

離散半線形波動方程式の解の爆発に関する定理

松家, 敬介
東京大学大学院数理科学研究科

<https://doi.org/10.15017/23453>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (7), pp.48-53, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7

「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 7 (pp. 48 - 53)

離散半線形波動方程式の解の爆発に関する定理

松家 敬介 (MATSUYA Keisuke)

(Received 21 December 2011; accepted 24 January 2012)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

離散半線形波動方程式の解の爆発に関する定理

東京大学大学院数理科学研究科 松家敬介 (MATSUYA Keisuke)

概要 非線形項が累乗関数の形をした非線形波動方程式の離散化を報告する。この離散方程式は元の偏微分方程式の解の爆発に対応した性質をもつ解が存在する。元の偏微分方程式が爆発解をもつ条件として空間次元に依存したものが知られており、その離散アナログが得られたこともあわせて報告する。

1 はじめに

以下の半線形波動方程式の初期値問題について考える。

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + |u|^p & (t > 0, \vec{x} := (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d) \\ u(0, \vec{x}) = f(\vec{x}) & (\vec{x} \in \mathbb{R}^d) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, \vec{x}) = g(\vec{x}) & (\vec{x} \in \mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (\text{SLW})$$

但し, $u := u(t, \vec{x})$, $p > 1$ であり, Δ は d 次元ラプラシアン: $\Delta = \sum_{k=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

(SLW) の初期値問題は初期値によって解の爆発が生じることがある。また, この偏微分方程式に含まれているパラメータ p は解の爆発を制御する役割も担っている。その結果の一例として, $p_1(d)$ という値が存在し, p が $p_1(d)$ 以下だとあるクラスの初期値に対して必ず解の爆発が生じるというものがある。この結果は [1] の一部によるもので, 本稿で紹介する定理はこの結果の離散アナログとなっている。

まず (SLW) の解の爆発を定義する。

定義 1

$u := u(t, \vec{x})$ ($t \geq 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^d$):(SLW) の解

$$\exists T > 0 \text{ s.t. } \limsup_{t \rightarrow T-0} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = \infty$$

とする。但し, $\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} := \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^d} |u(t, \vec{x})|$.

このとき, 解 u は時刻 T で爆発するという。

例 1 ((SLW) の爆発解の例)

$p = 2$, $f(\vec{x}) \equiv 0$, $g(\vec{x}) \equiv g > 0$ とすると $u(t, \vec{x}) \equiv u(t)$ となり,

$$(\text{SLW}) \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = u^2 & (t > 0), \\ u(0) = 0, \\ \frac{du}{dt}(0) = g. \end{cases}$$

Weierstrass の $\wp$ 関数を用いると, この初期値問題の解が書ける。

具体的には

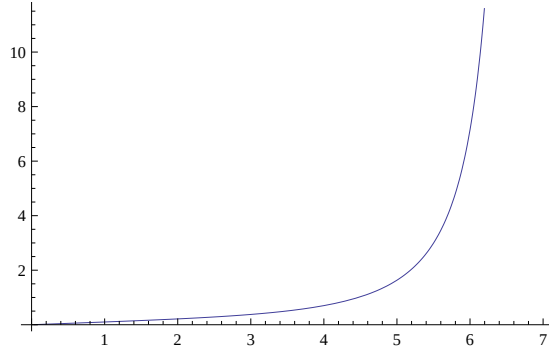
$$u(t) = \wp\left(\frac{\Gamma(1/3)\Gamma(1/6)}{(2g)^{1/3}\sqrt{6\pi}} - \frac{t}{\sqrt{6}}; 0, -6g^2\right).$$

但し, $\Gamma(x)$ はガンマ関数, $\wp(t; g_2, g_3)$ は

$$t = \int_y^\infty \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2x - g_3}}$$

の逆関数: $y = \wp(t; g_2, g_3)$.

$u(t)$ ($g = 0.1$) のグラフは以下のようになる.



解 u ($g = 0.1$) のグラフ

次の定理の離散アナログが本稿の主定理となる.

定理 1 [1]

$$1 < p \begin{cases} < \infty & (d = 1) \\ \leq \frac{d+1}{d-1} & (d \geq 2) \end{cases}$$

とする. $\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \subset \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d : |\vec{x}| \leq K\}$ ($K \geq 0$) かつ $\int_{\mathbb{R}^d} g d\vec{x} > 0$ であるとき, (SLW) の解はある有限の時刻 T が存在し, その時刻で爆発する.

2 (SLW) の離散化

まず, 常微分方程式 $\frac{d^2u}{dt^2} = |u|^p$ の離散化を考えたい.

自然な離散化として以下の様な差分方程式が考えられる.

$$\frac{u^{\tau+1} - 2u^\tau + u^{\tau-1}}{\delta^2} = |u^\tau|^p \quad (\tau \in \mathbb{Z})$$

但し, $\delta > 0$, $u^\tau := u(\delta\tau)$.

この差分方程式の場合 τ が有限の値であり, u^τ , $u^{\tau-1}$ も有限の値であれば $u^{\tau+1}$ も有限の値になってしまう. これでは, 有限の時刻で何らかの現象が起こる「解の爆発」という性質が見えていたとは言いがたい.

差分方程式の解に対しても有限の時刻 τ で何らかの現象が起こるような離散化とはどのようなものなのだろうか.

$$u^{\tau+1} + u^{\tau-1} = 2u^\tau + \delta^2 |u^\tau|^p + o(\delta^3) \quad (\delta \rightarrow 0) \quad (*)$$

このような差分方程式 (*) も $\frac{d^2 u}{dt^2} = |u|^p$ の離散化となっている. (*) を基にして次の差分方程式を考える.

$$u^{\tau+1} + u^{\tau-1} = \frac{4u^\tau}{2 - \delta^2 u^\tau |u^\tau|^{p-2}} \quad (\tau \in \mathbb{Z})$$

右辺を $\delta = 0$ の周りで Taylor 展開すると (*) の右辺が得られる.

さらにこの差分方程式から (SLW) の離散化として次のような偏差分方程式が得られる.

$$u_{\vec{n}}^{\tau+1} + u_{\vec{n}}^{\tau-1} = \frac{4v_{\vec{n}}^\tau}{2 - \delta^2 v_{\vec{n}}^\tau |v_{\vec{n}}^\tau|^{p-2}} \quad (\tau \in \mathbb{Z}, \vec{n} \in \mathbb{Z}^d) \quad (\text{dSLW})$$

但し, $\delta > 0$, $u_{\vec{n}}^\tau := u(\delta\tau, \xi\vec{n})$ ($\xi := \sqrt{d}\delta$), $v_{\vec{n}}^\tau := \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d (u_{\vec{n}+\vec{e}_k}^\tau + u_{\vec{n}-\vec{e}_k}^\tau)$, $\vec{e}_k := (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-th}}, 0, \dots, 0)$.

(dSLW) が (SLW) の離散化であることは以下のようにして確かめることができる.

$$\begin{aligned} u_{\vec{n}}^{\tau+1} - 2u_{\vec{n}}^\tau + u_{\vec{n}}^{\tau-1} &= 2v_{\vec{n}}^\tau - 2u_{\vec{n}}^\tau + \delta^2 |v_{\vec{n}}^\tau|^p + o(\delta^4) \quad (\delta \rightarrow 0) \\ \frac{u_{\vec{n}}^{\tau+1} - 2u_{\vec{n}}^\tau + u_{\vec{n}}^{\tau-1}}{\delta^2} &= \sum_{k=1}^d \frac{u_{\vec{n}+\vec{e}_k}^\tau - 2u_{\vec{n}}^\tau + u_{\vec{n}-\vec{e}_k}^\tau}{d\delta^2 (= \xi^2)} + |v_{\vec{n}}^\tau|^p + o(\delta^2) \quad (\delta \rightarrow 0) \end{aligned}$$

$\delta \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 0$ の連続極限で (SLW) が得られる.

3 (dSLW) の解の爆発及び主定理

(dSLW) の分母に注目してみると $2 - \delta^2 v_{\vec{n}}^\tau |v_{\vec{n}}^\tau|^{p-2}$ という項があり, $u_{\vec{n}}^{\tau-1} < \infty$, $v_{\vec{n}}^\tau \rightarrow (2\delta^{-2})^{1/(p-1)}$ であれば, $u_{\vec{n}}^{\tau+1} \rightarrow +\infty$ が成り立つ.

これから分かるように, 有限の時刻 τ で何らかの現象が起きており, この状況が (SLW) の解の爆発に対応した性質だと見なせる. そこで, (dSLW) の解の爆発を以下で定義する.

定義 2

$u_{\vec{n}}^\tau$: (dSLW) の解

$\exists \tau_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ s.t. $v_{\vec{n}}^\tau < (2\delta^{-2})^{1/(p-1)}$ ($\tau < \tau_0$, $\forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d$), $\exists \vec{n}_0 \in \mathbb{Z}^d$ s.t. $v_{\vec{n}_0}^{\tau_0} \geq (2\delta^{-2})^{1/(p-1)}$ とする.

このとき, 解 $u_{\vec{n}}^\tau$ は時刻 τ_0 で爆発するという.

例 2 ((dSLW) の爆発解の例)

$p = 2$, $u_{\vec{n}}^0 \equiv 0$, $u_{\vec{n}}^1 \equiv g > 0$ のとき $u_{\vec{n}}^\tau \equiv u^\tau$,

$$(\text{dSLW}) \Rightarrow u^{\tau+1} + u^{\tau-1} = \frac{4u^\tau}{2 - \delta^2 u^\tau}$$

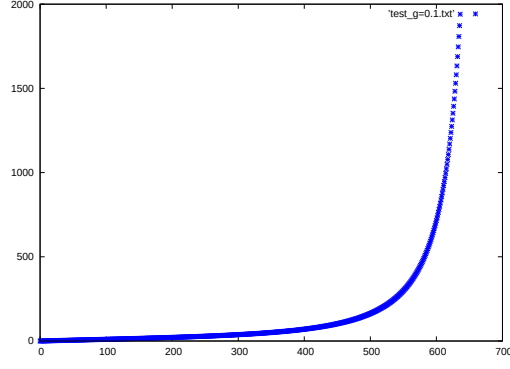
であり, この解は必ずある有限の時刻で爆発する. (例 1 の離散版)

($\therefore$) 任意の時刻で爆発しないと仮定: $u^\tau < 2\delta^{-2}$ ($\forall \tau \in \mathbb{Z}$)

$$u^{\tau+1} - 2u^\tau + u^{\tau-1} = \frac{2\delta^2 (u^\tau)^2}{2 - \delta^2 u^\tau} \geq 0$$

$u^\tau \geq g\tau \rightarrow$ 仮定と矛盾.

u^τ ($g = 0.1$, $\delta = 0.001$) をプロットしたグラフは次のようになる.



解 u^τ ($g = 0.1, \delta = 0.001$) のグラフ

次の定理が本稿の主定理となる．

定理 2

$$1 < p \begin{cases} < \infty & (d = 1) \\ \leq \frac{d+1}{d-1} & (d \geq 2) \end{cases}$$

とする．さらに、以下の仮定が満たされているとする．

$$(A1) \ \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : u_{\vec{n}}^j \neq 0\} \subset \{\vec{n} = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq K\} \ (j = 0, 1, \|\vec{n}\| := |n_1| + \dots + |n_d|, K \geq 0)$$

$$(A2) \ \sum_{\vec{n}} u_{\vec{n}}^1 > \sum_{\vec{n}} u_{\vec{n}}^0$$

このとき、(dSLW) の解はある有限の時刻 τ_0 が存在し、その時刻で爆発する．

4 定理の証明の概略

ここでは前節の定理 2 の証明の概略を紹介する．詳細は [2] にある．

(A1) から $\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : u_{\vec{n}}^\tau \neq 0\} \subset \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq \tau - 1 + K\}$: (有限集合) がわかり、次の 2 つが従う．

- $U^\tau := \sum_{\vec{n}} u_{\vec{n}}^\tau$ が well-defined.
- $\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : v_{\vec{n}}^\tau \neq 0\} \subset \{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq \tau + K\}$.

さらに、式を簡略化するために $(\delta^2/2)^{1/(p-1)} u_{\vec{n}}^\tau$ を改めて $u_{\vec{n}}^\tau$ とするスケーリングを行い、以下の偏差分方程式について考える．

$$u_{\vec{n}}^{\tau+1} + u_{\vec{n}}^{\tau-1} = \frac{2v_{\vec{n}}^\tau}{1 - v_{\vec{n}}^\tau |v_{\vec{n}}^\tau|^{p-2}}$$

証明は背理法を用いる．定理の仮定がすべて満足されているときに任意の時刻で (dSLW) の解が爆発しないと仮定する．即ち、 $v_{\vec{n}}^\tau < 1$ ($\forall \tau \in \mathbb{Z}, \forall \vec{n} \in \mathbb{Z}^d$)．

この仮定から次の命題が成り立つ．

命題 1

(dSLW) の解が任意の時刻で爆発しないとき、 τ に依らない正定数 $C_0 > 0$ が存在して

$$U^\tau < C_0 \tau^d \ (\tau \gg 1)$$

が成り立つ．

証明

$$\begin{aligned}
U^\tau &= \sum_{\vec{n}} v_{\vec{n}}^\tau \\
&< \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : v_{\vec{n}}^\tau \neq 0\} \\
&\leq \#\{\vec{n} \in \mathbb{Z}^d : \|\vec{n}\| \leq \tau + K\} \leq \exists C_0 \tau^d \quad (\tau \gg 1) \blacksquare
\end{aligned}$$

また, (dSLW) の解が任意の時刻で爆発しないという仮定から, 以下の U^τ に関する不等式が得られる.

$$\begin{cases} U^\tau \geq C_1 \tau \\ U^{\tau+1} - 2U^\tau + U^{\tau-1} \geq C_2 \tau^{-d(p-1)} (U^\tau)^p \end{cases} \quad (\tau \gg 1)$$

但し, $C_1, C_2 > 0$ は τ に依らない定数.

これらの不等式に対して次の補題を適用すれば $1 < p < \begin{cases} \infty & (d=1) \\ \frac{d+1}{d-1} & (d \geq 2) \end{cases}$ において, 前述の命題 1 に矛盾することが分かる.

補題 1 $\{F^\tau\}_{\tau=\tau_0}^\infty$ が以下の不等式を満たすとする.

$$\begin{cases} F^\tau \geq C_1 \tau^\eta & (\tau \geq \tau_0) \\ F^{\tau+1} - 2F^\tau + F^{\tau-1} \geq C_2 \tau^{-q} (F^\tau)^p & (\tau > \tau_0) \end{cases}$$

但し, $\eta \geq 1, p > 1, (p-1)\eta > q-2$ であり, $C_1, C_2 > 0$ は τ に依らない定数.

このとき, $\forall \ell \geq 1$ に対して, τ に依らない正定数 $C > 0$ が存在して,

$$F^\tau > C \tau^\ell \quad (\tau \gg \tau_0)$$

が成り立つ.

$p = \frac{d+1}{d-1}$ ($d \geq 2$) の場合もこの補題の証明と同様にして矛盾を示すことができる.

5 今後の展望

本稿では半線形波動方程式 (SLW) の離散化 (dSLW) について考察した. 一方, 半線形熱方程式の初期値問題に対して

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = \Delta f + f^{1+\alpha} & (t \geq 0, \vec{x} \in \mathbb{R}^d) \\ f(0, \vec{x}) \geq 0 & (\vec{x} \in \mathbb{R}^d) \end{cases} \quad (\text{SLH})$$

但し, $\alpha > 1$.

(1) $1 < \alpha \leq 2/d$ のとき, (SLH) の解は必ずある有限の時刻で爆発する.

(2) $2/d < \alpha$ のとき, (SLH) の解は初期条件を十分小さくすると任意の時刻で爆発しない.

という事実が知られており [3, 4], この性質の離散アナログをもつような離散化をこれまでの研究で得ることができている [5].

(SLW) ($d \geq 2$) に対しても (SLH) の場合と同様に, あるクラスの初期条件に対して以下に挙げる事実が知られている [6–12].

(1) $1 < p \leq p_c(d)$ のとき (SLW) の解は必ずある有限の時刻で爆発する.

(2) $p_c(d) < p$ のとき (SLW) の解は初期条件を十分小さくすると任意の時刻で爆発しない.

ただし, $p_c(d) := (\text{二次方程式: } (d-1)\lambda^2 - (d+1)\lambda - 2 = 0 \text{ の正の根})$.

(dSLW) もこの性質の離散アナログをもっていることが期待され, それを調べていくことが今後の課題となる.

参考文献

- [1] T. Kato, “Blow-Up of Solutions of Some Nonlinear Hyperbolic Equations”,
J. Differential Equations 52(1984), 378–406.
- [2] K. Matsuya, “The blow-up theorem of a discrete semilinear wave equation”,
Preprint, arXiv:1107.1917.
- [3] H. Fujita, “On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ ”,
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. A Math. 16(1966), 109–124.
- [4] F. B. Weissler, “Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation”,
Israel J. Math. 38(1981), 29–40.
- [5] K. Matsuya and T. Tokihiro, “Existence and non-existence of global solutions for a discrete semi-linear heat equation”,
Discrete Contin. Dyn. Syst. 31(2011), 209–220.
- [6] F. John, “Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions”,
Manuscripta Math. 28 (1980), 235–268.
- [7] R. T. Glassey, “Finite-time blow-up for solutions of nonlinear wave equations”,
Math. Z. 177 (1981), 323–340.
- [8] R. T. Glassey, “Existence in the large for $\square u = F(u)$ in two space dimensions”,
Math. Z. 178 (1981), pp. 233–261.
- [9] J. Schaeffer, “The equation $\square u = |u|^p$ for the critical value of p ”,
Proc. Roy. Soc. Edinburgh 101A (1985), 31–44.
- [10] T. C. Sideris, “Nonexistence of global solutions to semilinear wave equations in high dimensions”,
J. Differential Equations 52 (1984), 378–406.
- [11] V. Georgiev, H. Lindblad and C. D. Sogge, “Weighted strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations”,
Amer. J. Math 119 (1997), 1291–1319.
- [12] B. T. Yordanov and Q. S. Zhang, “Finite time blow up for critical wave equations in high dimensions”,
J. Funct. Anal. 231 (2006), 361–374.