九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

各箱の容量が一般の運搬車付き箱玉系と有限格子上の超離散系

前田, 一貴
京都大学大学院情報学研究科

辻本, 諭
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/23418

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (34), pp.220-225, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 ── 現象とモデル化 ──」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 34 (pp. 220 - 225)

各箱の容量が一般の運搬車付き箱玉系と有限格子上の超離散系

前田　一貴（MAEDA Kazuki），辻本　諭（TSUJIMOTO Satoshi）

（Received 14 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

各箱の容量が一般の運搬車付き箱玉系と有限格子上の超離散系

京都大学大学院情報学研究科　前田一貴　(MAEDA Kazuki)
京都大学大学院情報学研究科　辻本　諭　(TSUJIMOTO Satoshi)

概　要　最近の研究により，「超離散戸田分子方程式が箱玉系の時間発展を記述する」というよく知られた結果を非自励化された系を考えることによって運搬車付きの場合へと拡張できることがわかっている．本稿ではこの結果をさらに各箱の容量が一般である場合へと拡張することを考え，得られた方程式が箱玉系の時間発展を記述することの証明を与える．

1　はじめに

箱玉系は離散 KdV 方程式から超離散化と呼ばれる操作によって得られる時間発展方程式で記述されるセルオートマトンである [8]．箱玉系に対しては，箱に 2 つ以上の玉を入れられるようにする（箱容量の拡張），運搬車に容量を導入する，玉に番号を付けるという 3 種類の拡張がよく知られており，これらの拡張を全て含む時間発展方程式は非自励離散 KP 方程式の簡約から導出できる [1]．

ところで，箱玉系は（非周期）有限格子上の離散戸田方程式（以下では単に有限離散戸田格子と呼ぶ）を超離散化したものによっても記述されることが知られている [3]．超離散 KdV 方程式による箱玉系の記述は従属変数で各箱に入っている玉の数を表すことによってなされていたのに対し，有限超離散戸田格子による箱玉系の記述では従属変数として各ソリトンと空き箱の列の長さをとる．本稿ではこの箱玉系の表現形式のことを「有限戸田表現」と呼ぶことにする．

これまでに，玉に番号が付いている場合への有限戸田表現の拡張は既に知られているが [7]，箱容量や運搬車容量のルールがある場合への拡張については知られていなかった．筆者らは最近，非自励化された有限離散戸田格子の超離散化を考えることで，運搬車容量ルールがある場合へと有限戸田表現の拡張ができるという結果を得た [2]．本稿では残るもう 1 つの拡張ルールである箱容量が一般に正整数の場合の有限戸田表現を与える．また，箱容量が一般であると同時に運搬車容量がある場合についても議論する．

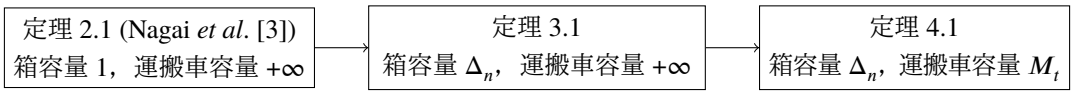

図 1　本稿のアウトライン．

2　箱容量 1 の箱玉系の有限戸田表現

有限離散戸田格子の双線型形式は

$$\tau_n^{(t-1)}\tau_n^{(t+1)} = \tau_{n+1}^{(t-1)}\tau_{n-1}^{(t+1)} + \tau_n^{(t)}\tau_n^{(t)}, \quad n,t \in \mathbb{Z}, \tag{2.1a}$$

$$\tau_{-1}^{(t)} = \tau_{-2}^{(t)} = \cdots = 0, \quad \tau_{N+1}^{(t)} = \tau_{N+2}^{(t)} = \cdots = 0, \quad \tau_0^{(t)} = 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \tag{2.1b}$$

で与えられる．従属変数変換

$$q_n^{(t)} = \frac{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t+1)}}{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_n^{(t+1)}}, \quad e_n^{(t)} = \frac{\tau_{n+1}^{(t)}\tau_{n-1}^{(t+1)}}{\tau_n^{(t)}\tau_n^{(t+1)}}, \quad d_n^{(t)} = \frac{\tau_n^{(t)}\tau_{n+1}^{(t)}}{\tau_{n+1}^{(t-1)}\tau_n^{(t+1)}}$$

により (2.1a) は

$$q_n^{(t+1)} = e_{n+1}^{(t)} + d_n^{(t+1)} \tag{2.2a}$$

に変換され，さらに恒等式として

$$e_n^{(t+1)} = e_n^{(t)}\frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}}, \quad d_n^{(t+1)} = d_{n-1}^{(t+1)}\frac{q_n^{(t)}}{q_{n-1}^{(t+1)}} \tag{2.2b}$$

が得られる．また，境界条件 (2.1b) は

$$e_0^{(t)} = e_N^{(t)} = 0, \quad d_0^{(t+1)} = q_0^{(t)} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2c}$$

となる．(2.2) は Rutishauser による dqd アルゴリズム [4] と呼ばれるものと同一の漸化式である．(2.2) は直ちに超離散化が可能で，$q_n^{(t)} = \mathrm{e}^{-Q_n^{(t)}/\varepsilon}$, $e_n^{(t)} = \mathrm{e}^{-E_n^{(t)}/\varepsilon}$, $d_n^{(t)} = \mathrm{e}^{-D_n^{(t)}/\varepsilon}$ と置いて $\varepsilon \to +0$ の極限をとれば，有限超離散戸田格子

$$Q_n^{(t+1)} = \min(E_{n+1}^{(t)}, D_n^{(t+1)}), \tag{2.3a}$$
$$E_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, \tag{2.3b}$$
$$D_n^{(t+1)} = D_{n-1}^{(t+1)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, \tag{2.3c}$$
$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = +\infty, \quad D_0^{(t+1)} = Q_0^{(t)} \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \tag{2.3d}$$

が得られる．ここで，超離散化公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} -\varepsilon \log(\mathrm{e}^{-A/\varepsilon} + \mathrm{e}^{-B/\varepsilon}) = \min(A, B)$$

を用いた．

有限超離散戸田格子 (2.3) の従属変数 $Q_n^{(t)}$, $E_n^{(t)}$ を箱玉系における次の量に対応させる．

- $Q_n^{(t)}$: 時刻 t における n 番目のソリトンの長さ ($n = 0, 1, \ldots, N-1$).
- $E_n^{(t)}$: 時刻 t における n 番目の空き箱列の長さ，すなわち $n-1$ 番目と n 番目のソリトンの間の距離 ($n = 1, 2, \ldots, N-1$).

すると (2.3c) は，時刻 t から $t+1$ への時間発展において，運搬車が玉を空き箱列に $Q_{n-1}^{(t+1)}$ 個入れて，次の玉が入った箱の列から $Q_n^{(t)}$ 個取り出す操作と対応しており，$D_n^{(t+1)}$ は運搬車に積まれている玉の数となる．このとき次が成り立つ．

定理 2.1 (Nagai *et al.* [3])**.** 有限超離散戸田格子 (2.3) は箱容量 1 の箱玉系の時間発展を記述する．

これを本稿では箱玉系の有限戸田表現と呼ぶ．図 2 が有限戸田表現の例である．

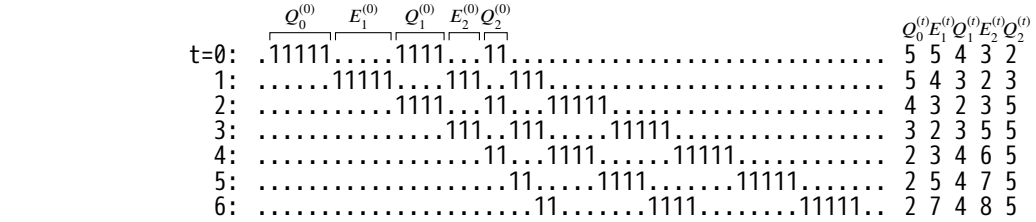

図 2　箱玉系の有限戸田表現の例．左側が箱の列で，'1' が玉の入っている箱，'.' が空き箱を表す．右側が対応する有限戸田表現で，$Q_n^{(t)}$ が n 番目のソリトンの長さ，$E_n^{(t)}$ が n 番目の空き箱列の長さを表す．

3　箱容量一般の場合への有限戸田表現の拡張

時刻 t における n 番目の箱に入っている玉の数を従属変数 $U_n^{(t)}$ としてとる場合，一般に n 番目の箱の容量が $\Delta_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ である箱玉系の時間発展方程式は

$$U_n^{(t+1)} = \min\left(\Delta_n - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)})\right) \tag{3.1}$$

で与えられる．図 3 は箱容量が一般の場合の箱玉系の例である．

では，従属変数としてソリトンや空き箱列の長さをとる場合，つまり箱容量が一般の場合の有限戸田表現はどうなるであろうか？ この問題について，まずそもそもソリトンや空き箱列の長さをどう定義すればよいかを考える必要がある．本稿では，高橋と薩摩による箱容量がある箱玉系の解析法 [6] にならい，以下の規則に従って箱容量 1 の系に変換することを考える:

```
   Δ: 3535353535353535
   ───────────────────
t=0: 15213..2........
  1: ..14.52.2.......
  2: ...13.1513......
  3: .....4..2233....
  4: ......31.2.233..
  5: .......31.2..233
```

図 3　n 番目の箱容量が Δ_n の箱玉系の例．数字が箱に入っている玉の数，‘.’ が空き箱を表す．図中の左端の箱を $n = 0$ とし，Δ_n は n が偶数のとき 3，奇数のとき 5 としてある．

(1) 最初に容量 1 の箱の列を Δ_n 毎に仕切る．以下，この区切られた 1 つの単位を（カギ括弧付きの）「箱」と呼んで，変換前の系の箱と対応づける．
(2) 左から順に走査し，玉が入っている最初の箱を見つけたら対応する「箱」にその個数分だけ玉を右詰めで入れる．
(3) 以後，順に箱を走査していき，玉の入っている各箱に対応する「箱」に対して以下の手順を繰り返す．
   - もし左の「箱」の右端に玉があれば，「箱」に玉をその個数分だけ左詰めで入れる．
   - 上記以外の場合は，「箱」に玉をその個数分だけ右詰めで入れる．

（要は，左の「箱」から玉の列が続いているようならば，それを続けるように玉を入れていく．）

この写像を展開写像と呼ぶことにする．図 4 は図 3 から展開写像で箱容量 1 の系へ変換した例である．

```
                                                                                      Q0 E1 Q1 E2 Q2
t=0: |..1|11111|11.|....1|111|.....|...|...11|...|.....|...|.....|...|.....|...|.....| 8  5  4  11 2
  1: |...|.....|..1|1111.|...|11111|11.|.....|.11|.....|...|.....|...|.....|...|.....| 5  4  7  7  2
  2: |...|.....|...|....1|111|.....|..1|11111|1..|..111|...|.....|...|.....|...|.....| 4  7  7  4  3
  3: |...|.....|...|.....|...|.1111|...|.....|.11|11...|111|111..|...|.....|...|.....| 4  9  4  3  6
  4: |...|.....|...|.....|...|.....|111|1....|...|...11|...|...11|111|111..|...|.....| 4  10 2  6  8
  5: |...|.....|...|.....|...|.....|...|..111|1..|.....|.11|.....|...|...11|111|111..| 4  8  2  11 8
```

(右側の列見出し: $Q_0^{(t)}$ $E_1^{(t)}$ $Q_1^{(t)}$ $E_2^{(t)}$ $Q_2^{(t)}$)

図 4　図 3 に展開写像を適用した例．‘|’ で「箱」の仕切りを表す．

このようにして箱容量 1 の系へと変換することで，ソリトンや空き箱列の長さを定義することが可能となる．前節と同様に，$Q_n^{(t)}, E_n^{(t)}$ で展開写像で移された先での時刻 t における n 番目のソリトン，空き箱列の長さをそれぞれ表すことにすると，例えば図 4 の右側のような数字の列が得られる．

もう 1 つ，準備として次のパラメータを導入する．

- $\Lambda_n^{(t)}$: 時刻 t における n 番目の空き箱列の左端の箱が属する「箱」の容量．

例えば図 4 ならば $\Lambda_1^{(0)} = 3, \Lambda_2^{(0)} = 5$ など．これに加えて，箱容量 1 の場合と同様の変数 $D_n^{(t+1)}$ を用いることで，以下の定理が証明される．

定理 3.1. 次の方程式が箱容量 Δ_n ($\Lambda_n^{(t)}$) の箱玉系の時間発展を記述する:

$$Q_n^{(t+1)} = \min\left(E_{n+1}^{(t)} - \max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)}), D_n^{(t+1)}\right), \tag{3.2a}$$

$$E_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - \max(0, \Lambda_n^{(t)} - D_{n-1}^{(t+1)}) + \max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)}), \tag{3.2b}$$

$$D_n^{(t+1)} = D_{n-1}^{(t+1)} - Q_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)}, \tag{3.2c}$$

$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = +\infty, \quad D_0^{(t+1)} = Q_0^{(t)} \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{3.2d}$$

$Q_n^{(t)}, E_n^{(t)}$ がそれぞれソリトン，空き箱列の長さを表すという前提の下で，全ての箱容量が 1，つまり任意の $\Lambda_n^{(t)}$ が 1 ならば，(3.2) が (2.3) と同じ時間発展をするということがすぐに言え，(3.2) は (2.3) の一般化となっていることがわかる．

定理 3.1 の証明． (2.3) と (3.2) を比較すればわかるように，鍵となるのは $\max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)})$ の形の項である．この項の持つ役割は次のように説明できる．時刻 t から $t+1$ への時間発展が $n-1$ 番目のソリトン，空き箱列の長さまで正しく定まったと仮定し，次に n 番目を定める状況を考える．図 5 のように時刻 t における $n+1$ 番目の空き

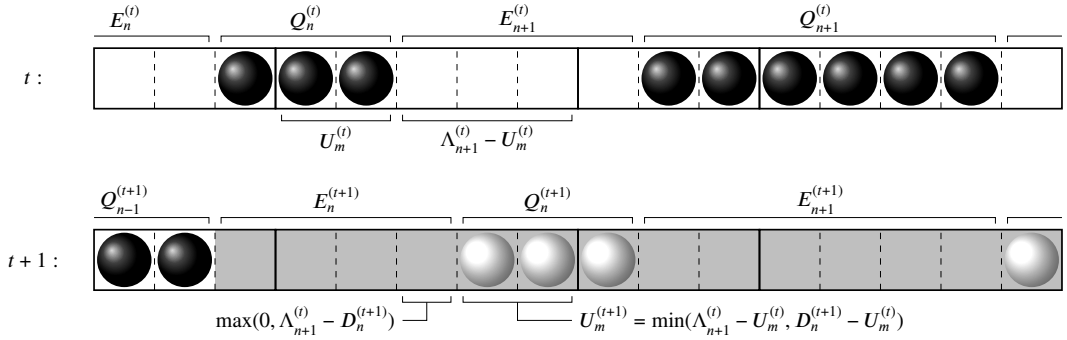

図 5　$\max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)})$ は n 番目のソリトンの時刻 t から $t+1$ への時間発展で挿入される「隙間」の大きさとなっている．図はグレー部分を決定する場面で，$D_n^{(t+1)} = 4$ の場合．実線が「箱」の区切りを表わす．

箱列の左端の「箱」の番号を m とし，時刻 t に番号 k の「箱」に入っている玉の数を $U_k^{(t)}$ とする．すると，m 番目の「箱」の容量 Δ_m は $\Lambda_{n+1}^{(t)}$ で，さらに (3.2c), (3.2d) より $D_n^{(t+1)} = \sum_{j=0}^{n} Q_j^{(t)} - \sum_{j=0}^{n-1} Q_j^{(t+1)} = \sum_{j=-\infty}^{m-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)}) + U_m^{(t)}$ が成り立っているから，これらを時間発展方程式 (3.1) に代入することで $U_m^{(t+1)} = \min(\Lambda_{n+1}^{(t)} - U_m^{(t)}, D_n^{(t+1)} - U_m^{(t)})$ を得る．これより $\Lambda_{n+1}^{(t)} - U_m^{(t)} - U_m^{(t+1)} = -\min(0, D_n^{(t+1)} - \Lambda_{n+1}^{(t)}) = \max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)})$ である．展開写像の定義より，ソリトン終端の $U_m^{(t)}$ 個の玉は左詰めで，ソリトン先端の $U_m^{(t+1)}$ 個の玉は右詰めで入っているはずなので，$\max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - D_n^{(t+1)})$ はこの間の隙間の大きさにあたることがわかる．このことを踏まえると，(3.2a), (3.2b) により確かに $Q_n^{(t+1)}, E_n^{(t+1)}$ が正しく定まることがわかり，帰納法により定理の主張が示される．　∎

4　箱容量が一般で運搬車容量がある場合への有限戸田表現の拡張

定理 3.1 の結果を，さらに時刻 t から $t+1$ への発展時の運搬車容量が M_{t+1} である場合に拡張する．この構成には，従来とは異なる運搬車ルールである「長さ制限」という概念 [2] が必要になる．

長さ制限変数を含む運搬車付き箱玉系の時間発展方程式は次で与えられる:

$$\overline{U}_n^{(t+1)} = \min(\Delta_n - U_n^{(t)}, \overline{Z}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{U}_{n-1}^{(t+1)}), \tag{4.1a}$$

$$\overline{Z}_n^{(t+1)} = \min(\overline{Z}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{U}_{n-1}^{(t+1)} + U_n^{(t)}, M_{t+1}), \tag{4.1b}$$

$$U_n^{(t+1)} = \overline{U}_n^{(t+1)} + \overline{Z}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{U}_{n-1}^{(t+1)} + U_n^{(t)} - \overline{Z}_n^{(t+1)}. \tag{4.1c}$$

ここで $U_n^{(t)}$ が時刻 t における n 番目の箱に入っている玉の数，$\overline{U}_n^{(t+1)}$ は「長さ制限状態」における玉の数，$\overline{Z}_n^{(t+1)}$ は運搬車に積まれた玉の数にあたる量である．(4.1) は非自励離散 KP 方程式の簡約から導出できるが，本稿では詳細は割愛する．なお，(4.1) から $\overline{U}_n^{(t+1)}, \overline{Z}_n^{(t+1)}$ を消去すれば，従来の運搬車付き箱玉系の方程式 [5]

$$U_n^{(t+1)} = \min\left(\Delta_n - U_n^{(t)}, \sum_{j=-\infty}^{n-1} (U_j^{(t)} - U_j^{(t+1)})\right) + \max\left(0, \sum_{j=-\infty}^{n} U_j^{(t)} - \sum_{j=-\infty}^{n-1} U_j^{(t+1)} - M_{t+1}\right) \tag{4.2}$$

が得られることに注意する．つまり，(4.1) は (4.2) によって定まる写像 $\{U_n^{(t)}\}_n \mapsto \{U_n^{(t+1)}\}_n$ を $\{U_n^{(t)}\}_n \mapsto (\{\overline{U}_n^{(t+1)}\}_n, \{\overline{Z}_n^{(t+1)}\}_n) \mapsto \{U_n^{(t+1)}\}_n$ と 2 段階に分けたものだと見ることができる．(4.1) で時間発展を計算して展開写像で移すと例えば図 6 が得られ，これを見るとわかる通り $\{U_n^{(t)}\}_n \mapsto (\{\overline{U}_n^{(t+1)}\}_n, \{\overline{Z}_n^{(t+1)}\}_n)$ は運搬車ルールに従ってはいるものの，従来とは異なり「運搬車容量を超えた分の玉は系から消滅する」というルールになっている．$(\{\overline{U}_n^{(t+1)}\}_n, \{\overline{Z}_n^{(t+1)}\}_n) \mapsto \{U_n^{(t+1)}\}_n$ は「消えた玉を元の箱に復帰させる」写像であり，この 2 つの写像の合成により従来の運搬車ルール「運搬車容量を超えた分の玉は動かさない」が実現されている．

以上を踏まえ，箱容量一般の運搬車付き箱玉系の有限戸田表現を与えよう．変数，パラメータは次の通り:

- $Q_n^{(t)}, E_n^{(t)}$: それぞれ時刻 t における n 番目のソリトン，空き箱列の長さ．
- $\overline{Q}_n^{(t)}, \overline{E}_n^{(t)}$: 対応する「長さ制限状態」の変数．
- $\overline{C}_n^{(t+1)}, \overline{D}_n^{(t+1)}$: 運搬車に積まれた玉の数，もしくはそれに類する補助変数（詳細は以下で述べる）．
- $K_n^{(t)}, \Lambda_n^{(t)}$: それぞれ時刻 t における n 番目のソリトン，空き箱列の左端の箱が属する「箱」の容量．

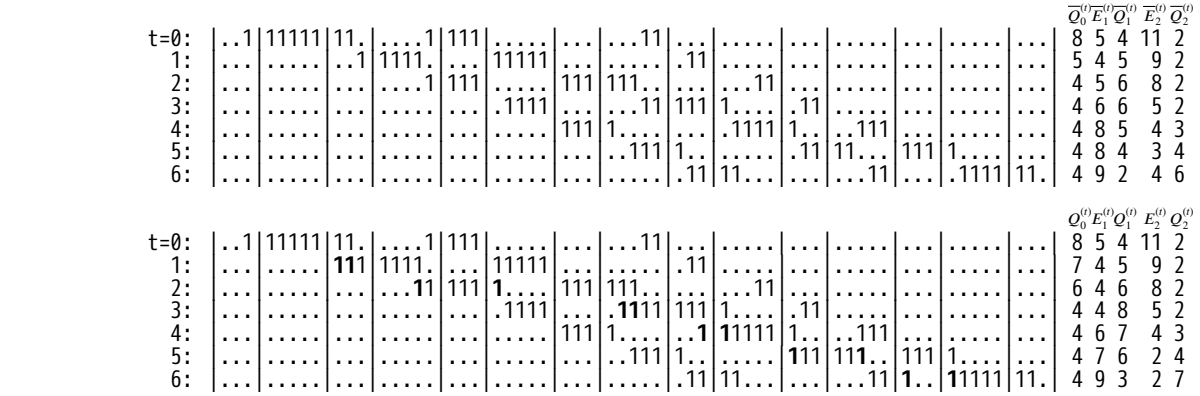

図 6　運搬車付き箱玉系の有限戸田表現の例．運搬車容量は $M_t = 6$. 上が「長さ制限状態」$\overline{U}_n^{(t)}$ で，下が従来の運搬車付き箱玉系の状態 $U_n^{(t)}$ に対応する．「長さ制限状態」では $M_t = 6$ より長いソリトンは $t \geq 1$ で現れないことがわかる．下の図では上の図の同じ箱にない玉（復帰した玉）をボールド体で示している．

定理 4.1. 次の方程式が箱容量 Δ_n $(K_n^{(t)}, \Lambda_n^{(t)})$，運搬車容量 M_t の箱玉系の時間発展を記述する:

$$\overline{Q}_n^{(t+1)} = \min\left(E_{n+1}^{(t)} - \max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - \overline{D}_n^{(t+1)}), \overline{D}_n^{(t+1)}\right), \tag{4.3a}$$

$$\overline{E}_n^{(t+1)} = E_n^{(t)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - \max(0, \Lambda_n^{(t)} - \overline{D}_{n-1}^{(t+1)}) + \max(0, \Lambda_{n+1}^{(t)} - \overline{D}_n^{(t+1)}), \tag{4.3b}$$

$$\overline{C}_n^{(t+1)} = \min(\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + K_n^{(t)}, M_{t+1}), \tag{4.3c}$$

$$\overline{D}_n^{(t+1)} = \min(\overline{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - K_n^{(t)}, M_{t+1}), \tag{4.3d}$$

$$Q_n^{(t+1)} = Q_n^{(t)} + \overline{C}_n^{(t+1)} - \overline{C}_{n+1}^{(t+1)} - K_n^{(t)} + K_{n+1}^{(t)}, \tag{4.3e}$$

$$E_n^{(t+1)} = \overline{E}_n^{(t+1)} + \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} - Q_n^{(t)} - \overline{D}_{n-1}^{(t+1)} + \overline{D}_n^{(t+1)}, \tag{4.3f}$$

$$E_0^{(t)} = E_N^{(t)} = \overline{E}_0^{(t)} = \overline{E}_N^{(t)} = +\infty, \quad \overline{C}_0^{(t+1)} = K_0^{(t)} \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{4.3g}$$

ただし，運搬車容量についての条件 $K_n^{(t)} \leq M_{t+1}$ を任意の n, t について課す．

$M_{t+1} = +\infty$ ならば，(4.3) において $Q_n^{(t+1)} = \overline{Q}_n^{(t+1)}$, $E_n^{(t+1)} = \overline{E}_n^{(t+1)}$ であり，(3.2) と同様の時間発展を定めることが容易に示される．すなわち，(4.3) は (3.2) のさらなる一般化となっている．

定理 4.1 の証明． (4.3a)–(4.3d) が長さ制限の運搬車ルールによる時間発展，(4.3e), (4.3f) が消滅した玉の復帰をそれぞれ記述していることを示す．

まずは，前者から考える．(4.3a)–(4.3d) と (3.2) を比較すると，違いは変数 $\overline{C}_n^{(t+1)}$ と $\overline{D}_n^{(t+1)}$ にあるので，以下ではこれらの変数の役割を調べる．時刻 t から $t+1$（長さ制限状態）への時間発展が $n-1$ 番目のソリトン，空き箱列の長さまで正しく定まったとし，$\overline{D}_{n-1}^{(t+1)}$ が $Q_{n-1}^{(t)}$ 個の玉を取って M_{t+1} 個までの容量制限をかけたあとの運搬車に積まれた玉の数を表していると仮定する．(4.3a) より不等式 $\overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} \leq \overline{D}_{n-1}^{(t+1)}$ が成り立っているので，2 つの場合に分けて考える．

まず，$\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} = 0$ の場合．これは運搬車に積まれた玉を全て $n-1$ 番目のソリトンとして箱に入れた場合に相当し，一旦運搬車が空になる．このとき (4.3c) と定理の仮定より $\overline{C}_n^{(t+1)} = \min(K_n^{(t)}, M_{t+1}) = K_n^{(t)}$．したがって，(4.3d) より $\overline{D}_n^{(t+1)} = \min(Q_n^{(t)}, M_{t+1})$ となり，これは $Q_n^{(t)}$ 個の玉を取って M_{t+1} 個までの容量制限をかけたあとの運搬車に積まれた玉の数となる．

次に $\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} > 0$ の場合．これは $n-1$ 番目のソリトンとして玉を箱に入れてもまだ運搬車に玉が残っている場合に相当し，例えば図 7 のような状況になる．図 7 において，時刻 t における n 番目のソリトンの左端の「箱」の番号を m とし，そこに入っている玉の数を $U_m^{(t)}$，長さ制限の運搬車ルールによる時間発展後の玉の数を $\overline{U}_m^{(t+1)}$ とする．このとき $\Delta_m = K_n^{(t)}$ であり，$U_m^{(t)} + \overline{U}_m^{(t+1)} = K_n^{(t)}$ が必ず成立している．したがって，(4.3c) は $\overline{C}_n^{(t+1)} = \min(\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - (\overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{U}_m^{(t+1)}) + U_m^{(t)}, M_{t+1})$ と書け，m 番目の箱に入っている $U_m^{(t)}$ 個の玉を取って M_{t+1} 個までの容量制限をかけたあとの運搬車に積まれた玉の数となる．また，(4.3d) は $\overline{D}_n^{(t+1)} = \min(\overline{C}_n^{(t+1)} - \overline{U}_m^{(t+1)} + (Q_n^{(t)} - U_m^{(t)}), M_{t+1})$ となり，$Q_n^{(t)}$ 個の玉を取って M_{t+1} 個までの容量制限をかけた

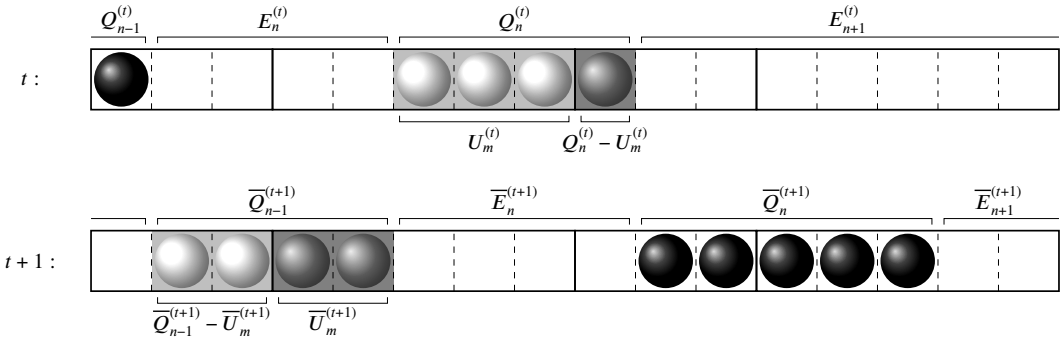

図 7　運搬車容量 $M_{t+1} = 6$ で $\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} > 0$ の場合の例．$U_m^{(t)} + \overline{U}_m^{(t+1)} = K_n^{(t)}$ が成立していることに注意すると，$\overline{C}_n^{(t+1)}$ は薄いグレーの箱の玉を出し入れして容量制限をかけた後，$\overline{D}_n^{(t+1)}$ は濃いグレーの箱の玉を出し入れして容量制限をかけた後の運搬車に積まれている玉の数を表すことがわかる．

あとの運搬車に積まれた玉の数となる（いくつかの「箱」に連なった玉を取るときは，途中の「箱」毎の運搬車容量制限を最後にまとめても結果は変わらないことに注意）．

以上で $\overline{C}_n^{(t+1)}, \overline{D}_n^{(t+1)}$ の役割がわかった．運搬車の容量が制限されること以外の時間発展規則は変わらないことに注意すると，定理 3.1 の結果が使えて，帰納法により上で議論した $\overline{C}_n^{(t+1)}, \overline{D}_n^{(t+1)}$ の役割は全ての n について正しく，また全ての $\overline{Q}_n^{(t+1)}, \overline{E}_n^{(t+1)}$ の値は正しく定まることが示される．すなわち，(4.3a)–(4.3d) は長さ制限の運搬車ルールによる時間発展を記述していることが示された．

あとは (4.3e), (4.3f) が消滅した玉の復帰を記述していることを示せばよいが，(4.3c) より $U_m^{(t)}$ 個の玉を取る際に消えた玉の数が $\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + K_n^{(t)} - \overline{C}_n^{(t+1)} = \max(0, \overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + K_n^{(t)} - M_{t+1})$，(4.3d) より $(Q_n^{(t)} - U_m^{(t)})$ 個の玉を取る際に消えた玉の数が $\overline{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - K_n^{(t)} - \overline{D}_n^{(t+1)} = \max(0, \overline{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - K_n^{(t)} - M_{t+1})$ と書けるので，

$$
\begin{aligned}
Q_n^{(t+1)} &= \overline{Q}_n^{(t+1)} + (\overline{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - K_n^{(t)} - \overline{D}_n^{(t+1)}) + (\overline{D}_n^{(t+1)} - \overline{Q}_n^{(t+1)} + K_{n+1}^{(t)} - \overline{C}_{n+1}^{(t+1)}) \\
&= Q_n^{(t)} + \overline{C}_n^{(t+1)} - \overline{C}_{n+1}^{(t+1)} - K_n^{(t)} + K_{n+1}^{(t)}, \\
E_n^{(t+1)} &= \overline{E}_n^{(t+1)} - (\overline{D}_{n-1}^{(t+1)} - \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} + K_n^{(t)} - \overline{C}_n^{(t+1)}) - (\overline{C}_n^{(t+1)} + Q_n^{(t)} - K_n^{(t)} - \overline{D}_n^{(t+1)}) \\
&= \overline{E}_n^{(t+1)} + \overline{Q}_{n-1}^{(t+1)} - Q_n^{(t)} - \overline{D}_{n-1}^{(t+1)} + \overline{D}_n^{(t+1)}
\end{aligned}
$$

が得られ，証明が終わる．∎

5　おわりに

本稿では，まず展開写像を導入することで箱容量が一般の箱玉系に対してもソリトンや空き箱列の長さを定義し，これを用いて箱容量が一般でかつ運搬車容量がある箱玉系の有限戸田表現を与えた．今後の課題としては，得られた超離散系，もしくはこれらを逆超離散化して得られる離散系の可積分性についての議論がある．

本稿で得られた結果は，箱玉系を解析する手法の 1 つとして有限戸田表現を用いる上での基礎となるものであると考えている．また，有限離散戸田格子は数値計算アルゴリズムの観点からも重要な研究対象であることから，本研究が箱玉系と数値計算の世界をつなぐ架け橋となることも期待している．

参考文献

[1] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, J. Math. Phys., **42** (2001), 274–308.

[2] K. Maeda and S. Tsujimoto, JSIAM Letters, **2** (2010), 95–98.

[3] A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro, Phys. Lett. A, **255** (1999), 265–271.

[4] H. Rutishauser, Lectures on Numerical Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1990.

[5] D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A: Math. Gen., **30** (1997), L733–739.

[6] 高橋大輔, 薩摩順吉, 日本応用数理学会論文誌, **1** (1991), 41–60.

[7] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, Inverse Problems, **15** (1999), 1639–1662.

[8] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett., **76** (1996), 3247–3250.