

## ソリトンの有効相互作用：ソリトン粒子力学の構築 に向けて

角島, 浩  
富山大学工学部

<https://doi.org/10.15017/23452>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23A0-S7 (6), pp.41-47, 2012-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7  
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」 (研究代表者 笥 三郎)  
共催 九州大学グローバル COE プログラム  
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

*Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and  
mathematical aspects*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

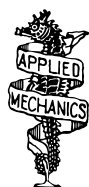
Co-organized by  
*Kyushu University Global COE Program*  
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 6 (pp. 41 - 47)

# ソリトンの有効相互作用：ソリトン粒 子力学の構築に向けて

角畠 浩 (KAKUHATA Hiroshi)

(Received 15 January 2012; accepted 6 February 2012)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2012

# ソリトンの有効相互作用 — ソリトン粒子力学の構築に向けて

富山大学工学部 角 畠 浩 (KAKUHATA Hiroshi)

概要 以前の結果において、非分散連立方程式のソリトン相互作用で加速度を求めるとソリトンに働く力の合力が0にならず並進不変性が破れていた。本稿では電気力学のベクトルポテンシャルに類似した「ゲージ場」を導入して、並進不変性を持つソリトン粒子の力学を定式化した。

## 1 はじめに

ソリトンがそれぞれのソリトンの個性を保ち弾性的に衝突することはよく知られている。しかし、衝突の様子を観察すると相互作用のため軌道が変化しその痕跡として位相シフトが残り、ソリトンの間に力が働いているように見える。このことからソリトンのある極限で点粒子として考えることができるように思えるし、その試みも行われてきた [1]。これまでに、著者らは非分散連立方程式を用いて、ソリトンを点粒子として扱いソリトン粒子間に働く相互作用の記述を試みてきた [2]。そこでは、ソリトンのピークをソリトンの位置として、ソリトン粒子の加速度を求め、加速度からソリトン粒子に働く力を考察してきた。しかし、このとき2つのソリトン粒子に働いている力の合力は0にはならず、元のソリトン方程式は並進不変であるにもかかわらず、ソリトン粒子の力学においては並進不変性が破れてしまい、満足いく定式化が困難であった。本稿ではソリトン粒子の相互作用に電気力学のベクトルポテンシャルに類似した「ゲージ場」を導入して、並進不変性を保つソリトン粒子の力学を定式化することを試みた。以下、これまでの結果を示し、問題点を指摘した後、「ゲージ場」を導入した定式化に付いて述べる。

## 2 これまでの結果と問題点

本節ではこれまでに我々が行ってきた試みとその問題点を明らかにする。

### 2.1 連立非分散方程式とソリトン解

連立非分散方程式は3次元空間  $\mathbf{R}^3$  中で一様一定な外部電流  $\mathbf{J} = (0, 0, 1)$  が作る磁場中を運動する内部電流を持つストリングの運動を記述し [3]、その運動方程式は

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y \end{aligned} \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで、 $\tau$  は時間、 $\sigma$  はストリングに沿うパラメータである。

双線形変換

$$X = \operatorname{Re} \left( \frac{q}{f} \right), \quad Y = \operatorname{Im} \left( \frac{q}{f} \right), \quad Z = \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln f \quad (2.2)$$

によって、方程式 (2.1) に対する双線形方程式

$$(D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)f \cdot q = 0, \quad (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)f \cdot q^* = 0, \quad (D_\tau - D_\sigma)^2 f \cdot f - \frac{1}{2}q^*q = 0 \quad (2.3)$$

を得る。ただし、「\*」は複素共役を表し、 $D_\tau$  と  $D_\sigma$  は双線形演算子である。

双線形方程式 (2.3) から、1ソリトン解

$$f = 1 + b^2 e^{2\eta}, \quad q = e^\eta$$

を求めるのは容易である。ここで、位相  $\eta$  は  $\eta = k\sigma - \omega\tau + \eta_0$ 、係数  $b$  は  $b = \frac{1}{2(\omega + \omega^* - k - k^*)}$  で与えられる。また、 $k$  は複素波数、 $\omega$  は複素振動数であり、それらは分散関係  $\omega^2 - k^2 = -1$  を満足する。また、 $\eta_0$  は複素初期位相である。

$\mathbb{R}^3$  で見れば、1ソリトン解は、位相の実部が並進運動に虚部が回転運動に対応するので  $\eta = \zeta + i\varphi$  として、

$$X = A \cos \varphi \operatorname{sech} \zeta, \quad Y = A \sin \varphi \operatorname{sech} \zeta, \quad Z = Z_0 + \sigma - A \tanh \zeta \quad (2.4)$$

と表される。なお、 $Z$  はキंक型をしている。ここで、位相速度を  $v$ 、ソリトンの回転の角速度を  $\Omega$ 、初期位相を  $\delta, \theta$  として、位相  $\zeta, \varphi$ 、波数  $\gamma$ 、および振幅  $A$  は

$$\begin{aligned} \zeta &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta, \quad \varphi = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \quad A = 2\gamma(1 + v) \end{aligned}$$

である。これらから  $v$  ( $-1 < v < 1$ ) が大きいほどソリトンの振幅  $A$  が大きくなることわかる。さらに、 $\Omega$  が小さいときソリトンはループであるが、 $\Omega$  ( $\frac{-1}{\sqrt{1 - v^2}} < \Omega < \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ ) が大きくなるにつれ振幅が小さくなり、ある臨界角速度より大きくなるとループを形成しないこともわかる (図 1)。

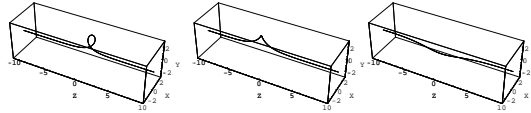


図 1: 1ソリトン解：左から順に  $\Omega = 0.5, \Omega = 0.81, \Omega = 1.0$  の各場合

2ソリトン解は

$$\begin{aligned} q &= e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*}, \\ f &= 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*} \end{aligned} \quad (2.5)$$

で与えられる。ここで、係数

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2(\omega_n + \omega_n^* - k_n - k_n^*)}, \quad (n = 1, 2), \quad b_{12} = \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)}, \\ c_1 &= 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_1 b_{12}^*, \quad c_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_2 b_{12}, \\ d_{12} &= 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2 \end{aligned}$$

位相は  $\eta_n = k_n \sigma - \omega_n t + \delta_n + i\theta_n$  ( $n = 1, 2$ ) で分散関係は  $\omega_n^2 - k_n^2 = -1$  である。

## 2.2 ソリトン相互作用

前述の2ソリトン解 (2.5) を用いて最も簡単な  $\Omega = 0$  の  $z$ - $x$  平面内での典型的な衝突パターンを示す。本稿では、同じスピードの正面衝突を考える。衝突の条件によって複数のパターンがある。正(負)の振幅同士の衝突では、小さい相対速度のときソリトンが重ならず弾くように衝突し、大きい相対速度のとき小さいループが大きいループの中を回る。しかし、正と負の振幅の衝突では、小さいループが衝突に際して一時的に消失し、大きいループがさらに大きくなる (図 2)。

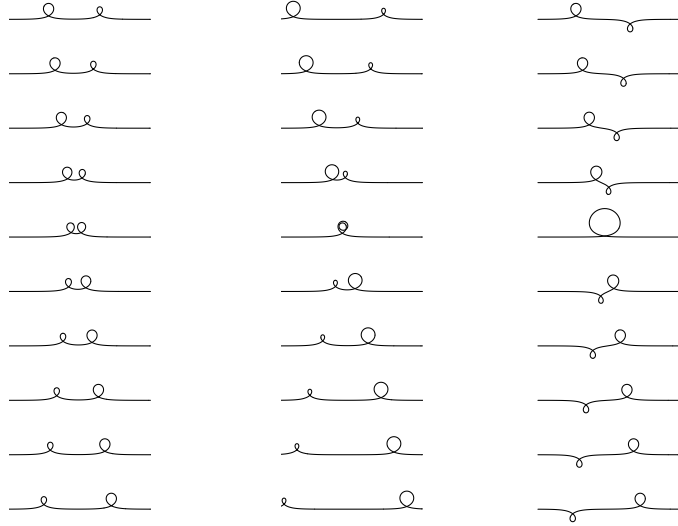


図 2:  $v = 0.12$ ,  $v = 0.24$ ,  $v = 0.12$

### 2.3 ソリトンの軌道

ソリトン衝突を考える場合，ソリトンの位置がわかれば加速度を計算できるので，まず，ソリトンの位置はソリトンのピークの位置だとして2ソリトン解 (2.5) から位置を求め，これをソリトン粒子の位置とする。今，図2のソリトン相互作用と同じ状況を考える。便宜上，右進行(大きい)ソリトンを soliton-1，左進行(小さい)ソリトンを soliton-2 と呼び，それらの位置をそれぞれ  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  とする。同一平面内で  $\Omega = 0$  なので  $z$  成分のみ考慮すれば十分である。このとき，それぞれのソリトンの波数，振幅，位相，および初期位相はそれぞれ

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad A_1 = 2\gamma(1+v), \quad A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 = \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \quad \varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2, \theta_n = 0 \text{ or } \pi, \quad (n = 1, 2) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで波数  $\gamma$  が等しくなることが重要である。このとき，(2.3) の従属変数  $f$  は

$$f = \beta(\tau) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma$$

のように， $\tau$  と  $\sigma$  の関数が分離した非常に簡単な形になる。ここで  $\beta(\tau) = \cosh 2\gamma v\tau + (1-v^2) \cos \theta_{12}$  で  $\theta_{12}$  は回転の初期位相の差， $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$  であり， $z$ - $x$  平面内なので  $\theta_{12}$  は 0 か  $\pi$  である。 $Z$  はキルク型であったから，ソリトンのピークは  $\partial_\sigma^2 Z = 0$  ( $\partial_\sigma^3 Z > 0$ ) で与えられる。このとき波数が等しいため方程式は  $e^{2\gamma\sigma}$  に対する4次方程式

$$\begin{aligned} v^2[v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)]e^{8\gamma\sigma} - 2[v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau + \beta(\tau)^2 - 2v^4]e^{6\gamma\sigma} \\ - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau e^{4\gamma\sigma} - [v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)^2 + 2v^4]e^{2\gamma\sigma} \\ + v^2[v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)] = 0 \end{aligned}$$

に帰着し，厳密解を求めることができる。残念ながら厳密解がかなり複雑なので，ソリトン同士が十分離れているときに ( $|\tau| \rightarrow \infty$ )，soliton-1 に対しては， $\sigma_1 \approx v\tau$ ，soliton-2 に対しては， $\sigma_2 \approx -v\tau$  であることに注意して， $e^{\pm 2\gamma v\tau}$  (符号は衝突前に +，衝突後に -) の主導次と次主導次のみで解を近似する。また，計算に際しては分母分子に現れる高次項を単に無視した。衝突前 ( $\tau \rightarrow -\infty$ ) での

soliton-1 の位置,  $\sigma_1$  と soliton-2 の位置,  $\sigma_2$  は, それぞれ,

$$\sigma_1 \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_2 \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}} \quad (2.7)$$

である。同様に, 衝突後 ( $\tau \rightarrow +\infty$ ) の soliton-1 の位置,  $\sigma_1$  と soliton-2 の位置,  $\sigma_2$  は, それぞれ,

$$\sigma_1 \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 2(1-v)(2+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (2.8)$$

$$\sigma_2 \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{v^2[1 + 2(1+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}} \quad (2.9)$$

になる。これらの式 (2.6) ~ (2.9) に含まれる因子  $\pm\frac{1}{2}\ln v^2$  は位相シフトに対応する。

運動方程式を求めるためにソリトン粒子の質量を定義する。ソリトンの運動量の  $z$  成分,  $P_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{Z}d\sigma$  (「 $\cdot$ 」は時間  $\tau$  についての微分を表す) は, soliton-1 と soliton-2 に対して, それぞれ,

$$P_{1z} = 4\gamma(1+v)v, \quad P_{2z} = -4\gamma(1-v)v$$

になるので,  $\pm v$  の係数として soliton-1 と soliton-2 の質量を

$$m_1 = 4\gamma(1+v), \quad m_2 = 4\gamma(1-v) \quad (2.10)$$

と定義する。すると, 全質量  $M$  と換算質量  $\mu$  は

$$M = m_1 + m_2 = 8\gamma, \quad \mu = \frac{2}{\gamma}$$

になる。

soliton-1 と soliton-2 の衝突前の漸近的位置 (2.6) と (2.7) から加速度を求め, (2.10) の質量  $m_1$  と  $m_2$  を乗じたものを運動方程式と見なせば, それぞれのソリトン粒子に作用する力  $\mathcal{F}_n$  ( $n = 1, 2$ ) は時間の関数として

$$m_1\ddot{\sigma}_1 \approx -\frac{16\gamma^2v^2(1+v)(1-v^2)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}, \quad m_2\ddot{\sigma}_2 \approx \frac{16\gamma^2v^2(1-v)(1-v^2)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v)\cos\theta_{12}e^{2\gamma v\tau}} \quad (2.11)$$

になる。 $\cos\theta_{12} = 1$  ( $\theta_{12} = 0$ ) のとき,  $\mathcal{F}_1 < 0, \mathcal{F}_2 > 0$  となりソリトン粒子間に斥力が,  $\cos\theta_{12} = -1$  ( $\theta_{12} = \pi$ ) のとき,  $\mathcal{F}_1 > 0, \mathcal{F}_2 < 0$  でソリトン粒子間に引力が働くことがわかる。

同様に, soliton-1 と soliton-2 の衝突後の漸近的位置 (2.8) と (2.9) から加速度を求め, 質量  $m_1$  と  $m_2$  を乗じて, ソリトン粒子に作用する力  $\mathcal{F}_n$  ( $n = 1, 2$ ) は

$$m_1\ddot{\sigma}_1 \approx \frac{16\gamma^2v^2(1+v)(1-v^2)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1-v)(3+v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}, \quad m_2\ddot{\sigma}_2 \approx -\frac{16\gamma^2v^2(1-v)(1-v^2)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(1+v)(3-v)\cos\theta_{12}e^{-2\gamma v\tau}} \quad (2.12)$$

である。 $\cos\theta_{12} = 1$  のとき,  $\mathcal{F}_1 > 0, \mathcal{F}_2 < 0$  となり, やはりソリトン粒子間に斥力が,  $\cos\theta_{12} = -1$  のとき,  $\mathcal{F}_1 < 0, \mathcal{F}_2 > 0$  でソリトン粒子間に引力が働いている。これらの結果はソリトン衝突の様子を定性的に説明している。しかし, 衝突の前後で,  $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 \neq 0$  であるから, 作用反作用の法則が成り立っていない。これは並進不変性が破れていることを意味する。すなわち, 十分遠方でのソリトン粒子の漸近解 (2.6) ~ (2.9) を満足する運動方程式が

$$m_1\ddot{\sigma}_1 = \frac{dV(\rho)}{d\rho}, \quad m_2\ddot{\sigma}_2 = -\frac{dV(\rho)}{d\rho} \quad (2.13)$$

であるような素朴なモデルは成立しない。ここで,  $\rho$  は相対座標,  $\rho = \sigma_2 - \sigma_1$  で  $V$  はポテンシャルである。

### 3 ソリトン粒子のモデル

本節ではソリトン粒子に対するソリトンの位置 (2.6) ~ (2.9) を漸近解として満足する並進不変な力学モデルを考察する。(2.13) 以外の並進 ( $\sigma_n \rightarrow \sigma_n + \epsilon$ ) 不変性を持つ 2 ソリトン粒子モデルの候補はいくつも存在するであろうが、ここではラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\sigma}_1^2 + \dot{\sigma}_1 A_{12}(\rho) + \frac{1}{2}m_2\dot{\sigma}_2^2 + \dot{\sigma}_2 A_{21}(\rho) - V(\rho) \quad (3.1)$$

を考察する。ここで、 $A_{nm}$  ( $n, m = 1, 2, n \neq m$ ) をゲージ理論のゲージ場に類似しているので、仮に「ゲージ場」と呼び (ゲージ不変性は不明)、 $V$  を有効ポテンシャルと呼ぶ。(3.1) から一般化運動量は

$$p_1 = m_1\dot{\sigma}_1 + A_{12}, \quad p_2 = m_2\dot{\sigma}_2 + A_{21}$$

になる。ラグランジアン (3.1) は明らかに並進不変であるから、 $p_1 + p_2$  は保存量であり、「ゲージ場」が運動量をソリトン粒子間で運ぶと考える。

重心座標と相対座標は

$$\Sigma = \frac{m_1\sigma_1 + m_2\sigma_2}{m_1 + m_2}, \quad \rho = \sigma_2 - \sigma_1$$

で定義し、ラグランジアン (3.1) より運動方程式は重心と相対座標で

$$M\ddot{\Sigma} + \dot{\rho} \left( \frac{dA_{12}}{d\rho} + \frac{dA_{21}}{d\rho} \right) = 0, \quad \mu\ddot{\rho} = \dot{\Sigma} \left( \frac{dA_{12}}{d\rho} + \frac{dA_{21}}{d\rho} \right) - \frac{dV}{d\rho} \quad (3.2)$$

と表される。この第 1 式が並進不変性に対応する一般化運動量の保存則である。

### 4 「ゲージ場」と有効ポテンシャル

(2.6) ~ (2.6) から 2 個のソリトン粒子の重心座標  $\Sigma$  と相対座標  $\rho$  は、衝突前には

$$\Sigma \approx \frac{v}{4\gamma} \ln \frac{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}) e^{4\gamma v \tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \quad \rho \approx \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}) e^{4\gamma v \tau}} \quad (4.1)$$

衝突後には

$$\Sigma \approx -\frac{v}{4\gamma} \ln \frac{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}) e^{-4\gamma v \tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \quad \rho \approx -\frac{1}{2\gamma} \ln \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{v^4(1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}) e^{-4\gamma v \tau}} \quad (4.2)$$

で与えられる。 $A_{nm}$  と  $V$  を相対座標  $\rho$  の関数として表すためには、これらの方程式 (4.1) と (4.2) の  $\rho$  に対する式を解く必要がある。 $\xi = v^{-2} e^{\mp \gamma \rho}$  (符号は衝突前に  $-$ , 衝突後に  $+$ ) の関数として  $\chi = e^{\pm 2\gamma v \tau}$  (符号は衝突前に  $+$ , 衝突後に  $-$ ) を表すと、方程式は衝突の前後で同じ形の 3 次方程式

$$4 \cos \theta_{12} \chi^3 + \chi^2 - 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} \xi^2 \chi - \xi^2 = 0 \quad (4.3)$$

になる。やや複雑な解なので物理的に有意な厳密解を  $\xi^2$  まで展開し、衝突前と衝突後で、それぞれ、

$$e^{-2\gamma v \tau} \approx \frac{v^4 e^{\gamma \rho}}{v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-\gamma \rho}}, \quad (4.4)$$

$$e^{2\gamma v \tau} \approx \frac{v^4 e^{-\gamma \rho}}{v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma \rho}} \quad (4.5)$$

を得る。

重心座標と相対座標の速度と加速度は衝突前では，

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} &\approx \frac{v^2[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \quad \dot{\rho} \approx \frac{-2v[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}, \\ \ddot{\Sigma} &\approx \frac{-4\gamma v^3(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2}, \quad \ddot{\rho} \approx \frac{8\gamma v^2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2}\end{aligned}\quad (4.6)$$

なので，モデル運動方程式 (3.2) とソリトン粒子の速度および加速度を比較して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}(A_{12} + A_{21}) &\approx \frac{-16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}][1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]}, \\ \frac{dV}{d\rho} &\approx \frac{-16v^2 \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v \tau}]^2}\end{aligned}\quad (4.7)$$

を得る。(4.6) の  $\dot{\rho}$  に対する式を利用して， $\rho$  の積分を  $\tau$  の積分に変換して実行し，(4.4) を用いれば，「ゲージ場」と有効ポテンシャルは

$$A_{12} + A_{21} \approx \frac{4 \cos \theta_{12} [v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-\gamma \rho}]}{\gamma v^2 [v^2 e^{\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]}, \quad V \approx \frac{16 \cos \theta_{12} [v^2 e^{\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}]}{[v^2 e^{\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]^2}$$

になる。重心座標と相対座標の速度と加速度は，衝突後には

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma} &\approx \frac{v^2[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \quad \dot{\rho} \approx \frac{-2v[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]}{1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}, \\ \ddot{\Sigma} &\approx \frac{4\gamma v^3(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2}, \quad \ddot{\rho} \approx \frac{-8\gamma v^2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2}\end{aligned}\quad (4.8)$$

であるから，やはりモデル運動方程式 (3.2) と比較して，

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\rho}(A_{12} + A_{21}) &\approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 2(5 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}][1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]}, \\ \frac{dV}{d\rho} &\approx \frac{16v^2 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}}{[1 + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v \tau}]^2}\end{aligned}\quad (4.9)$$

となる。衝突前のときと同様に，(4.8) の  $\dot{\rho}$  に対する式を利用して積分し，(4.5) を用いれば

$$A_{12} + A_{21} \approx \frac{4 \cos \theta_{12} [v^2 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma \rho}]}{\gamma v^2 [v^2 e^{-\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]}, \quad V \approx \frac{16 \cos \theta_{12} [v^2 e^{-\gamma \rho} + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12}]}{[v^2 e^{-\gamma \rho} + 4(3 - v^2) \cos \theta_{12}]^2}$$

を得る。

全域にわたるソリトン粒子の相互作用を含んだ力学を構築するため，近似の範囲を踏み越えるが，これらのポテンシャルを

$$\begin{aligned}A_{12} + A_{21} &= \frac{2 \cos \theta_{12} [v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]}{\gamma v^2 [v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]} \operatorname{sech} \gamma \rho, \\ V &= \frac{8 \cos \theta_{12} [v^2 + (1 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]}{[v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^2} \operatorname{sech} \gamma \rho\end{aligned}\quad (4.10)$$

と  $\rho$  の全域に拡張する。ポテンシャルの形状を図 3 に示した。遠距離では有効ポテンシャル  $V$  が支配的で，近距離では「ゲージ場」 $A_{nm}$  が支配的である。すなわち，近距離では運動量移動が大きい。 $\cos \theta_{12} = 1$  の場合， $V$  の原点付近でくぼみ (引力効果) があり， $\cos \theta_{12} = -1$  のとき，soliton-2 の消失に対応すると思われる特異性が現れ，原点付近には斥力領域がある。



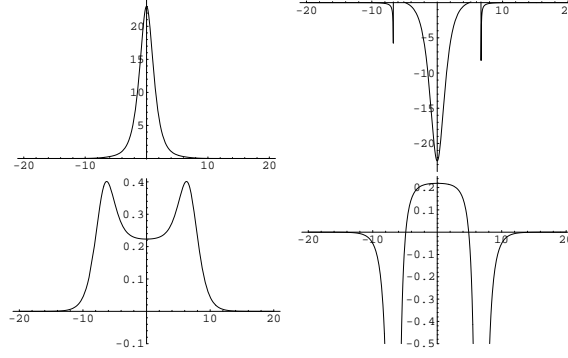


図 3: potentials, 左が  $\theta_{12} = 0$ , 右が  $\theta_{21}$  の場合で, 上が  $A_{12} + A_{21}$ , 下が  $V$  である。 ( $v = 0.12$ )

## 5 Summary

本稿ではソリトン粒子間に働く力 (2.11) と (2.12) を求めたとき破れていた並進不変性を回復させるため, 連立非分散方程式のソリトン粒子の相互作用に新たに運動量を運ぶ「ゲージ場」 $A_{nm}$  を導入し,  $A_{nm}$  とともに電気力学のスカラーポテンシャルに対応する有効ポテンシャル  $V$  を求めた。位相シフトを含むソリトン粒子の漸近解 (2.6) ~ (2.9) を満足する運動方程式

$$M\ddot{\Sigma} + \dot{\rho}a = 0, \quad \mu\ddot{\rho} = \dot{\Sigma}a - \frac{dV}{d\rho} \quad (5.1)$$

を, すなわち, ソリトン粒子の力学を構成した。ここで  $a$  は「ゲージ場」の導関数  $a = \frac{d(A_{12}+A_{21})}{d\rho}$  で有効ポテンシャルの導関数  $\frac{dV}{d\rho}$  とともに (4.10) から求め,

$$a = \frac{-2 \cos \theta_{12} \{v^4 + 2(1 - v^2) \cos \theta_{12} [v^2 + (3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho] \operatorname{sech} \gamma \rho\}}{v^2 [v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^2} \operatorname{sech} \gamma \rho \tanh \gamma \rho,$$

$$\frac{dV}{d\rho} = \frac{-8v^2 \cos \theta_{12} (v^2 - 4 \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho)}{[v^2 + 2(3 - v^2) \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma \rho]^3} \operatorname{sech} \gamma \rho \tanh \gamma \rho$$

である。なお, 本稿の近似では弾く相互作用は再現しないと思われる。

このソリトン方程式の場合, 原理的には全ての領域で計算が可能であるが, その解の複雑さ故に取り扱いは困難である。従って, 残念ながら近距離の相互作用は十分に記述しておらず, 図 3 のポテンシャルの挙動は原点付近では不確かなものである。なお, 本稿で述べた定式化はソリトン粒子の運動を記述する漸近解を求め, これを満足する運動方程式を探すといういわゆる逆問題に相当する。KdV 方程式など他のソリトン方程式にも適用しうる。

残る課題としては全ての  $\rho$  での有効ポテンシャルと「ゲージ場」はどの程度正しいか, 特異性の存在は小さいソリトンの消失に対応するか, などがあげられる。

## 参考文献

- [1] F. Abdullaev, S. Darmanyan and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.
- [2] 角畠浩, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II」, 数理解析研究所講究録 1761 「非線形波動現象の多様性と普遍性」, p.118, 京都大学数理解析研究所, 2011 年
- [3] H.Kakuhata and K.Konno, *Theor. Math. Phys.* **65** (2002) 713.