# Periodic phase soliton方程式のN-ソリトン解

広田, 良吾
早稲田大学名誉教授

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

長井, 秀友
早稲田大学基幹理工学部

https://doi.org/10.15017/23459

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (13), pp.90-95, 2012-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

**Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7**

***Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
*Kyushu University Global COE Program*
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

**Article No. 13** (pp. 90 - 95)

# Periodic phase soliton 方程式の N-ソリトン解

**広田　良吾（HIROTA Ryogo），太田　泰広（OHTA Yasuhiro），長井　秀友（NAGAI Hidetomo）**

（Received 12 January 2012; accepted 8 February 2012）

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2012**

# Periodic phase soliton 方程式のN-ソリトン解

早稲田大学名誉教授　広田良吾 (HIROTA Ryogo)
神戸大学大学院理学研究科　太田泰広 (OHTA Yasuhiro)
早稲田大学基幹理工学部　長井秀友 (NAGAI Hidetomo)

**概要**

新しい双線形差分方程式

$$f_n^{m+1}f_{n+1}^m - f_{n+1}^{m+1}f_n^m = \delta(f_{n+M+1}^{m+1}f_{n-M}^m - f_{n+M}^{m+1}f_{n-M+1}^m) \tag{1}$$

を導入する。この式で　$m$ と $n$ は離散時間と空間であり、$M$ は自然数で $\delta$ は差分間隔を表している。式 (1) は新しいゲージ変換

$$f_n^m \to f_n^m \exp(\phi(n))$$

によって不変である。ここで $\phi(n)$ は周期 $M$ の周期関数 $\phi(n+M) = \phi(n)$ である。
式 (1) には位相が周期的に変化するソリトン (Periodic phase soliton) が存在する。N-periodic phase soliton 解が求められた。

## 1　Periodic phase soliton の発見

Periodic phase soliton は Sawada-Kotera 方程式

$$D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f = 0 \tag{2}$$

の超離散化を研究する過程で発見された。Sawada-Kotera 方程式を超離散化すると、超離散 hungry Lotka-Volterra 方程式に帰着する。この方程式の初期値問題を数値的に調べているとき、形を変えながら進むソリトン (その当時 Wiggler と呼んでいた) があることを発見した [1]。
その後 Wiggler は周期的に位相が変化するソリトンであることが判明した [2], [3]。

# 2　双線形方程式のゲージ変換

双線形方程式は次式で表される指数型のゲージ変換に対して不変であることが良く知られている（$c_0, c_1, c_2, c_3$ は定数)。

$$f \to f\exp(c_0 + c_1 l + c_2 m + c_3 n)$$

この論文の著者の一人, 広田は次の双線形差分方程式

$$f_{n+1}^m f_n^{m+1} = f_n^m f_{n+1}^{m+1} + \delta(f_{n-M}^m f_{n+M+1}^{m+1} - f_{n-M+1}^m f_{n+M}^{m+1}) \tag{3}$$

は新しいゲージ変換

$$f_n^m \to f_n^m \phi(n)$$

によって不変であり、次の形に表現される１-ソリトン（Periodic phase soliton) 解を持つことを発見した。

$$f_n^m = 1 + s_i(m,n)\phi_i(n), \quad s_i(m,n) = \omega_i^m p_i^{n-n_i}, \quad \omega_i = (1+\delta/p_i^M)/(1+\delta p_i^M) \tag{4}$$

この式で $p_i$, $n_i$ は定数で, $\phi_i(n)$ は $n$ の周期関数すなわち、$\phi_i(n+M) = \phi_i(n)$ である。
この双線形差分方程式の Periodic phase soliton(PPS) は 3-PPS 解まで摂動計算によって求められている。ただし解の形は N-PPS 解を推定できるほど簡単ではない [4]。

# 3　PPS 方程式の N-PPS 解

PPS 方程式の N-PPS 解は次の手順によって生成される。

1. 双線形方程式 (3) は独立変数が２個の２次元双線形方程式であるが、これを独立変数３個 $k, l, m$ の３次元双線形方程式 (discrete DKP 方程式) に拡張する。Discrete DKP 方程式の解は Pfaffian によって自然に表現される。Periodic phase は新しく付加した独立変数 $m$ の周期関数 (周期 $M$) として、$\phi_i(m)$, $i = 1, 2, \cdots$ で表現される。

2. 独立変数 $k, l, m$ を *reduction* によって元の 2 変数に戻す。

## 3.1　Discrete DKP 方程式とは

三輪による Discrete BKP 方程式 は次の形をしている [5]。

$$\begin{aligned}
&(a+b)(a+c)(b-c)\tau(k+1,l,m)\tau(k,l+1,m+1)\\
&+(b+c)(b+a)(c-a)\tau(k,l+1,m)\tau(k+1,l,m+1)\\
&+(c+a)(c+b)(a-b)\tau(k,l,m+1)\tau(k+1,l+1,m)\\
&+(a-b)(b-c)(c-a)\tau(k+1,l+1,m+1)\tau(k,l,m) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

Discrete DKP 方程式は三輪の Discrete BKP 方程式と全く同じ形をしている。ただし係数が特別である。

$$
\begin{aligned}
&\tau(k+1,l,m)\tau(k,l+1,m+1)-\tau(k,l+1,m)\tau(k+1,l,m+1)\\
&-\delta\tau(k,l,m+1)\tau(k+1,l+1,m)+\delta\tau(k+1,l+1,m+1)\tau(k,l,m)=0
\end{aligned}
$$

Discrete DKP 方程式の $N-$ ソリトン解を $N$ 次の Pfaffian を使って

$$
\tau(k,l,m)=(1,2,\cdots,2N)
$$

と表す。この Pfaffian の成分 $(i,j)$ は $k,l,m$ の関数であり、$(i,j)_{k,l,m}$ と表記する。さらに $k,l$ の関数 $\varphi(k,l)$ と $m$ だけの関数 $\psi(m)$ を導入する。

$(i,j)$ と $\varphi_i$ は以下の差分則を満たすとする。

$$
\begin{aligned}
&(i,j)_{k+1,l,m}-(i,j)_{k,l,m}\\
&=(\varphi_i(k+1,l)+\psi_i(m))(\varphi_j(k,l)+\psi_j(m))-(\varphi_i(k,l)+\psi_i(m))(\varphi_j(k+1,l)+\psi_j(m)),\\
&(i,j)_{k,l+1,m}-(i,j)_{k,l,m}\\
&=(\varphi_i(k,l+1)+\psi_i(m))(\varphi_j(k,l)+\psi_j(m))-(\varphi_i(k,l)+\psi_i(m))(\varphi_j(k,l+1)+\psi_j(m)),\\
&(i,j)_{k,l,m+1}-(i,j)_{k,l,m}\\
&=(\varphi_i(k,l)+\psi_i(m))(\varphi_j(k,l)+\psi_j(m+1))-(\varphi_i(k,l)+\psi_i(m+1))(\varphi_j(k,l)+\psi_j(m)),\\
&\delta(\varphi_i(k+1,l+1)-\varphi_i(k,l))=\varphi_i(k+1,l)-\varphi_i(k,l+1)
\end{aligned}
$$

このとき

$$
\tau(k,l,m)=(1,2,\cdots,2N)_{k,l,m}
$$

は、 以下の差分則を満たす.

$$
\begin{aligned}
\tau(k+1,l,m)&=(d_{000},d_{100},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k,l+1,m)&=(d_{000},d_{010},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k,l,m+1)&=(d_{001},d_{000},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k+1,l+1,m)&=\frac{1}{\delta}(d_{010},d_{100},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k+1,l,m+1)&=(d_{001},d_{100},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k,l+1,m+1)&=(d_{001},d_{010},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m},\\
\tau(k+1,l+1,m+1)&=\frac{1}{\delta}(d_{001},d_{000},d_{010},d_{100},1,2,\cdots,2N)_{k,l,m}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
&(d_{\kappa\lambda\mu}, i)_{k,l,m} = \varphi_i(k+\kappa, l+\lambda) + \psi(m+\mu),\\
&(d_{000}, d_{100})_{k,l,m} = (d_{000}, d_{010})_{k,l,m} = (d_{001}, d_{000})_{k,l,m}\\
&= (d_{001}, d_{100})_{k,l,m} = (d_{001}, d_{010})_{k,l,m} = 1,\\
&(d_{010}, d_{100})_{k,l,m} = \delta
\end{aligned}
$$

この $\tau(k,l,m)$ は Pfaffian の恒等式によって Discrete DKP 方程式

$$
\begin{aligned}
&\tau(k+1,l,m)\tau(k,l+1,m+1) - \tau(k,l+1,m)\tau(k+1,l,m+1)\\
&-\delta[\tau(k,l,m+1)\tau(k+1,l+1,m) - \tau(k+1,l+1,m+1)\tau(k,l,m)] = 0
\end{aligned}
$$

を満たす。

## 3.2 Reduction

以下のように, $\varphi_i$ の方は通常の soliton と同じようにとり, $\psi_i$ の方に periodic phase をいれておいて, Reduction をする。

$$
\varphi_i(k,l) = \begin{cases} P_i^k(\frac{P_i+\delta}{1+\delta P_i})^l \alpha_i, & \text{for } 1 \le i \le N \\ 0, & \text{for } N+1 \le i \le 2N \end{cases}
$$

$$
\psi_i(m) = \begin{cases} 0, & \text{for } 1 \le i \le N \\ p_i^m \phi_i(m), & \text{for } N+1 \le i \le 2N \end{cases}
$$

$$
(i,j)_{k,l,m} = \begin{cases} \frac{P_i-P_j}{P_iP_j-1}\varphi_i(k,l)\varphi_j(k,l), & \text{for } 1 \le i < j \le N \\ \delta_{j,2N+1-i} + \varphi_i(k,l)\psi_j(m), & \text{for } 1 \le i \le N, , N+1 \le j \le 2N \\ \frac{-1}{p_i^M p_j^M - 1}\sum_{\mu=1}^{M}(\psi_i(m+\mu)\psi_j(m+\mu-1) & \\ \qquad -\psi_i(m+\mu-1)\psi_j(m+\mu)), & \text{for } N+1 \le i < j \le 2N \end{cases}
$$

ここで, $P_i$, $\alpha_i$, $p_i$ は定数, $\phi_i(m)$ は periodic phase を表す周期 $M$ の周期函数, $\phi_i(m+M) = \phi_i(m)$ である。
ここで新しい parameters,$P_i = p_{2N+1-i}^M$ を導入し, Reduction

$$
\tau(k+1,l,m) = \tau(k,l,m+M)
$$

を行う。すなわち $k$ の変化 $k \to k+1$ は $m$ の変化 $m \to m+M$ に吸収できるので、 Discrete DKP 方程式

$$
\begin{aligned}
&\tau(k+1,l,m)\tau(k,l+1,m+1) - \tau(k,l+1,m)\tau(k+1,l,m+1)\\
&-\delta[\tau(k,l,m+1)\tau(k+1,l+1,m) - \tau(k+1,l+1,m+1)\tau(k,l,m)] = 0
\end{aligned}
$$

は ($k$ を無視して)

$$\tau(l,m+M)\tau(l+1,m+1)-\tau(l+1,m)\tau(l,m+M+1)$$
$$-\delta[\tau(l+1,m+M)\tau(l,m+1)-\tau(l+1,m+M+1)\tau(l,m)]=0$$

と書き換えられる。
この式は $l,m$ を shift して $l-\frac{1}{2}$, $m-\frac{1}{2}(M+1)$ とすると、$D-$operator を使って

$$\{\exp[-\frac{1}{2}D_l+\frac{1}{2}(M-1)D_m]-\exp[\frac{1}{2}D_l-\frac{1}{2}(M+1)D_m]$$
$$-\delta[\exp[\frac{1}{2}D_l+\frac{1}{2}(M-1)D_m]-\exp[\frac{1}{2}D_l+\frac{1}{2}(M+1)D_m]]\}\tau\cdot\tau=0$$

と表現される。ここで座標変換、$D_l-MD_m=D_x,\quad D_m=D_y$ を行うと

$$\{\exp[-\frac{1}{2}(D_x+D_y)]-\exp[\frac{1}{2}(D_x-D_y)]$$
$$-\delta[\exp[\frac{1}{2}D_x+(M-\frac{1}{2})D_y]-\exp[\frac{1}{2}D_x+(M+\frac{1}{2})D_y]\}\tau\cdot\tau=0$$

が得られる。
この式は読み替え $x\to m,\quad y\to n$ によって PPS を記述する方程式 (3)

$$f_n^{m+1}f_{n+1}^m-f_{n+1}^{m+1}f_n^m=\delta(f_{n+M+1}^{m+1}f_{n-M}^m-f_{n+M}^{m+1}f_{n-M+1}^m)$$

に変換される。

# 4 N-PPS 解の明示的な表示

前節で Discrete DKP 方程式の Pfaffian 解

$$\tau(k,l,m)=(1,2,\cdots,2N)$$

は Reduction と座標変換を使って、PPS 方程式 (3) の解になることを示したが、ここでは方程式 (3) の N-PPS 解の明示的な表示を与える。

$$f_n^m=(a_1,a_2,\cdots,a_N,b_N,\cdots,b_2,b_1) \tag{6}$$

Pfaffian の成分は次式で与えられる。

$$(a_i,a_j)=a_{ij}s_i(m,n)s_j(m,n), \tag{7}$$
$$(a_i,b_j)=\delta_{i,j}+s_i(m,n)\phi_j(n), \tag{8}$$
$$(b_i,b_j)=b_{ij}\phi_{ij}(n) \tag{9}$$

ここで

$$a_{ij}=(p_i^M-p_j^M)/((p_ip_j)^M-1),\quad b_{ij}=1/((p_ip_j)^M-1), \tag{10}$$

$$\phi_{ij}(n)=\sum_{\mu=1}^{M}[-p_i^\mu\phi_i(n+\mu)p_j^{\mu-1}\phi_j(n+\mu-1)$$
$$+p_j^\mu\phi_j(n+\mu)p_i^{\mu-1}\phi_i(n+\mu-1)],(i,j=1,2,\cdots,N) \tag{11}$$

1-periodic soliton (PPS) 解は式 (4) と同じで

$$f_n^m = (a_1, b_1) = 1 + s_1(m,n)\phi(n) \tag{12}$$

となる。
2-PPS 解は次式で表される。

$$\begin{aligned} &f_n^m = (a_1, a_2, b_2, b_1) \\ &= 1 + s_1(m,n)\phi_1(n) + s_2(m,n)\phi_2(n) + a_{12}s_1(m,n)s_2(m,n)b_{21}\phi_{21}(n) \end{aligned} \tag{13}$$

この式で注目すべきは 2 個の PPS の衝突を表現している関数 $\phi_{21}(n)$ は 2 個の $p_i(i = 1, 2)$ と $2M$ 個の $\phi_i(n)$ $(i = 1, 2;\ n = 1, 2, \cdots, M)$ で表されていることである。すなわち 2 個の PPS の衝突に $2M$ 個の phase constants が関与している。
3-PPS 解は次式で表される。

$$\begin{aligned} &f_n^m = (a_1, a_2, a_3, b_3, b_2, b_1) \\ &= 1 + s_1(m,n)\phi_1(n) + s_2(m,n)\phi_2(n) + s_3(m,n)\phi_3(n) \\ &+a_{12}s_1(m,n)s_2(m,n)b_{21}\phi_{21}(n) + a_{13}s_1(m,n)s_3(m,n)b_{31}\phi_{31}(n) + a_{23}s_2(m,n)s_3(m,n)b_{32}\phi_{32}(n) \\ &+a_{12}a_{13}a_{23}s_1(m,n)s_2(m,n)s_3(m,n)(\ b_{32}\phi_1(n)\phi_{32}(n) - b_{31}\phi_2(n)\phi_{31}(n) + b_{21}\phi_3(n)\phi_{21}(n)\ ) \end{aligned} \tag{14}$$

通常のソリトンでは 3 体の phase shift $c_{123}$ は 2 体の phase shifts の積 $(c_{123} = c_{12}c_{13}c_{23})$ として表現できるが、PPS ではこの関係は成立しない。

# References


[1] 広田良吾「Sawada-Kotera 方程式の超離散化」研究集会報告 20ME-S7 **『非線形波動の数理と物理』**九大応力研 2009 年 p-76.

[2] 中村伸也、広田良吾「衝突によって形を変える超離散ソリトン」研究集会報告 21ME-S7 **『非線形波動の現状と将来 - 次の 10 年への展望』**九大応力研 2010 年 p-69.

[3] Sinya Nakamura,“A periodic phase soliton of the ultradiscrete hungry Lotka-Volterra equation ”, J.Phys.A: Math.Theor.**42**(2009)495204(10pp).

[4] 広田良吾,“New Aspects of the Bilinear Equations”, 数理解析研講究録 **1700**『可積分系数理とその応用』2010 年 pp.146-166.

[5] Miwa T.“On Hirota’s difference equations”, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. **58** (1982) 9-12.