

Spiralな境界条件を持つ離散KdV方程式と有限体上への拡張

神吉, 雅崇
東京大学大学院数理科学研究科

時弘, 哲治
東京大学大学院数理科学研究科

間田, 潤
日本大学生産工学部

<https://doi.org/10.15017/23454>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (8), pp.54-59, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 8 (pp. 54 - 59)

Spiralな境界条件を持つ離散KdV方程式と有限体上への拡張

神吉 雅崇 (KANKI Masataka), 時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji), 間田 潤 (MADA Jun)

(Received 5 December 2012; accepted 28 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

Spiral 境界条件を持つ離散 KdV 方程式と有限体上への拡張

東京大学大学院数理科学研究科 神吉雅崇 (KANKI Masataka)
東京大学大学院数理科学研究科 時弘哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)
日本大学生産工学部 間田潤 (MADA Jun)

概要 離散 KdV 方程式およびその拡張である離散格子力学系を扱い, (i) 時間発展の保存量を構成し, Spiral と呼ばれる境界条件下で保存量が超離散化可能であることを示すとともに, (ii) 離散 KdV 方程式を有限体上で適切に定義するための手法を提案し, 有限体上のソリトン解の周期性および具体的な挙動について紹介する.

1 導入

本研究は離散 KdV 方程式の従来にない拡張を考察する目的で行われた. 今日までに次の 2 つの結果を得たので紹介する.

- Yang-Baxter 写像を合成して構成できる正方格子上の離散力学系を考察した. これは離散 KdV 方程式の一般化に当たるため, YB 離散 KdV 方程式と呼ぶことにする. YB 離散 KdV 方程式においては周期境界条件よりも Spiral 境界条件がより自然に現れる. この条件下で Lax 形式を用いて, 超離散化可能な保存量が構成できた.
- 離散 KdV 方程式の有限体上での時間発展について考察した. 有限体上で双線形形式を扱う研究はすでにある [1, 2] が, ここでは非線形方程式を有限体上で扱った. 具体的には Spectral parameters を不定元と見る手法により 0 除算の問題などの困難を解決し, ソリトン解の数値計算例を構成した.

2 Yang-Baxter 離散 KdV 方程式の保存量

2.1 離散 KdV 方程式と YB 離散 KdV 方程式

Definition 2.1

離散 KdV 方程式は次の離散方程式である ($\delta \in \mathbb{R}$ はパラメータ, $t, n \in \mathbb{Z}$):

$$\frac{1}{x_{n+1}^{t+1}} - \frac{1}{x_n^t} + \frac{\delta}{1+\delta}(x_n^{t+1} - x_{n+1}^t) = 0. \quad (2.1)$$

$\frac{1}{y_n^t} := (1+\delta)\frac{1}{x_n^{t+1}} - \delta x_n^t$ により補助変数 y_n^t を導入することで (2.1) より次の連立形式を得る:

$$\begin{cases} x_n^{t+1} &= \frac{(1+\delta)y_n^t}{1+\delta x_n^t y_n^t}, \\ y_{n+1}^t &= \frac{1}{1+\delta} \{x_n^t (1+\delta x_n^t y_n^t)\}. \end{cases} \quad (2.2)$$

連立形式 (2.2) は離散 KdV 方程式と同値である. この系の超離散極限は箱玉系であることが知られている.

Definition 2.2

YB 離散 KdV 方程式は次の偏差分連立方程式である. ここで $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ はパラメータ.

$$\begin{cases} x_n^{t+1} &= y_n^t \frac{\beta + \alpha x_n^t y_n^t}{\alpha + \beta x_n^t y_n^t}, \\ y_{n+1}^t &= x_n^t \frac{\alpha + \beta x_n^t y_n^t}{\beta + \alpha x_n^t y_n^t}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Lemma 2.1

次のスケール変換と極限操作で YB 離散 KdV 方程式 (2.3) は連立形式 (2.2) に帰着する.

- スケール変換 : $\sqrt{1 + \alpha^2}x \rightarrow x, \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1 + \alpha^2}}y \rightarrow y.$
- 極限 : $\beta \rightarrow +\infty.$

従って YB 離散 KdV 方程式は離散 KdV 方程式の拡張である. また (2.3) は広田・三輪方程式の reduction から得られること [3], (2.3) の超離散極限は運搬車付き箱玉系 (箱玉系を拡張したセルオートマトン) であること [4] など性質の良い格子系である.

Definition 2.3

YB 離散 KdV 方程式の Lax 形式は 2×2 行列

$$A_\zeta(z; \alpha) := \begin{pmatrix} z & \alpha\zeta \\ \alpha & z^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

に対する

$$A_\zeta(x_n^{t+1}; \alpha)A_\zeta(y_{n+1}^t; \beta) = A_\zeta(y_n^t; \beta)A_\zeta(x_n^t; \alpha) \quad (2.5)$$

なる束縛条件のことである [5]. ここで $\zeta \in \mathbb{R}$ はパラメータ.

等式 (2.5) は YB 離散 KdV 方程式 (2.3) と同値であることが初等的計算でわかる.

2.2 Spiral 境界条件での保存量の構成

Definition 2.4

(2.3) のように, (x_n^t, y_n^t) から (x_n^{t+1}, y_{n+1}^t) が定まる 2 変数力学系において, 系のサイズが N であるとき, $y_1^{t+1} := y_{N+1}^t$ ($t = 1, 2, \dots$) とする条件を *Spiral* 境界条件という (図 1 参照).

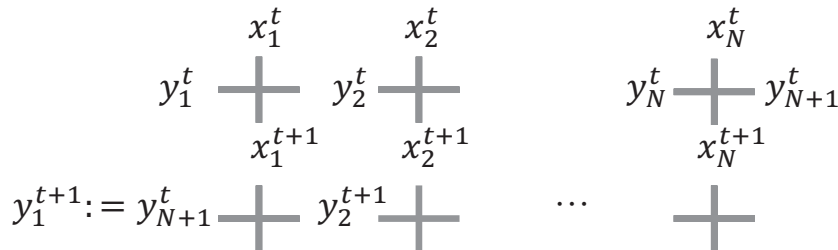


図 1: Spiral 境界条件を課した系の時間発展図

Remark 2.1

YB 離散 KdV 方程式で *Spiral* 系ではなく周期系 ($y_1^t := y_{N+1}^t$) を扱うとき, 固定された x_1^t, \dots, x_N^t に対して $y_1^t = y_{N+1}^t$ を満たす y_1^t は一般に 2 通り存在する. これらがともに自明でない時間発展を与えるため, 周期系を自然な形で一意に発展させることができない. 一方 *Spiral* 系は有限サイズの系の発展として自然な形で一意の発展を定めることができる.

Proposition 2.1

行列 M^t を以下のように定める.

$$M^t := A_\zeta(y_1^t; \beta) A_\zeta(x_1^t; \alpha_1) \cdots A_\zeta(x_N^t; \alpha_N)$$

このとき $\det(\lambda I - M^t)$ は時刻 t に依存しない. ここで I は単位行列, $\lambda \in \mathbb{C}$ はパラメータ.

Proof 式 (2.5) を繰り返し用いることで $M^t = A_\zeta(x_1^{t+1}; \alpha_1) \cdots A_\zeta(x_N^{t+1}; \alpha_N) A_\zeta(y_{N+1}^t; \beta)$ が分かる. *Spiral* 条件 $y_{N+1}^t = y_1^{t+1}$ と $M^{t+1} = A_\zeta(y_1^{t+1}; \beta) A_\zeta(x_1^{t+1}; \alpha_1) \cdots A_\zeta(x_N^{t+1}; \alpha_N)$ により $\det(\lambda I - M^{t+1}) = \det(\lambda I - M^t)$ である. よって示された. \square

以降 M の添字を省略する. 行列 M はサイズ 2 なので $\det(\lambda I - M) = \lambda^2 - \text{Tr}(M)\lambda + \det(M)$. ところで $\det(M) = (1 - \alpha_1^2 \zeta) \cdots (1 - \alpha_N^2 \zeta) (1 - \beta^2 \zeta)$ なので $\det(M)$ からは自明な保存量しか得られない. 意味のある保存量は $\text{Tr}(M)$ から得られる. これら保存量の計算結果の概略と例を示す. 以下簡単のため $\alpha_i = \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, N$) と仮定する. このときスケール変換により $\alpha = 1$ としてよい. このとき行列 M は

$$M = A_\zeta(y; \beta) \cdot M_N, \quad M_N := A_\zeta(x_1; 1) \cdots A_\zeta(x_N; 1)$$

と書ける. 行列 M_N の成分について以下の結果を得た.

Proposition 2.2

行列 M_N の (1,1) 成分は次である.

$$M_N|_{(1,1)} = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \left(\sum_{i=1}^{N C_{2k}} d_{i,1}^{(k)} d_{i,2}^{(k)} \cdots d_{i,N}^{(k)} \right) \zeta^k \quad (2.6)$$

ここで $(d_{i,1}^{(k)}, d_{i,2}^{(k)}, \dots, d_{i,N}^{(k)}) \in \{0, \pm 1\}^N$ である. $d_{i,j}^{(k)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) のうち 0 である $d_{i,j}^{(k)}$ は $2k$ 個であり, i での和は長さ N の数列の中で $2k$ 個の 0 を配置する総数 $N C_{2k}$ をとる. また $|d_{i,j}^{(k)}| = 1$ となる j を $1 \leq j_1 < \dots < j_{N-2k} \leq N$ とおくと, $d_{i,j_m}^{(k)} = (-1)^{j_m-1}$. ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す.

初等的計算により示されるので, 証明は省略する. 行列 M_N の (1,1) 以外の成分も同様の和で書けるので, 行列 M の成分は ζ の多項式として求められる.

Proposition 2.3

一般の $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ に関して $\text{Tr}(M)$ は ζ の $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor$ 次式となる.

従ってシステムサイズ N に対して保存量は $\lfloor \frac{N+1}{2} \rfloor + 1$ 個得られる.

Example 2.1

$N = 2$ のとき

$$\text{Tr}(M) = \left(x_1 x_2 y + \frac{1}{x_1 x_2 y} \right) + \left\{ \alpha_1 \beta \left(x_2 + \frac{1}{x_2} \right) + \alpha_2 \beta \left(x_1 + \frac{1}{x_1} \right) + \alpha_1 \alpha_2 \left(y + \frac{1}{y} \right) \right\} \zeta.$$

これは ζ の 1 次式であり定数項 $c_0 := x_1 x_2 y + (x_2 x_2 y)^{-1}$ と ζ^1 の項 $c_1 := \{\alpha_1 \beta (x_2 + x_2^{-1}) + \dots\}$ がそれぞれ保存量である。ここで $y = y^t, x_1 = x_1^t, x_2 = x_2^t$ は時刻 t に依存する量であるが, c_0, c_1 の値は t に依存しないので y^t, x_1^t, x_2^t の添字 t を省略する。これらの保存量は全て正符号で足されているので超離散化が可能である。実際, $\exp(-X_i/\varepsilon) = x_i, \exp(-Y/\varepsilon) = y, \exp(-A_i/\varepsilon) = \alpha_i, \exp(-B/\varepsilon) = \beta$ ($i = 1, 2$) と置き, 超離散極限をとると,

$$\begin{aligned} c_0 &\rightarrow -|Y + X_1 + X_2|, \\ c_1 &\rightarrow \min[A_1 + B - |X_2|, A_2 + B - |X_1|, A_1 + A_2 - |Y|], \end{aligned}$$

なる超離散化された 2 個の保存量を得る。運搬車付き箱玉系の保存量と対応している。

3 有限体上の離散 KdV 方程式

以降は開放系 (系のサイズは無有限大で $\lim_{n \pm \infty} x_n^t = 0$) において離散 KdV 方程式 (2.1) およびその拡張 (2.3) を扱う。双線形形式 $(1 + \delta)\sigma_{n+1}^{t+1}\sigma_n^{t-1} = \delta\sigma_{n+1}^{t-1}\sigma_n^{t+1} + \sigma_n^t\sigma_{n+1}^t$ を有限体上で扱う研究は [1, 2] によりなされている。本論文では (2.1) のような非線形方程式系を有限体上で扱うことを試みる。ここで $x_n^t, \sigma \in \mathbb{F}_q$ ($q = p^m$, p は素数) とする。問題点は $x_n^t = 0$ なる点以降の時間発展が定まらないことである。解決法としては $x_n^t \in \mathbb{P}\mathbb{F}_q = \{0, 1, \dots, q-1, \infty\}$ で扱い無限大を含めて定義をすることであるが, 次の 2 つの問題点が残る。一つ目は $0 \cdot \infty, 0/0, \infty + \infty$ 等が適切に決定できないこと。二つ目は ∞ を含めて Yang-Baxter 関係式が成り立たないことである。そこで次の解決法を提案する。

3.1 0 除算等の解消法

次の 2 ステップで YB 離散 KdV 方程式 (2.3) の発展を行う。離散 KdV 方程式についても同様である。具体的に体 \mathbb{F}_q 上の YB 離散 KdV 方程式の発展例を図 2 に挙げた。 ∞ が生じた後も時間発展が進行する様子が見られる。

- スペクトルパラメータ α, β を不定元として残したまま必要な時間まで発展させる。このとき x_n^t, y_n^t は有理関数体 $\mathbb{F}_q(\alpha, \beta)$ の元として定まる。(図 2 の左を参照)
- 上で求めた \mathbb{F}_q 上の時間発展結果に具体的な α, β の値を代入し $x_n^t, y_n^t \in \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ を定める。 x_n^t の分母が 0 になるとき $x_n^t = \infty$ と定める。

注意 2 個以上のパラメータに数値を代入する際に, 代入の順序によって結果が異なることがあり, より慎重な扱いを要する。本稿で扱う YB 離散 KdV 方程式は同次式なのでこの問題は生じない。

3.2 ソリトン解

有限体上のソリトン解の様子を調べる。簡単のため離散 KdV 方程式 (2.1) のソリトン解を観察する。

Lemma 3.1

離散 KdV 方程式の M -ソリトン解は

$$\sigma_n^t = \det_{1 \leq i, j \leq M} \left(\delta_{ij} + \frac{\gamma_i}{l_i + l_j - 1} \left(\frac{1 - l_i}{l_i} \right)^t \left(\frac{l_i + \delta}{1 + \delta - l_i} \right)^n \right). \quad (3.1)$$

ここで $x_n^t = \frac{\sigma_n^t \sigma_{n+1}^{t-1}}{\sigma_{n+1}^t \sigma_n^{t-1}}$ であり, 各 $l_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$ は定数, $\delta_{ij} \in \{0, 1\}$ はクロネッカーのデルタである。

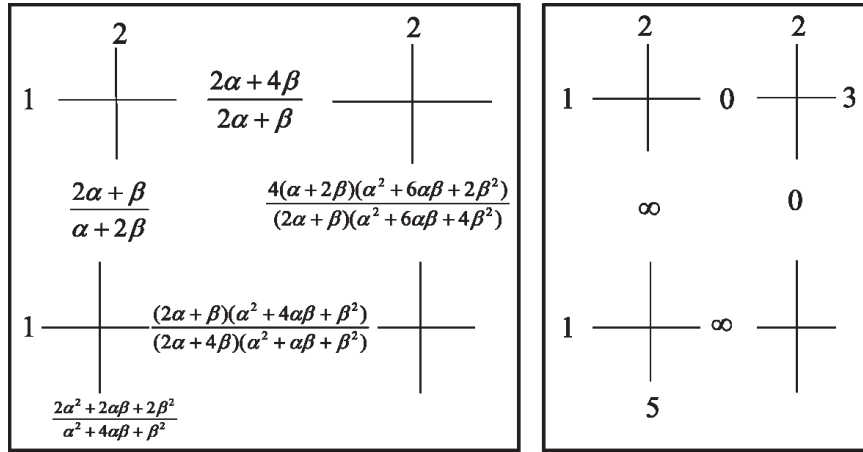


図 2: 有限体上の YB 離散 KdV 方程式 (左: $\mathbb{F}_7(\alpha, \beta)$ の元として発展, 右: $\alpha = 3, \beta = 2$ を代入)

以下では $x_n^t \in \mathbb{F}_p(\delta)$ の範囲でソリトン解を数値計算し, 最後に δ の具体的な値を代入した結果を紹介する.

Proposition 3.1

有限体 \mathbb{F}_q 上の離散 KdV 方程式のソリトン解は $q - 1$ 周期性を持つ.

Proof M -ソリトン解は (3.1) で与えられるので, $a := (1 - l_i)/l_i \in \mathbb{F}_q$ に対して $a^q = a$. 従って $\sigma_n^{t+q-1} = \sigma_n^t (\forall t, \forall n)$. また $\sigma_{n+q-1}^t = \sigma_n^t$ も同様にわかる. \square

Example 3.1

体 \mathbb{F}_{11} 上の 1-ソリトン解の例を挙げる. ソリトン解 (3.1) で $M = 1, l_1 = 9, \gamma_1 = 2, \delta = 7$ とした式を計算する. 下の数値計算結果表をみると $x_n^t = \infty$ となっても時刻 $t + 1$ での時間発展が正常に定まっている. 時刻 t について周期 5 であり, 空間 n について周期 10 である. (5, 10 は $p - 1 = 10$ の約数.) ソリトンの速度は周期性を考慮して $2 + 10k$ ($k \in \mathbb{Z}$) となり一意には定義できない.

x_n^t	$n=1$	2	10	11	...									
$t=1$	4	4	10	7	0	∞	∞	0	7	10	4	4	10	7	0	∞
2	7	10	4	4	10	7	0	∞	∞	0	7	10	4	4	10	7
3	∞	0	7	10	4	4	10	7	0	∞	∞	0	7	10	4	4
4	0	∞	∞	0	7	10	4	4	10	7
5	10	7	0	∞	∞	0	7	10	4	4
6	4	4	10	7	0	∞	∞	0	7	10

図 3 に上の 1-ソリトン解を描画した. ここで $0, 1, \dots, 10 \in \mathbb{F}_{11}$ および ∞ を, 大きい数ほど濃い灰色となるようなグレースケールで表示した.

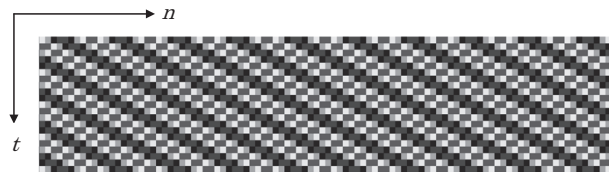


図 3: \mathbb{F}_{11} 上の 1-ソリトン解の例

Example 3.2

体 \mathbb{F}_{19} 上での 2-ソリトン解の例を紹介する. 式 (3.1) で $M = 2, \gamma_1 = 15, l_1 = 2, \gamma_2 = 9, l_2 = 4, \delta = 8$ としている. 数値は以下の表に示した. これをグラフ表示すると図 4 のようになり, やはり周期的パターンが観測される. ここでも前の図と同じくグレースケール表示である.

x_n^t	$n=1$	2	...
$t=1$	5	15	11 9 18 1 16 10 9 15 5 1 12 14 16
2	13	2	13 15 11 11 6 18 3 14 16 6 ∞ 0 16
3	17	14	11 14 4 17 8 12 2 7 5 17 0 ∞ 3
4	12	14	16 1 4 16 5 15 11 9 18 1 16 10 9
5	∞	0	16 18 6 6 13 2 13 15 11 11 6 18 3
6	0	∞	3 3 12 9 17 14 11 14 4 17 8 12 2

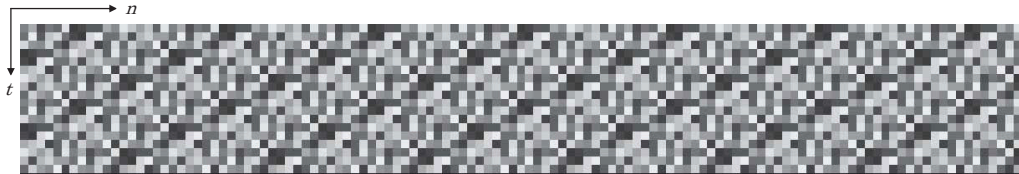


図 4: \mathbb{F}_{19} 上の 2-ソリトン解の例

4 総括と展望

本研究では離散 KdV 方程式の拡張について次の 2 つの結果を得た. 第一に, 離散 KdV 方程式の拡張である離散正方格子系について考察した. 自然に Spiral 境界条件が生じ, 超離散化可能な保存量が構成できた. 第二に, 離散 KdV 方程式の有限体上への拡張を行った. スペクトルパラメータを不定元として計算する手法により 0 除算の問題を解消した. ソリトン解の挙動を紹介し, 周期性を持つことを示した. 今後の課題として Spiral 離散 KdV 方程式の初期値問題の解決, 一般の非線形離散方程式系について有限体上で時間発展を定義すること等を行っていきたい. 複数パラメータを持つ系の代入の順序によらない適切な定義手法についても考察する予定である.

参考文献

- [1] M. Białecki, A. Doliwa: “The discrete KP and KdV equations over finite fields”, *Theor. Math. Phys.* **137** (2003), 1412-1418
- [2] M. Białecki, J. J. C. Nimmo: “On pattern structures of the N -soliton solution of the discrete KP equation over a finite field”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), 949-959
- [3] S. Kakei, J. J. C. Nimmo, R. Willox: “Yang-Baxter maps and the discrete KP hierarchy”, *Glasgow Math. J.* **51A** (2009), 107-119
- [4] D. Takahashi, J. Matsukidaira: “Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997), L733-L739
- [5] A. P. Veselov: “Yang-Baxter maps and integrable dynamics”, *Phys. Lett.* **A314** (2003), 214-221