^n\right)+\left\{1+(1-q)^2q^{2n-2}\right\}J_\nu\left(q^{n-1}\right)=0 \tag{1.2}$$

である [2]. (1.2) は変数を $q=1+\varepsilon$, $n=\frac{\log x}{\varepsilon}$ と置き換え, $\varepsilon\to-0$ の連続極限を取ると (1.1) に帰着する. また, q-Bessel 関数は

$$
\begin{aligned}
J_\nu(q^n) &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{q^{n(\nu+2m)}}{\{2\nu+2m\}!\{2m\}!} \\
\{2k\}! &= \frac{1-q^{2k}}{1-q}\frac{1-q^{2k-2}}{1-q}\cdots\frac{1-q^2}{1-q}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

で定義される [3]. さて, このように符号が一定でない解を持つ q-Bessel 方程式 (1.2) を「符号付き超離散化」という手法で超離散化する. パラメータ ε を $q = e^{Q/\varepsilon}(Q<0)$ により導入し, 従属変数を

$$
J_\nu(q^n) = \{s(\beta_n^\nu) - s(-\beta_n^\nu)\} e^{B_n^\nu/\varepsilon} = \left\{e^{S(\beta_n^\nu)/\varepsilon} - e^{S(-\beta_n^\nu)/\varepsilon}\right\} e^{B_n^\nu/\varepsilon} \tag{1.4}
$$

と変換する. ここで $\beta_n^\nu \in \{+1,-1\}$ は $J_\nu(q^n)$ の符号で, 関数 $s(\beta_n^\nu)$ は

$$
s(\beta_n^\nu) = \begin{cases} 1 & (\beta_n^\nu = +1) \\ 0 & (\beta_n^\nu = -1) \end{cases} \tag{1.5}
$$

で定義される. さらに, 関数 $S(\beta_n^\nu)$ は $s(\beta_n^\nu)$ の超離散化に相当し,

$$
S(\beta_n^\nu) = \begin{cases} 0 & (\beta_n^\nu = +1) \\ -\infty & (\beta_n^\nu = -1) \end{cases} \tag{1.6}
$$

で定義される. これらの変数変換を (1.2) に適用し, 負の項を移項してから両辺に $\varepsilon \log$ を施して極限 $\varepsilon \to +0$ を取ると, 符号付き超離散 Bessel 方程式

$$
\begin{aligned}
&\max[S(\beta_{n+1}^\nu)+B_{n+1}^\nu, S(-\beta_n^\nu)+B_n^\nu-\nu Q, S(\beta_{n-1}^\nu)+B_{n-1}^\nu, S(\beta_{n-1}^\nu)+B_{n-1}^\nu+(2n-2)Q] \\
&= \max[S(-\beta_{n+1}^\nu)+B_{n+1}^\nu, S(\beta_n^\nu)+B_n^\nu-\nu Q, S(-\beta_{n-1}^\nu)+B_{n-1}^\nu, S(-\beta_{n-1}^\nu)+B_{n-1}^\nu+(2n-2)Q]
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

を得る. 超離散化された従属変数は符号 β_n^ν と振幅 B_n^ν の組, $\mathscr{B}_n^\nu := (\beta_n^\nu, B_n^\nu)$ で表わされる.

(1.7) は陰的な表現であるが, 次のような発展方程式に書き換えることができる. すなわち, $\mathscr{B}_{n-1}^\nu$ と $\mathscr{B}_n^\nu$ から $\mathscr{B}_{n+1}^\nu$ を得る前進スキームは

$$
\beta_{n+1}^\nu = \begin{cases} \frac{\beta_n^\nu-\beta_{n-1}^\nu}{2} + \frac{\beta_n^\nu+\beta_{n-1}^\nu}{2} sgn(B_n^\nu - \nu Q - B_{n-1}^\nu) & (\beta_n^\nu \neq \beta_{n-1}^\nu \vee B_n^\nu - \nu Q \neq B_{n-1}^\nu) \\ \text{任意} & (\beta_n^\nu = \beta_{n-1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n-1}^\nu) \end{cases} \tag{1.8}
$$

$$
B_{n+1}^\nu \begin{cases} = \max[B_n^\nu - \nu Q, B_{n-1}^\nu] & (\beta_n^\nu \neq \beta_{n-1}^\nu \vee B_n^\nu - \nu Q \neq B_{n-1}^\nu) \\ \leq B_n^\nu - \nu Q & (\beta_n^\nu = \beta_{n-1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n-1}^\nu) \end{cases} \tag{1.9}
$$

であり, $\mathscr{B}_{n+1}^\nu$ と $\mathscr{B}_n^\nu$ から $\mathscr{B}_{n-1}^\nu$ の値を得る後退スキームは

$$
\beta_{n-1}^\nu = \begin{cases} \frac{\beta_n^\nu-\beta_{n+1}^\nu}{2} + \frac{\beta_n^\nu+\beta_{n+1}^\nu}{2} sgn(B_n^\nu - \nu Q - B_{n+1}^\nu) & (\beta_n^\nu \neq \beta_{n+1}^\nu \vee B_n^\nu - \nu Q \neq B_{n+1}^\nu) \\ \text{任意} & (\beta_n^\nu = \beta_{n+1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n+1}^\nu) \end{cases} \tag{1.10}
$$

$$
B_{n-1}^\nu \begin{cases} = \max[B_n^\nu - \nu Q, B_{n+1}^\nu] - (2n-2)Q & (\beta_n^\nu \neq \beta_{n+1}^\nu \vee B_n^\nu - \nu Q \neq B_{n+1}^\nu) \\ \leq B_n^\nu - \nu Q - (2n-2)Q & (\beta_n^\nu = \beta_{n+1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n+1}^\nu) \end{cases} \tag{1.11}
$$

である.

2 超離散 Bessel 方程式の特殊解

以下, 初期値 $\mathscr{B}_0^\nu = (\beta_0^\nu, B_0^\nu), \mathscr{B}_1^\nu = (\beta_1^\nu, B_1^\nu)$ を与えて, $n \geq 1$ のときと $n \leq 1$ のとき, それぞれについて初期値問題を解く.

2.1　$\nu \in Z_{>0}$ のときの解

まずは ν が正の整数のときの解を求める.

(I) $n \geq 1$ のとき

初期条件として, 例えば $B_1^\nu - \nu Q < B_0^\nu$ または $\beta_1^\nu \neq \beta_0^\nu \wedge B_1^\nu - \nu Q = B_0^\nu$ を取ると, 解は

$$\mathscr{B}_n^\nu = (-\beta_0^\nu, B_0^\nu - (n-2)\nu Q) \quad (n \geq 2) \tag{2.1}$$

となる. この解は $n \to +\infty$ のとき, 振幅が $\exp B_n^\nu \to \infty$ となるため, 連続系での Neumann 関数のような振る舞いをする解である. その他のほとんどの初期条件に対しても, 同様の振る舞いをする解が得られる. しかし, 唯一

$$\beta_1^\nu = \beta_0^\nu \wedge B_1^\nu - \nu Q = B_0^\nu \tag{2.2}$$

を取ると不定型の発展が生じる. このとき $\mathscr{B}_2^\nu$ は不定となるが, ここで $\mathscr{B}_3^\nu$ も不定になると仮定する. そのためには $\beta_2^\nu = \beta_1^\nu \wedge B_2^\nu - \nu Q = B_1^\nu$ が成り立たなくてはならない. この条件により先程は不定だった $\mathscr{B}_2^\nu$ が一意に決まる. 以下同様に $\mathscr{B}_{n+1}^\nu \quad (\forall n \geq 2)$ も不定であると仮定する. $\mathscr{B}_{n+1}^\nu$ が不定になるためには $\beta_n^\nu = \beta_{n-1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n-1}^\nu$ が成り立たなくてはならず, $\mathscr{B}_n^\nu$ が一意に決まる. このように不定をひたすら選び続けると

$$\mathscr{B}_n^\nu = (\beta_0^\nu, B_0^\nu + n\nu Q) \quad (n \geq 1) \tag{2.3}$$

という解が得られる. この解は $n \to +\infty$ のとき, 振幅が $\exp B_n^\nu \to 0$ となるため, 連続系での Bessel 関数のような振る舞いをする解である.

(II) $n \leq 1$ のとき

初期条件として, 例えば $B_0^\nu - \nu Q > B_1^\nu$ または $\beta_0^\nu \neq \beta_1^\nu \wedge B_0^\nu - \nu Q = B_1^\nu$ を取ると, $\mathscr{B}_n^\nu$ は $-1 \geq n \geq -\nu$ において一意に決まり

$$\mathscr{B}_n^\nu = (\beta_0^\nu, B_0^\nu + n(n+\nu-1)Q) \quad (n = -1, -2, \cdots, -\nu) \tag{2.4}$$

と書ける. しかし, $\mathscr{B}_{-\nu-1}^\nu$ は不定となり, 以降, 不定型の発展が生じる. 具体的に $\nu = 3$ とし, 初期条件として $B_0^3 - \nu Q > B_1^3$ または $\beta_0^3 \neq \beta_1^3 \wedge B_0^3 - \nu Q = B_1^3$ を与えたときの発展の様子を書くと

$$\begin{aligned}
&\beta_{-1}^3 = \beta_0^3, && B_{-1}^3 = B_0^3 - Q \\
&\beta_{-2}^3 = \beta_0^3, && B_{-2}^3 = B_0^3 \\
&\beta_{-3}^3 = \beta_0^3, && B_{-3}^3 = B_0^3 + 3Q \\
&\beta_{-4}^3 \text{任意}, && B_{-4}^3 \leq B_0^3 + 8Q \\
&\beta_{-5}^3 = -\beta_0^3, && B_{-5}^3 = B_0^3 + 13Q \\
&&\vdots&
\end{aligned}$$

となる. $n \geq 1$ のときの不定型の発展と異なるのが, 初めて不定が生じる $\mathscr{B}_{-4}^3$ の次のステップ $\mathscr{B}_{-5}^3$ は $\mathscr{B}_{-4}^3$ の取り方に依らず一意に決まるという点である. ここで, $\mathscr{B}_{-6}^3$ も不定になると仮定する. そのためには $\beta_{-4}^3 = \beta_{-5}^3 \wedge B_{-4}^3 = B_{-5}^3 - 3Q$ が成り立たなくてはならない. この条件により先程は不定だった $\mathscr{B}_{-4}^3$ が一意に決まる. 以下同様に不定が表れた次のステップは一意に決まり, さらにその次のステップを不定と仮定することで $\mathscr{B}_n^3$ が $n \leq -4$ において一意に決まっていく. その解の一つとして ν を奇数とし, $\beta_n^\nu = \beta_{n+1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n+1}^\nu \quad (n = -\nu-2, -\nu-4, \cdots)$ を選んだときの解を書

くと

$$
\begin{aligned}
\beta_n^\nu &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+\nu}{2}}\beta_0^\nu & (n \le -\nu-1 : \mathrm{odd}) \\ (-1)^{\frac{n+\nu-1}{2}}\beta_0^\nu & (n \le -\nu-1 : \mathrm{even}) \end{cases} \\
B_n^\nu &= \begin{cases} B_0^\nu + \frac{n(n-2)-\nu^2}{2}Q & (n \le -\nu-1 : \mathrm{odd}) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-4)-(\nu+3)(\nu-1)}{2}Q & (n \le -\nu-1 : \mathrm{even}) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

となる. その他のほとんどの初期条件, 特に, $n \ge 1$ のとき Bessel 関数のような振る舞いを示す解を得た初期値 (2.2) を取っても同様の構造の解が得られる. ただし, ここでも唯一 $\beta_0^\nu = \beta_1^\nu \wedge B_0^\nu - \nu Q = B_1^\nu$ を取ると, 解の構造自体は同様だが, その導出の過程が異なる解が得られる. 具体的には, $\mathscr{B}_{-1}^\nu$ が不定となり, $-1 \ge n \ge -\nu$ においては各ステップで次のステップが不定となる条件 $\beta_n^\nu = \beta_{n+1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n+1}^\nu \quad (-1 \ge \forall n \ge -\nu)$ を選ぶことで $\mathscr{B}_n^\nu(-1 \ge n \ge -\nu)$ が一意に決まる. こうして得られる解は

$$
\mathscr{B}_n^\nu = (\beta_0^\nu, B_0^\nu - n\nu Q) \quad (n = -1, -2, \ldots, -\nu) \tag{2.6}
$$

と書ける. その後 $n \le -\nu-1$ においては $\mathscr{B}_n^\nu$ は他の初期条件と同様の発展型となる. そのうち $\beta_n^\nu = \beta_{n+1}^\nu \wedge B_n^\nu - \nu Q = B_{n+1}^\nu \quad (n = -\nu-2, -\nu-4, \cdots)$ を選んだときの ν が奇数の場合の解は

$$
\begin{aligned}
\beta_n^\nu &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n+\nu}{2}}\beta_0^\nu & (n \le -\nu-1 : \mathrm{odd}) \\ (-1)^{\frac{n+\nu-1}{2}}\beta_0^\nu & (n \le -\nu-1 : \mathrm{even}) \end{cases} \\
B_n^\nu &= \begin{cases} B_0^\nu + \frac{n(n-2)+\nu(\nu-2)}{2}Q & (n \le -\nu-1 : \mathrm{odd}) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-4)+(\nu-3)(\nu-1)}{2}Q & (n \le -\nu-1 : \mathrm{even}) \end{cases}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

と書ける. (2.4), (2.6) は解がそれぞれ同一符号であるため, Bessel 関数と Neumann 関数の零点のシフト部分に相当すると考えられる. また (2.5), (2.7) の解はそれぞれ $n \to -\infty$ で周期 4 の減衰振動の振る舞いをする. ここまでの結果を用いて $\nu = 1, 2$ の超離散 Bessel 関数の振る舞いを図 3 に示す. なお, 図 4 は対応する q-Bessel 関数 (1.3) のグラフである.

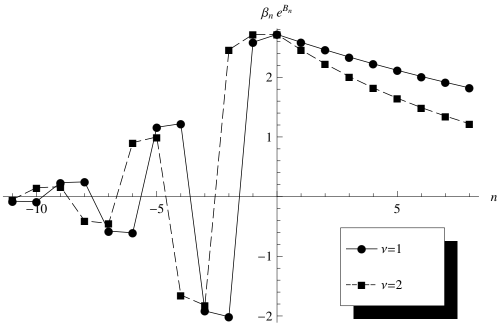

図 3: 超離散 Bessel 関数 (2.3), (2.4), (2.5) のプロット ($Q = -0.05$)

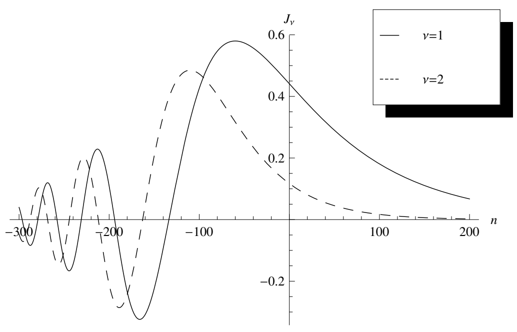

図 4: q-Bessel 関数 (1.3) の $m = 100$ までの近似和のプロット ($q = 0.99$)

2.2 $\nu = 0$ のときの解

(I) $n \ge 1$ のとき

初期条件として, 例えば $B_0^0 < B_1^0$ または $\beta_0^0 \ne \beta_1^0 \wedge B_0^0 = B_1^0$ または $\beta_0^0 = \beta_1^0 \wedge B_0^0 = B_1^0$ と取り, 不定

型の発展において $\beta_n^0 = \beta_{n-1}^0 \wedge B_n^0 = B_{n-1}^0 \quad (n = 2, 3, \cdots)$ を選ぶと解は

$$\mathscr{B}_n^0 = \left(\beta_1^0, B_1^0\right) \quad (n \geq 1) \tag{2.8}$$

となる．不定型の発展において他の条件を選ぶ, もしくは他の初期条件を取っても, 振幅は $B_n^0 \leq \max[B_0^0, B_1^0]$ となる．したがってこれらの解は, $n \to +\infty$ のとき振幅が $\exp B_n^0 \to$ 定数となるため, 連続系での 0 次の Bessel 関数のような振る舞いを示す．ここで問題となるのが, $n \to +\infty$ のとき振幅が $\exp B_n^0 \to \infty$, つまり Neumann 関数のような振る舞いをする解が得られないということである．その理由は以下のように説明することができる．0 次の q-Neumann 級数解 [4]

$$N_0(x) = cJ_0(qx)\log x - c\sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{2q^2}{[2]} + \frac{2q^4}{[4]} + \cdots + \frac{2q^{2m}}{[2m]}\right\}\frac{x^{2m}}{[2]^2[4]^2\cdots[2m]^2} \tag{2.9}$$

を見ると, 特異性が表れるのは log の部分のみということが分かる．しかし, 超離散系においてはベキが強調されるため, この log 特異性が消えてしまい, 0 次の Neumann 関数に相当する解が得られないと考えられる．

(II) $n \leq 1$ のとき

初期条件として, 例えば $\beta_0^0 = \beta_1^0 \wedge B_0^0 = B_1^0$ と取り，不定型の発展において $\beta_n^0 = \beta_{n-1}^0 \wedge B_n^0 = B_{n-1}^0 \quad (n = -1, -3, \cdots)$ を選ぶと解は

$$\begin{aligned}
\beta_n^0 &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\beta_0^0 & (n \leq -1 : \mathrm{odd}) \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\beta_0^0 & (n \leq -1 : \mathrm{even}) \end{cases} \\
B_n^0 &= \begin{cases} B_0^0 + \frac{n(n-2)-1}{2}Q & (n \leq -1 : \mathrm{odd}) \\ B_0^0 + \frac{n(n-2)}{2}Q & (n \leq -1 : \mathrm{even}) \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

と書ける．この解も $n \to -\infty$ で周期 4 の減衰振動をする．その他の初期条件を取っても同様の構造をした解が得られる．$\nu = 0$ の超離散 Bessel 関数 $(\beta_0^0 = \beta_1^0 \wedge B_0^0 = B_1^0)$ の振る舞いを図 5 に示す．なお, 図 6 は対応する q-Bessel 関数 (1.3) のグラフである．

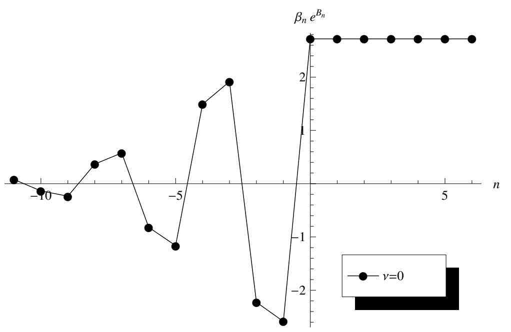

図 5: 超離散 Bessel 関数 (2.8), (2.10) のプロット $(Q = -0.05)$

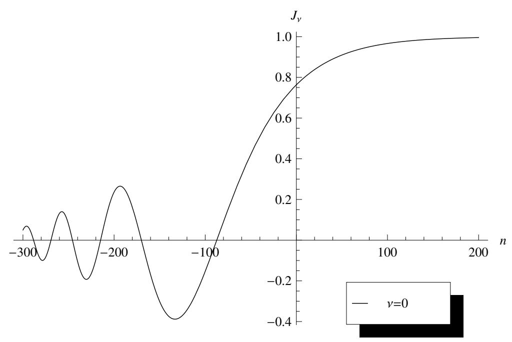

図 6: q-Bessel 関数 (1.3) の $m = 100$ までの近似和のプロット $(q = 0.99)$

3　結論

本稿で構成した $\nu \in Z_{>0}$ の超離散 Bessel 関数は, $n \geq 1$ つまり連続系での原点近傍で, 超離散 Bessel 方程式にある特定の初期条件を与え, その後, 不定となる条件を取り続けるという非常に特殊な条

件下でのみ得られるということを強調しておく. $n \leq 1$ においては $n \geq 1$ で定めた初期条件から得られた解を超離散 Bessel 関数とした. その他の解はすべて Neumann 関数に相当する解となる. 以下, 一般の $\nu(\in Z_{>0})$ 次の超離散 Bessel 関数をまとめて表示する.

$$\beta_n^\nu = \begin{cases} \beta_0^\nu & (n \geq -\nu) \\ (-1)^{\frac{n+\nu}{2}}\beta_0^\nu & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \text{even}) \\ (-1)^{\frac{n+\nu-1}{2}}\beta_0^\nu & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \text{odd}) \end{cases}$$

$$B_n^\nu = \begin{cases} B_0^\nu + n\nu Q & (n \geq 1) \\ B_0^\nu + n(n+\nu-1)Q & (-1 \geq n \geq -\nu) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-2)-\nu^2}{2}Q & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \text{even}) \\ B_0^\nu + \frac{n(n-4)-(\nu+3)(\nu-1)}{2}Q & (n \leq -\nu-1,\ n+\nu : \text{odd}) \end{cases}$$

こうして構成された超離散 Bessel 関数は図 3 と図 4, 図 5 と図 6 をそれぞれ比較すると, 元の q 差分系 (ひいては連続系) での解の定性的特徴をよく捉えていると言える.

今後の課題として, 本稿で得られた超離散 Bessel 関数と q-Bessel 関数 (1.3) を超離散化して得られる解との対応を議論したい. また, 先行研究で Painlevé II 方程式の超離散化がなされている [5][6]. Painlevé III 方程式については Bessel 関数で表わされる特殊解を持つことが知られている. そこで, Painlevé III 方程式に対して符号付き超離散化を施し, その特殊解を構成したい.

参考文献

[1] N.Mimura, S.Isojima, M.Murata and J.Satsuma: “Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables”, J.Phys.A:Math.Theor. **42** (2009), 315206(7pp).

[2] K.Kajiwara, Y.Ohta and J.Satsuma: “Casorati determinant solutions for the discrete Painlevé III equation”, J.Math.Phys. **36** (1995), 4162.

[3] K.Kajiwara and J.Satsuma: “q-Difference Version of the Two-Dimensional Toda Lattice Equation”, J.Phys.Soc.Jpn. **60** (1991), 3986.

[4] F.H.Jackson: “On q-Functions and a certain Difference Operator”, Trans.Roy.Soc.Edin. **46** (1908), 253.

[5] S.Isojima, T.Konno, N.Mimura, M.Murata and J.Satsuma: “Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution”, J.Phys.A:Math.Theor. **44** (2011), 175201(10pp).

[6] S.Isojima and J.Satsuma: “A Class of Special Solutions for the Ultradiscrete Painlevé II Equation”, SIGMA **7** (2011), 074(9pages).