束とECA

池上, 貴俊
早稲田大学理工学術院

高橋, 大輔
早稲田大学理工学術院

松木平, 淳太
龍谷大学理工学部

https://doi.org/10.15017/23449

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 23AO-S7 (3), pp.13-18, 2012-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.23AO-S7
「非線形波動研究の進展 — 現象と数理の相互作用 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.23AO-S7

Progress in nonlinear waves — interaction between experimental and mathematical aspects

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 27 - 29, 2011

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 3 (pp. 13 - 18)

束とECA

池上　貴俊（IKEGAMI Takatoshi），高橋　大輔（TAKAHASHI Daisuke），松木平　淳太（MATSUKIDAIRA Junta）

（Received 2 February 2012; accepted 6 February 2012）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2012

束と ECA

早稲田大学理工学術院　池上貴俊　(IKEGAMI Takatoshi)
早稲田大学理工学術院　高橋大輔　(TAKAHASHI Daisuke)
龍谷大学理工学部　松木平淳太　(MATSUKIDAIRA Junta)

概　要　Elementary Cellular Automaton (ECA) は単純な構成で定義される 2 進の時間発展系であるが，その解には豊かな数理構造が存在している．本研究では，これら ECA に対して束論の立場から解析を行い，束の演算によって初期値問題が解けるクラスとはどのようなものかを議論する．

1　束とマックスープラス演算

順序集合 L の任意の 2 元 x, y に対して $\{x,y\}$ の上限，下限が存在するとき L を**束** (lattice) という [1]．この上限，下限をとる操作を

$$x \vee y = \sup\{x,y\}, \qquad x \wedge y = \inf\{x,y\}$$

という記号で定めておく．このとき以下の法則が成立する．

（交換法則）　$x \vee y = y \vee x, \qquad x \wedge y = y \wedge x$
（結合法則）　$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \qquad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
（吸収法則）　$x \vee (y \wedge x) = (x \vee y) \wedge x = x$
（冪等法則）　$x \vee x = x \wedge x = x$

さらに，束 L において次の互いに同等な条件（分配法則）が成り立つとき，L を**分配束** (distributive lattice) という．

a)　$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
b)　$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
c)　$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$

さらに，L の任意の元 x に対して以下の性質をもつ対応関係 $\bar{x}$ を**共役** (conjugate) と呼ぶことにする．

$$x \in L \text{ なら } \bar{x} \in L, \qquad \bar{\bar{x}} = x, \qquad x \le y \text{ なら } \bar{x} \ge \bar{y}$$

定義より，$\bar{x}, \bar{y}$ は x, y と順序が逆になるのでただちに次が成り立つ．

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}, \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

以降では，紛れがない限り，共役が定義された分配束のことを単に束と呼ぶことにする．

L を実数体 $\mathbb{R}$ とし，順序を通常の実数の大小関係で与えると，

$$x \vee y = \max(x,y), \qquad x \wedge y = \min(x,y)$$

となる．共役の定義はいろいろ考えられるが，ここでは

$$\bar{x} = 1 - x$$

としておく．すると，上で与えた束における定義や法則は，$\mathbb{R}$ 上のマックスープラス演算によって以下のように読み替えることができる．

$$
\begin{array}{ll}
\text{（交換法則）} & \max(x,y)=\max(y,x), \qquad \min(x,y)=\min(y,x) \\
\text{（結合法則）} & \begin{cases} \max(x,\max(y,z))=\max(\max(x,y),z) \\ \min(x,\min(y,z))=\min(\min(x,y),z) \end{cases} \\
\text{（吸収法則）} & \max(x,\min(y,x))=\min(\max(x,y),x)=x \\
\text{（冪等法則）} & \max(x,x)=\min(x,x)=x \\
\text{（分配法則）} & \begin{cases} \max(x,\min(y,z))=\min(\max(x,y),\max(x,z)) \\ \min(x,\max(y,z))=\max(\min(x,y),\min(x,z)) \\ \min(\max(x,y),\max(y,z),\max(z,x)) \\ \qquad\qquad =\max(\min(x,y),\min(y,z),\min(z,x)) \end{cases} \\
\text{（共役の法則）} & \begin{cases} 1-\max(x,y)=\min(1-x,1-y) \\ 1-\min(x,y)=\max(1-x,1-y) \end{cases}
\end{array}
$$

逆に，マックスープラス演算によって方程式が与えられ，解，保存量，漸近挙動等の証明がすべて上記の諸法則のみを用いてなされる場合には，それらは読み替えによって直ちに束でも成立する．もちろんその逆の関係も成り立つ．

たとえばマックスープラス演算の以下の等式を考えよう．

$$\max(x,\min(\max(x,y),z))=\max(x,\min(y,z))$$

この等式に対応する束演算は

$$x\vee((x\vee y)\wedge z)=x\vee(y\wedge z)$$

である．束の基本法則を用いれば

$$\text{左辺}=x\vee((x\vee y)\wedge z)\overset{\text{分配}}{=}x\vee((x\wedge z)\vee(y\wedge z))\overset{\text{結合}}{=}(x\vee(x\wedge z))\vee(y\wedge z)\overset{\text{吸収}}{=}x\vee(y\wedge z)=\text{右辺}$$

のように等式が証明できる．ということはマックスープラス演算でも読み替えによって同じ証明が成り立つのである．

以上のことは，超離散化やマックスープラス演算が対象とする系は実は非常に広いクラスであるということをも意味している．

2　セルオートマトンと束

時間 1 階・状態 2 値・3 近傍の $1+1$ 次元セルオートマトンである Elementary Cellular Automaton (ECA) について，束の構造が解に存在するものを探索する [2]．時間発展ルールは j をサイト番号，n を時刻とし，

$$u_j^{n+1}=f(u_{j-1}^n,u_j^n,u_{j+1}^n)$$

という形で与えられる．また，初期値問題を解くための初期時刻を $n=0$ とする．u は常に 0, 1 の値を取り，f は 0, 1 を返す 2 値関数である．f を同定するルール番号は

$$\sum_{0\le a,b,c\le 1} f(a,b,c)2^{4a+2b+c}$$

で与えられ，全部で 256 種類あるが，$j\to -j$（左右反転），$j\to j+c$（ガリレイ変換），$u\to 1-u$（共役）などの変換を通じて同一視できるルールをひとつで代表させると，独立なルールとして 81 種類が残る．なお，以下ではたとえばルール番号 168 の ECA を ECA168 というように略記する．

これらルールのうちで，束による方程式の表現によって初期値問題が解けたものは以下の 30 種類である [3]．ただし，$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$ など，束以前の初等的な方程式で定義されるものも含めている．さらに，ECA184, 29 は超離散 Cole–Hopf 変換により解けるタイプの束の方程式に帰着するのでこれを含めれば 32 種類が解けたことになる．ただし，ルールを束の方程式で表す場合，一意的にその表現が決まるわけではない．ここでは，0, 1 の 2 進値に限定すると ECA のルールに一致する束の方程式のうちで，初期値問題が解けることのできたものをリストアップしている．

$f(a,b,c)$	ルール番号
0	0
a	240
$\overline{a}$	15
$a \wedge b$	192
$\overline{a} \wedge b$	12
$\overline{a} \wedge \overline{b}$	3
$a \wedge b \wedge c$	128
$\overline{a} \wedge b \wedge c$	8
$a \wedge \overline{b} \wedge c$	32
$\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c$	2
$\overline{a} \wedge b \wedge \overline{c}$	4
$\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c}$	1
$(a \vee b) \wedge c$	168
$(\overline{a} \vee b) \wedge c$	138
$(a \vee \overline{b}) \wedge c$	162
$(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge c$	42
$(\overline{a} \vee b) \wedge \overline{c}$	69
$(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge \overline{c}$	21
$(a \vee c) \wedge b$	200
$(\overline{a} \vee c) \wedge b$	140
$(a \vee c) \wedge \overline{b}$	50
$(\overline{a} \vee \overline{c}) \wedge b$	76
$(\overline{a} \vee \overline{c}) \wedge \overline{b}$	19
$(a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$	232
$(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee \overline{c}) \wedge (\overline{c} \vee \overline{a})$	23
$(a \vee \overline{b}) \wedge (\overline{b} \vee c) \wedge (c \vee a)$	178
$(b \vee (a \wedge c)) \wedge (\overline{b} \vee (\overline{a} \wedge \overline{c}))$	36
$(a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b) \equiv a \oplus b$	60
$a \oplus b \oplus c$	150
$\overline{a \oplus b \oplus c}$	105

おおむね束の演算の単純な組み合わせのものが解けている．同程度の複雑さで解けていないものに $(a \vee b) \wedge \overline{c}$（ECA84），$(a \vee \overline{b}) \wedge \overline{c}$（ECA81), $(\overline{a} \vee c) \wedge \overline{b}$（ECA35），$(\overline{a} \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$（ECA172）などがある．残りの未解決なものはより複雑なクラスに属し，ECA としての解の漸近挙動では

- 初期値に依存する有限ステップで定数解・定常解・周期解になる
- 三角波が生成される

となるタイプのものが多い．興味深いのは，ECA の初期値問題の解きやすさは対応する束演算の複雑さに強く関係し，解の漸近挙動すなわちクラス 1（定数解），2（定常解），3（三角波），4（カオスの縁）という ECA の解の漸近挙動の分類にはあまり関係しないということである．

3　解の例

前節で挙げた解けたルールから 2 つピックアップして解の詳細について述べる．

3.1　$f(a,b,c) = \overline{a} \wedge b$（ECA12）

時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = \overline{u_{j-1}^n} \wedge u_j^n$$

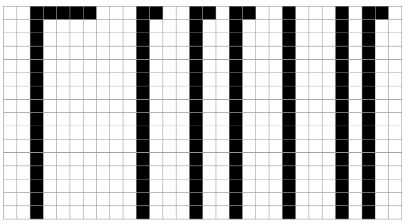
である．u_j^2 は

$$\begin{aligned} u_j^2 &= \overline{u_{j-1}^1} \wedge u_j^1 = \overline{(\overline{u_{j-2}^0} \wedge u_{j-1}^0)} \wedge (\overline{u_{j-1}^0} \wedge u_j^0) \\ &= (u_{j-2}^0 \vee \overline{u_{j-1}^0}) \wedge (\overline{u_{j-1}^0} \wedge u_j^0) = ((u_{j-2}^0 \vee \overline{u_{j-1}^0}) \wedge \overline{u_{j-1}^0}) \wedge u_j^0 \\ &= \overline{u_{j-1}^0} \wedge u_j^0 = u_j^1 \end{aligned}$$

となり，$n = 1$ で $u_j^1 = \overline{u_{j-1}^0} \wedge u_j^0$ を与えた後は，静止解になることがわかる．対応するマックスープラス方程式は

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_j^n)$$

であり，初期値を 0, 1 に限定すると ECA12 になる．以下にこの方程式の解の例を 2 つ示す．



(a) 0, 1 を初期値に取った場合．□, ■はそれぞれ 0, 1 を表す．

-2	6	0	-6	-9	5	5	1
-2	3	-5	-6	-9	5	-4	-4
-2	3	-5	-6	-9	5	-4	-4
-2	3	-5	-6	-9	5	-4	-4

(b) より広い整数値を初期値にとった場合．$n = 1$ で静止解になっている．

3.2　$f(a,b,c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a)$（ECA232）

時間発展方程式は

$$u_j^{n+1} = (u_{j-1}^n \wedge u_j^n) \vee (u_j^n \wedge u_{j+1}^n) \vee (u_{j+1}^n \wedge u_{j-1}^n)$$

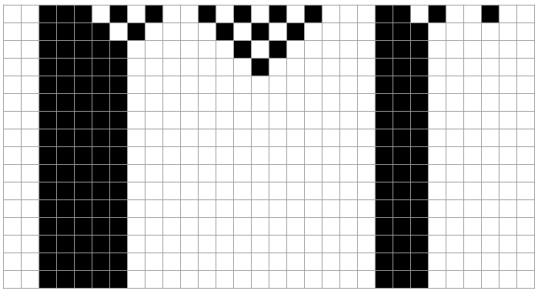
であり，一般解は

$$\begin{aligned} u_j^n = &\Big(\bigvee_{0 \le k \le n-1} (\underline{u_{j-k-1}^0} \wedge u_{j-k}^0 \wedge u_{j-k+2}^0 \wedge \cdots \wedge u_{j+k-2}^0 \wedge u_{j+k}^0) \Big) \\ &\vee \Big(\bigvee_{0 \le k \le n-1} (u_{j-k}^0 \wedge u_{j-k+2}^0 \wedge \cdots \wedge u_{j+k-2}^0 \wedge u_{j+k}^0 \wedge \underline{u_{j+k+1}^0}) \Big) \\ &\vee (u_{j-n}^0 \wedge u_{j-n+2}^0 \wedge \cdots \wedge u_{j+n-2}^0 \wedge u_{j+n}^0) \end{aligned}$$

となる．上式の右辺で項の並びの規則性が壊れている部分に下線を引いてある．この解が方程式を満足することの証明は長くなるので省略する．

対応するマックスープラス方程式の解の $n \gg 0$ における漸近挙動については，以下のように大まかに場合分けできる．ただしサイト j については周期境界条件を仮定する．

- （初期値を 0, 1 に限定する場合）
  初期値がすべて 1 ならそのまま，すべて 0 でもそのまま．初期値の 1 が孤立しているとき，01 の繰り返しならばチェッカーボードパターン．そうでないなら $n \gg 0$ ですべて 0 になる．初期値に連続する 1 があるとき，連続する 1 はそのまま変わらず，$n \gg 0$ で静止解となる．
- （初期値を 0, 1 に限定しない場合）
  周期境界条件の場合，$n \gg 0$ で上の解の最後の項 $(u^0_{j-n} \wedge u^0_{j-n+2} \wedge \cdots \wedge u^0_{j+n-2} \wedge u^0_{j+n})$ が u^n_j に効くか効かないかで結果が分かれる．効く場合は $n \gg 0$ でチェッカーボードパターンとなる．効かないなら $n \gg 0$ で静止解 $u^{n+1}_j = u^n_j$ となる．



(a) 0, 1 を初期値に取った場合.

-1	5	-2	5	-5	3	-3	3	-5	4	-8	7	-7	9	-3	9	-5	7	-7	2
2	-1	5	-2	3	-3	3	-3	3	-5	4	-7	7	-3	9	-3	7	-5	2	-1
-1	2	-1	3	-2	3	-3	3	-3	3	-5	4	-3	7	-3	7	-3	2	-1	2
2	-1	2	-1	3	-2	3	-3	3	-3	3	-3	4	-3	7	-3	2	-1	2	-1
-1	2	-1	2	-1	3	-2	3	-3	3	-3	3	-3	4	-3	2	-1	2	-1	2
2	-1	2	-1	2	-1	3	-2	3	-3	3	-3	3	-3	2	-1	2	-1	2	-1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	3	-2	3	-3	3	-3	2	-1	2	-1	2	-1	2
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	3	-2	3	-3	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	3	-2	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1
-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2
2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1	2	-1

(b) より広い整数値を初期値に取った場合．-1 と 2 のチェッカーボードパターンに収束する．

-4	-6	-2	9	-5	2	0	9	-3	9	-4	6	9	-7	-6	-9	-6	-3	7	-7
-6	-4	-2	-2	2	0	2	0	9	-3	6	6	6	-6	-7	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	2	0	2	0	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	2	0	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4
-4	-4	-2	-2	0	0	0	2	2	6	6	6	6	-6	-6	-6	-6	-3	-3	-4

(c) 静止解に収束する場合.

4　おわりに

ECA は 2 進ルール表で定義される時間発展系である．ECA のみを対象にして解の挙動解析を行うには，もちろん 2 進ルールで十分である．しかしながら，そこに潜む数理的メカニズムを把握し，デジタル系で何が起こっているのかを理解するには，解の 0, 1 パターンをにらむだけでは証拠が少なすぎ，結論への道筋の自由度が高すぎるように思う．

本研究では，2 進値から実数値へ，さらに束という一般の順序集合へと，ルールを昇華させることで解が満たす基本構造を知ることができた．個々のソリトン方程式を支配する統一的な可積分構造のように，ECA にもより大きな数理構造が存在するのではないだろうか．

参考文献

[1] 中山正: 束論, 岩波書店

[2] S.Wolfram: *A New Kind of Science*, Wolfram Media

[3] 池上貴俊: “Elementary cellular automaton の初期値問題の max-plus 解析”, RIMS 講究録別冊に投稿中