九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

超離散戸田方程式の解のグラフによる構成

高垣, 知哲
京都大学大学院情報学研究科

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/23422

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (38), pp.242-247, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 38 (pp. 242 - 247)

超離散戸田方程式の解のグラフによる構成

高垣　知哲（TAKAGAKI Tomoaki），上岡　修平（KAMIOKA Shuhei）

（Received 16 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

超離散戸田方程式の解のグラフによる構成

京都大学大学院情報学研究科　高垣知哲　(TAKAGAKI Tomoaki)
上岡修平　(KAMIOKA Shuhei)

概　要
離散戸田方程式の行列式解を超離散化することにより, 超離散戸田方程式の半無限格子上の解を与える. そのときに離散戸田方程式の初期値問題の解を組合せ論的に書き下すことで, 超離散化に伴う課題を克服する. また, この過程で得られた解の組み合わせ論的証明も与える.

1　はじめに

超離散戸田方程式は, 典型的な離散可積分系である離散戸田方程式に超離散化を行うことで得られる方程式である.

既存研究では, 超離散戸田方程式の有限格子上の解を構成できることが知られていた（Nagai-Tokihiro-Satsuma[2]）. そこで本研究では, 離散戸田方程式の半無限格子上の解を超離散化することにより, 超離散戸田方程式の半無限格子上の解を与えることを目的とする. その際, 次の点が問題となる.

減算を含む方程式や解は超離散化することができない. この問題は一般に超離散化の負の問題と呼ばれ, 超離散可積分系の研究における重要な主題の一つである.

離散戸田方程式の半無限格子上の解は行列式で表されるが, 行列式はその交代性から減算を含むため, 一般にはそのままの形では超離散化できない. 従って行列式解の超離散化を実現するには, 行列式の成分を適切に変換して, 展開したときに減算が現れないようにする必要がある.

ところで, 数え上げ組合せ論の研究者である Viennot は, 重み付き経路に関する一連の研究 [3, 4, 5] の中で　Dyck 路の非交叉的な配置に対する数え上げ問題を考え, 離散戸田方程式の行列式解を, 減算を含まないある組合せ論的量で表せることを示した. これを超離散化することにより, 超離散戸田方程式の解が得られると期待される.

本研究では, このアイデアに基づき次の事実を明らかにする. まず, 離散戸田方程式の半無限格子上の解を超離散化する. そして, その解が半無限格子上の超離散戸田方程式を満たすことを, 組合せ論的に証明する.

本書の構成として, 2 節では離散戸田方程式とその行列式解を述べる. また, 超離散化の具体的な手法と, それにより得られる超離散戸田方程式について述べる. 3 節では, 離散戸田方程式と組合せ論との関係を述べる. 具体的には, 離散戸田方程式の初期値問題の解を, Dyck 路の非交叉的な配置に対する重み和の形で表示し, それが確かに解であることを組合せ論的に証明する. 4 節では, 3 節の議論の超離散類似の形で, 本研究の主目的である半無限格子上の超離散戸田方程式の解を構成する.

2　離散戸田方程式

離散戸田方程式は非線形の離散時間力学系であり, 時間発展を定める方程式

$$q_n^{(t+1)} + e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)}, \quad q_{n-1}^{(t+1)} e_n^{(t+1)} = q_n^{(t)} e_n^{(t)} \tag{2.1}$$

により記述される. この方程式は, 従属変数変換

$$q_n^{(t)} = \frac{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}}{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)}}, \quad e_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_{n-1}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_n^{(t+1)}} \tag{2.2}$$

により, 変数 $\tau_n^{(t)}$ に関する方程式（**双線型形式**）

$$\tau_n^{(t-1)}\tau_n^{(t+1)} = (\tau_n^{(t)})^2 + \tau_{n+1}^{(t-1)}\tau_{n-1}^{(t+1)} \tag{2.3}$$

に書き換えることができる. 式 (2.3) は Hankel 行列式で記述される次の解をもつ:

$$\begin{aligned}
&\tau_n^{(t)} = \left|\mu_{i+j}^{(t)}\right|_{i,j=0}^{n-1} = \left|\mu_{t+i+j}\right|_{i,j=0}^{n-1} = \begin{vmatrix} \mu_t & \mu_{t+1} & \cdots & \mu_{t+n-1} \\ \mu_{t+1} & \mu_{t+2} & \cdots & \mu_{t+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{t+n-1} & \mu_{t+n} & \cdots & \mu_{t+2n-2} \end{vmatrix}, \quad n \geq 1, \\
&\tau_0^{(t)} = 1, \quad \tau_{-1}^{(t)} = \tau_{-2}^{(t)} = \cdots = 0, \quad \mu_n := \mu_n^{(0)}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ただし $\mu_n^{(t)}$ は, **分散関係式**

$$\mu_n^{(t+1)} = \mu_{n+1}^{(t)}$$

を満たす任意の関数である.

従属変数 $\tau_n^{(t)}$ は**タウ関数**と呼ばれ, 式 (2.4) を従属変数変換の式 (2.2) に代入することにより, 離散戸田方程式 (2.1) の半無限格子 $n = 0, 1, 2, \ldots$ 上の解が得られる. ただし境界条件として $e_0^{(t)} = 0$ を要する. 以下, 離散戸田方程式と述べる場合は, この半無限格子上において考えることにする.

3 超離散戸田方程式

超離散戸田方程式は, 離散戸田方程式を超離散化することで得られる. その具体的な手続きについて述べる. 離散戸田方程式 (2.1) の従属変数 $q_n^{(t)}, e_n^{(t)}$ と双線型形式 (2.3) の $\tau_n^{(t)}$ に対して, 次の変数変換により新たな変数 $Q_n^{(t)}, E_n^{(t)}, T_n^{(t)}$ を導入する:

$$Q_n^{(t)} = -\varepsilon \log q_n^{(t)}, \quad E_n^{(t)} = -\varepsilon \log e_n^{(t)}, \quad T_n^{(t)} = -\varepsilon \log \tau_n^{(t)}.$$

ただし $\varepsilon > 0$ であり, 離散戸田方程式の初期値は $q_n^{(0)} > 0$, $e_n^{(0)} > 0$ を満たすとする.

超離散化を施す前に, 補助変数

$$d_n^{(t)} = q_n^{(t)} - e_n^{(t+1)}$$

を導入し, 離散戸田方程式 (2.1) を

$$q_n^{(t+1)} = d_n^{(t)} + e_{n+1}^{(t)}, \quad e_n^{(t+1)} = \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}} e_n^{(t)}, \quad d_n^{(t)} = \frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}} d_{n-1}^{(t)}$$

のように書き換えておく. 超離散化の公式

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\left(\mathrm{e}^{-A/\varepsilon} + \mathrm{e}^{-B/\varepsilon}\right) = \max(-A, -B) = -\min(A, B), \\
&\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log\left(\mathrm{e}^{-A/\varepsilon} \times \mathrm{e}^{-B/\varepsilon}\right) = -(A + B)
\end{aligned}$$

に注意して，$\varepsilon \to +0$ とすると

$$
\begin{aligned}
Q_n^{(t+1)} &= \min\left(D_n^{(t)}, E_{n+1}^{(t)}\right), \\
E_n^{(t+1)} &= Q_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + E_n^{(t)}, \\
D_n^{(t)} &= Q_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + D_{n-1}^{(t)}
\end{aligned}
$$

が得られる. これより $D_n^{(t)}$ を消去すると, $Q_n^{(t)}$ と $E_n^{(t)}$ のみで構成される**超離散戸田方程式**

$$
Q_n^{(t+1)} = \min\left(\sum_{k=0}^{n}\left(Q_k^{(t)} - Q_{k-1}^{(t+1)}\right), E_{n+1}^{(t)}\right), \quad E_n^{(t+1)} = Q_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + E_n^{(t)} \tag{3.1}
$$

が得られる. ただし境界条件は $Q_{-1}^{(t)} = 0, E_0^{(t)} = \infty$ である.

離散戸田方程式の双線型形式 (2.3) の超離散類似も考えることができる. 離散戸田方程式の場合の従属変数変換 (2.2) を参考にして, 変数変換

$$
Q_n^{(t)} = T_n^{(t)} + T_{n+1}^{(t+1)} - T_{n+1}^{(t)} - T_n^{(t+1)}, \quad E_n^{(t)} = T_{n+1}^{(t)} + T_{n-1}^{(t+1)} - T_n^{(t)} - T_n^{(t+1)} \tag{3.2}
$$

により変数 $T_n^{(t)}$ を導入する. このとき超離散戸田方程式 (3.1) は

$$
T_n^{(t-1)} + T_n^{(t+1)} = \min\left\{2T_n^{(t)}, T_{n+1}^{(t-1)} + T_{n-1}^{(t+1)}\right\}, \quad n \geq 1,
$$

と書き直される（境界条件は $T_{-1}^{(t)} = \infty, T_0^{(t)} = 0$）. これが超離散戸田方程式の双線型形式である.

4 Dyck 路とその重み

Dyck 路と呼ばれる経路を導入する. 有向グラフ G を節点集合

$$
V(G) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n, \quad V_n = \{(n+2i, n); i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2,
$$

と枝集合

$$
\begin{aligned}
E(G) &= \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n, \\
U_n &= \{((i,n),(i+1,n+1)) \in V_n \times V_{n+1}\}, \\
D_n &= \{((i,n),(i+1,n-1)) \in V_n \times V_{n-1}\},
\end{aligned}
$$

により定義する. この有向グラフ G 上の経路を *Dyck* **路**という．枝集合 U_n, D_n に含まれる枝をそれぞれ上枝，下枝と呼ぶことにする. Dyck 路のうち節点 (i,j), (i',j') をそれぞれ始点, 終点とするものの全体を ${}_{(i,j)}G_{(i',j')}$ と書く.

Dyck 路の各枝に**重み**を導入する. つまりグラフ G の枝集合 $E(G)$ 上の写像 $w : E(G) \to \mathbb{R}$ を

$$
w(e) = \begin{cases} 1, & e \in U_n, \\ a_n, & e \in D_n \end{cases}
$$

と定義する. さらに枝の重みを使って Dyck 路の重みを

$$
w(\pi) = \prod_{e \in E(\pi)} w(e)
$$

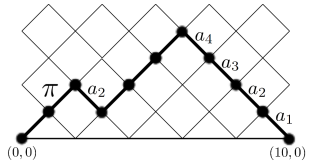

図 1: Dyck 路とその重み ($w(\pi) = a_q(a_2)^2 a_3 a_4$).

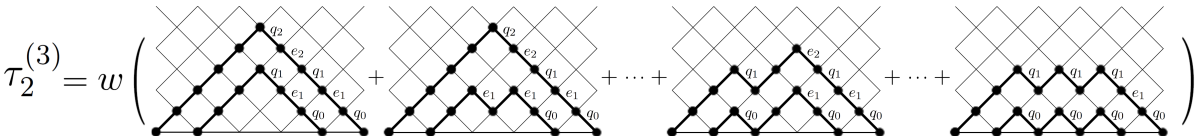

図 2: 非交叉 Dyck 路による $\tau_n^{(t)}$ の構成 ($n = 2, t = 3$).

と定める. つまり, Dyck 路 π に含まれる全枝の重みの積である (図 1 参照).

Dyck 路の重み和として, 特に

$$\mu_n = \sum_{\pi \in_{(0,0)} G_{(2n,0)}} w(\pi)$$

を考える. つまり始点 $(0,0)$, 終点 $(2n,0)$ のすべての Dyck 路の重みの和を表す.

5 非交叉 Dyck 路による解の構成：離散戸田方程式

Viennot は, 重み付き経路に関する一連の研究 [3, 4, 5] の中で, Dyck 路の非交叉的な配置に対する数え上げ問題を考え, 次のことを明らかにした.

i) Dyck 路の非交叉的な配置をすべて数え上げるとき, その重みの和はある組合せ論的量を成分にもつ行列式に等しい（Gessel-Viennot の補題）.

ii) その行列式は qd アルゴリズムの漸化式を使って計算することができる.

この Viennot の研究を可積分系研究の視点から検討すると, 次の事実が分かる.

qd アルゴリズムの漸化式は, 離散戸田方程式に等しい. したがって Viennot が扱った組合せ論的な行列式は, 離散戸田方程式の行列式解 $\tau_n^{(t)}$ に等しい. よって $\tau_n^{(t)}$ は, Dyck 路の非交叉的な配置に対する重み和の形で表示することができる. このことを定式化すると次のようになる:

定理 1. Dyck 路の下枝の重みを, 離散戸田方程式の初期値で与える. すなわち

$$a_{2n+1} = q_n^{(0)}, \quad a_{2n+2} = e_{n+1}^{(0)}, \quad n \geq 0.$$

このとき, 離散戸田方程式 (2.1) の初期値問題の解は, タウ関数

$$\tau_n^{(t)} = \sum_{(\pi_0,\ldots,\pi_{n-1})} w(\pi_0)\ldots w(\pi_{n-1})$$

と式 (2.2) により与えられる. ただし和は, 次の条件を満たす Dyck 路の n 本組 $(\pi_0,\ldots,\pi_{n-1})$ 全てにわたってとる.

i) π_i は $(-2i,0)$ を始点とし $(2t+2i,0)$ を終点とする.

ii) 相異なる二つの π_i, π_j は非交叉的である. つまり節点を共有しない.

この $\tau_n^{(t)}$ が, 離散戸田方程式の双線型形式

$$\tau_n^{(t-1)}\tau_n^{(t+1)} = (\tau_n^{(t)})^2 + \tau_{n+1}^{(t-1)}\tau_{n-1}^{(t+1)}, \quad n \geq 1 \tag{5.1}$$

を満たすことを, 組合せ論的手法で示す. ただし, 以下では略証のみ述べる.

略証. 証明手法は Fulmek-Kleber [1] の Schur 関数における議論を参考にした.

式 (5.1) の各項を, 組合せ論的に表現する. $\Theta_n^{(t)}$ を定理 1 の二つの条件を満たす Dyck 路の n 本組 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \ldots, \pi_{n-1})$ の全体とする. このとき, 定理 1 よりタウ関数は

$$\tau_n^{(t)} = \sum_{\boldsymbol{\pi} \in \Theta_n^{(t)}} w(\pi_0) \ldots w(\pi_{n-1})$$

で与えられる. 式 (5.1) の左辺は

$$\tau_n^{(t-1)} \tau_n^{(t+1)} = \left(\sum_{\boldsymbol{\pi} \in \Theta_n^{(t-1)}} w(\pi_0) \ldots w(\pi_{n-1}) \right) \times \left(\sum_{\boldsymbol{\pi}' \in \Theta_n^{(t+1)}} w(\pi'_0) \ldots w(\pi'_{n-1}) \right)$$

となり, 右辺も同様に

$$(\tau_n^{(t)})^2 + \tau_{n+1}^{(t-1)} \tau_{n-1}^{(t+1)} = \sum_{(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') \in \Theta_n^{(t)} \times \Theta_n^{(t)} \cup \Theta_{n+1}^{(t-1)} \times \Theta_{n-1}^{(t+1)}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} w(\pi_i) \times \prod_{j=0}^{n-1} w(\pi'_j) \right)$$

と表すことができる. したがって, 式 (5.1) は

$$\sum_{(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') \in \Theta_n^{(t-1)} \times \Theta_n^{(t+1)}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} w(\pi_i) \times \prod_{j=0}^{n-1} w(\pi'_j) \right) = \sum_{(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') \in \Theta_n^{(t)} \times \Theta_n^{(t)} \cup \Theta_{n+1}^{(t-1)} \times \Theta_{n-1}^{(t+1)}} \left(\prod_{i=0}^{n-1} w(\pi_i) \times \prod_{j=0}^{n-1} w(\pi'_j) \right)$$

と書き直すことができる. 両辺の和の範囲に注目したとき, 非交叉 Dyck 路の集合 $\Theta_n^{(t-1)} \times \Theta_n^{(t+1)}$ に対し, 非交叉 Dyck 路のペアの重みを変えない全単射

$$\psi : \Theta_n^{(t-1)} \times \Theta_n^{(t+1)} \to \Theta_n^{(t)} \times \Theta_n^{(t)} \cup \Theta_{n+1}^{(t-1)} \times \Theta_{n-1}^{(t+1)}$$

を定義することができればよい.

非交叉 Dyck 路のペアを, 2 色のグラフで描き, 重ね合わせたものを考える. この 2 色グラフ上である規則に従い 1 本の路を取り, その上で色を取り換える操作を施すと, この 2 色グラフから新たな 2 色グラフを得ることができる. この操作が求める全単射になっている（図 3）. □

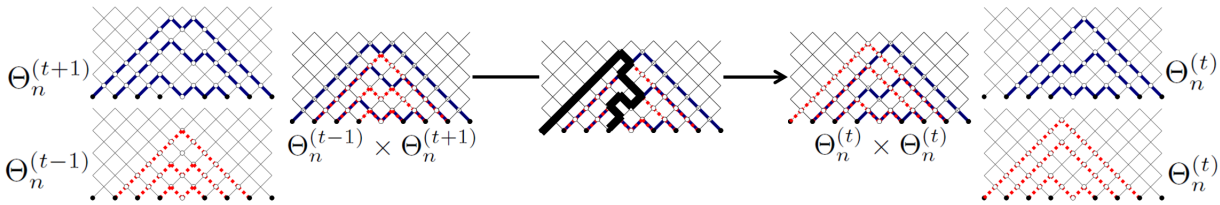

図 3: 非交叉 Dyck 路のペアの重みを変えない全単射.

6 非交叉 Dyck 路による解の構成：超離散戸田方程式

ここでは, Dyck 路の重みを

$$W(\pi) = \sum_{e \in E(\pi)} w(e)$$

と定める. つまり, Dyck 路 π に含まれる全枝の重みの和である.

定理 2. Dyck 路の下枝の重みを, 超離散戸田方程式の初期値で与える. すなわち

$$Q_n^{(0)} = a_{2n+1}, \quad E_{n+1}^{(0)} = a_{2n+2}, \quad n \geq 0.$$

このとき, 超離散戸田方程式 (3.1) の初期値問題の解は, 式 (3.2) と

$$T_n^{(t)} = \min_{(\pi_0,\ldots,\pi_{n-1})} \left(\sum_{i=0}^{n-1} W(\pi_i) \right)$$

で与えられる. ただし min は, 次の条件を満たす Dyck 路の n 本組 $(\pi_0,\ldots,\pi_{n-1})$ 全ての中から採る.

i) π_i は $(-2i,0)$ を始点とし $(2t+2i,0)$ を終点とする.

ii) 相異なる二つの π_i,π_j は非交叉的である. つまり節点を共有しない.

iii) Dyck 路 π_i は, 同じ高さの山が連なる形になる.

この証明は, 離散のときの証明とほぼ同じ議論で与えることができる. ただし iii) は, 非交叉 Dyck 路の n 本組の中で重みが最小になりうる形を考えたときに, その非交叉性から導くことができる.

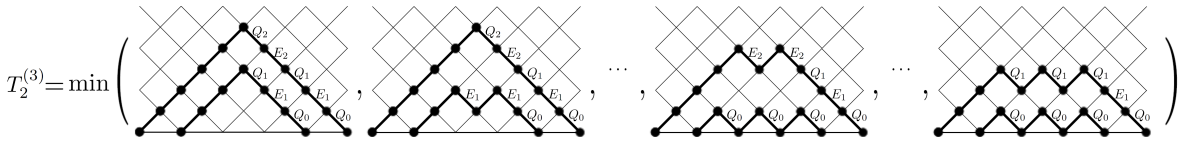

図 4: 非交叉 Dyck 路による $T_n^{(t)}$ の構成 $(n=2, t=3)$.

7 おわりに

本研究では Viennot [5] に基づき, 以下のことを新たに述べた:
i) 半無限格子上の離散戸田方程式の行列式解を組合せ論的量として表し, 得られた解に対する組合せ論的証明を与えた. ii) その解を超離散化したものが半無限格子上の超離散戸田方程式の解であることを, 組合せ論的証明により示した. 今後の課題としては, 既存の他の超離散可積分系に対する組合せ論的な解の構成について考えることができる.

参考文献

[1] M. Fulmek, M. Kleber. *Bijective proofs for Schur function identities which imply Dodgson's condensation formula and Plucker relations*, Electron. J. Combin. **8** (2001), no. 1, Research Paper 16, 22 pp.

[2] A. Nagai, T. Tokihiro and J. Satsuma, *Ultra-discrete Toda molecule equation*, Phys. Lett. A **244** (1998), no. 5, 383–388.

[3] G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, Notes de conférences données à l'UQAM, Montréal, 1983.

[4] G. Viennot, *A combinatorial theory for general orthogonal polynomials with extensions and applications*, Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc, 1984), 139–157, Lecture Notes in Math., 1171, Springer, Berlin, 1985.

[5] X. G. Viennot, *A combinatorial interpretation of the quotient-difference algorithm*, Formal power series and algebraic combinatorics (Moscow, 2000), 379–390, Springer, Berlin, 2000.