Frobenius-Stickelberger-Thiele連分数とグラフ上の歩道の数え上げ

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/23416

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (32), pp.208-213, 2011-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8
Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 32 (pp. 208 - 213)

Frobenius-Stickelberger-Thiele 連分数とグラフ上の歩道の数え上げ

上岡　修平（KAMIOKA Shuhei）

（Received 14 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

Frobenius–Stickelberger–Thiele 連分数とグラフ上の歩道の数え上げ

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平　(KAMIOKA Shuhei)

概　要　有理関数補間の基本問題の一つである Newton–Padé 近似および Frobenius–Stickelberger–Thiele (FST) 連分数に対して, 重み付きグラフを用いた組合せ論的な解析を行う. 特に FST 連分数に対する組合せ論的解釈として, FST 連分数が, グラフ上の歩道を用いて定義される組合せ論的な母関数と同一視できることを示す. さらに FST 連分数による Newton–Padé 近似の逆問題を考え, その解を同様の手法で組合せ論的に構成する.

1　はじめに

■Newton–Padé 近似　有理関数補間の基本問題の一つに **Newton–Padé 近似** [1, 2] がある. Newton–Padé 近似の定式化の仕方は色々あるが, 例えば: 与えられた形式的 Newton 級数

$$F(x) = f_0 + f_1(x - x_0) + f_2(x - x_0)(x - x_1) + f_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots \tag{1.1}$$

に対して, 有理関数 $R(x) = P(x)/Q(x)$ で条件 $F(x) = R(x) +$ (形式的 Newton 級数) $\cdot \prod_{k=0}^{d}(x - x_k)$ ($d = \deg P(x) + \deg Q(x)$) を満たすものを求めよ. 特に全ての x_k が等しいときは通常の Padé 近似に帰着する.

■Frobenius–Stickelberger–Thiele 連分数　Newton–Padé 近似の解法は数多くあるが, 基本的な処方箋の一つに次のようなものがある: 有理関数 $R(x)$ を **Frobenius–Stickelberger–Thiele (FST) 連分数** (単に **Thiele 連分数**と呼ぶことも多いが, ここでは Spiridonov–Tsujimoto–Zhedanov [7] に倣う)

$$B(x) = \frac{b_0|}{|1} - \frac{b_1(x - x_0)|}{|1} - \frac{b_2(x - x_1)|}{|1} - \frac{b_3(x - x_2)|}{|1} - \cdots \tag{1.2}$$

の打ち切りの形で求めよ (例えば一般化 QD アルゴリズム [10] など). 特に全ての x_k が等しいとき FST 連分数は Stieltjes 連分数と呼ばれ, Padé 近似の理論において同様の役割を果たす.

■連分数と組合せ論　連分数の組合せ論的解釈として, Flajolet [4] の Jacobi 連分数および Stieltjes 連分数に対する組合せ理論や, Fédou–Roblet–Viennot [3] の Thron 連分数に対する研究がある. 彼らの主眼は組合せ論的な母関数 (重み付き径路, 置換, ポリオミノ, ...) の連分数展開にあるが, Padé 近似を念頭において彼らの結果を眺めるとき, 次の予想に至る: **Padé 近似型の問題を連分数を用いて解くとき, その逆問題は重み付き径路などを用いて組合せ論的に解くことができる** (例えば Newton–Padé 近似の場合でいえば, 形式的 Newton 級数 $F(x)$ から FST 連分数 $B(x)$ を求めるのが順問題であり, それに対して $B(x)$ から $F(x)$ を求めるのが逆問題である).

本研究では Newton–Padé 近似と FST 連分数を取り上げ, これらに対する逆問題予想を肯定的に解決する. 特に FST 連分数に対して, 重み付きグラフを用いた組合せ論的解釈を与え, ある種の組合せ論的な母関数が FST 連分数の形に展開可能であることを示す (Flajolet [4] の Stieltjes 連分数に対する結果の自然な拡張).

2　準備

■形式的 Newton 級数環　単位的な可換環 R と不定元の列 $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_n)_{n=0}^{\infty}$ から定まる, 無限変数の形式的巾級数環 $R[[\boldsymbol{\zeta}]] = R[[\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \ldots]]$ を考える. 議論の舞台となるのは, $R[[\boldsymbol{\zeta}]]$ を係数環とする一変数 x の形式的 Newton 級数環

$$R_i[[x]] = \left\{ F_i(x) = \sum_{j=i}^{\infty} f_{i,j} \prod_{k=i}^{j-1}(x - \zeta_{0,k});\ f_{i,j} \in R[[\boldsymbol{\zeta}]] \right\} \qquad (i \geq 0) \tag{2.1}$$

である. ただし $\xi_{i,j}=\sum_{n=i}^{j}\xi_n$. 形式的 Newton 級数の代数的な取り扱いについては Haider [5] に詳しい.

■準同型　形式的 Newton 級数環 $R_i[[x]]$ の間には, 自然な準同型が存在する. 写像 $\varphi_i : R_{i-1}[[x]] \to R_i[[x]]$ $(i \geq 1)$ を次で定める: 任意の $F_{i-1}(x) \in R_{i-1}[[x]]$ に対して, $F_i(x) = \varphi_i(F_{i-1}(x)) \in R_i[[x]]$ の係数 $f_{i,j}$ は

$$f_{i,j} = f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j} \cdot \xi_{i,j}. \tag{2.2}$$

このとき φ_i は $R_{i-1}[[x]]$ から $R_i[[x]]$ への準同型を与える. 特に $F_{i-1}(x)$ が多項式のときは $\varphi_i(F_{i-1}(x))$ も多項式であり, 両者は多項式として等しい (合成写像に関しても同様). ちなみに係数 $f_{i,j}$ は, 有理関数補間や多項式補間で用いられる**差分商** $f_{i,j} = (f_{i,j-1} - f_{i+1,j})/(x_i - x_j)$ と同じものである ($\xi_0 = x_0$ および $\xi_n = x_n - x_{n-1}$ $(n \geq 1)$ とおいた).

■積の公式　形式的 Newton 級数 $E_i(x), F_i(x) \in R_i[[x]]$ に対して, その積は次の公式により計算できる: $F_\ell(x) = \varphi_\ell \circ \cdots \circ \varphi_{i+2} \circ \varphi_{i+1}(F_i(x)) \in R_\ell[[x]]$ の係数 $f_{\ell,j}$ を用いて,

$$E_i(x) \cdot F_i(x) = \sum_{j=i}^{\infty} \left(\sum_{\ell=i}^{j} e_{i,\ell} \cdot f_{\ell,j} \right) \prod_{k=i}^{j-1} (x - \xi_{0,k}) \tag{2.3}$$

(これを積の定義とみなしてもよい). 特に $E_i(x)$ と $F_i(x)$ が多項式のときは, 多項式としての通常の積に等しい.

■FST 連分数　FST 連分数

$$B_0(x) = \frac{1|}{|1} - \frac{b_1(x-\xi_{0,0})|}{|1} - \frac{b_2(x-\xi_{0,1})|}{|1} - \frac{b_3(x-\xi_{0,2})|}{|1} - \cdots \tag{2.4}$$

と, その $n+1$ 階近似

$$B_0^{(n)}(x) = \frac{1|}{|1} - \frac{b_1(x-\xi_{0,0})|}{|1} - \frac{b_2(x-\xi_{0,1})|}{|1} - \frac{b_3(x-\xi_{0,2})|}{|1} - \cdots - \frac{b_n(x-\xi_{0,n-1})|}{|1} \qquad (n \geq 0) \tag{2.5}$$

を考える. ただし各係数 b_n は $R[[\boldsymbol{\xi}]]$ の可逆元であり, また $B_0^{(0)}(x) = 1/1 = 1$. 通常 $B_0^{(n)}(x)$ は有理関数として扱い, その何らかの極限として $B_0(x)$ を理解する. しかしここでは, この通常の解釈は採用せず, $B_0^{(n)}(x)$ および $B_0(x)$ を $R_0[[x]]$ に属する形式的 Newton 級数として取り扱う. まず $B_0^{(n)}(x)$ を通常の方法で既約な多項式の比 $P(x)/Q(x)$ の形に書くとき, 分母の $Q(x)$ は $R_0[[x]]$ の元として可逆である. 従って形式的 Newton 級数として $B_0^{(n)}(x) = P(x) \cdot (Q(x))^{-1} \in R_0[[x]]$ を自然に定義できる. さらに $(B_0^{(n)}(x))_{n=0}^{\infty}$ は $R_0[[x]]$ 上の Cauchy 列であるので, 極限として $B_0(x) = \lim_{n\to\infty} B_0^{(n)}(x) \in R_0[[x]]$ を自然に定義できる.

3　FST 連分数の組合せ論的解釈

■重み付きグラフ　図 1 の (有向) グラフ G を考える. G は三種類の枝 $\nearrow = (1,1)$, $\searrow_n = (1,-1)$, $\nwarrow_n = (-1,1)$ により構成され, 平面 $\mathbb{R}^2$ において $\{0 \leq y \leq x\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq x\}$ の中に収まっている. ただし $\searrow_n$ 枝および $\nwarrow_n$ 枝は n とラベル付けられた枝である. 重み関数 $v : E(G) \to R[[\boldsymbol{\xi}]]$ を定義し, G の各枝に次のように重みを付ける:

$$v(\nearrow) = 1, \qquad v(\searrow_n) = b_n, \qquad v(\nwarrow_n) = \xi_n. \tag{3.1}$$

グラフと重み関数の組 (G, v) を**重み付きグラフ**と呼ぶ.

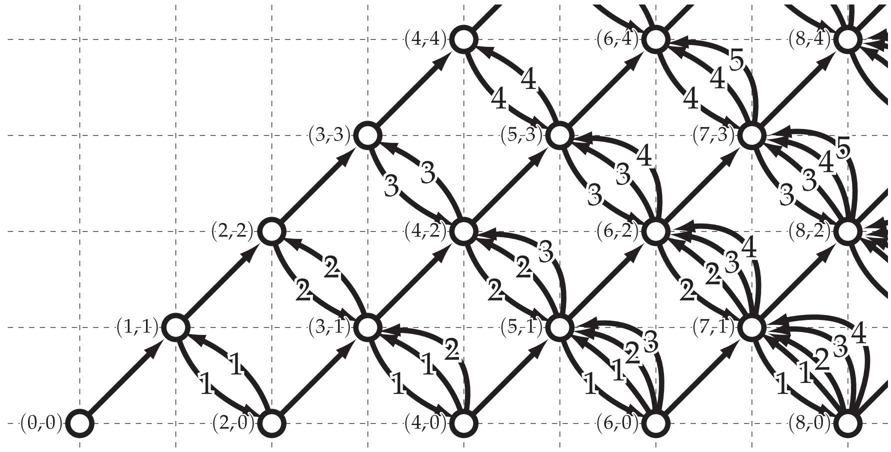

図 1　グラフ G.

■**歩道 (集合) の重み**　グラフ G 上の任意の歩道 ω に対して, その重み $v(\omega)$ を次で定義する:

$$v(\omega) = (\omega \text{ の通る枝の重みの積}). \tag{3.2}$$

さらに任意の歩道集合 Ω に対して, その重み $v(\Omega)$ を次で定義する:

$$v(\Omega) = (\Omega \text{ に含まれる歩道の重みの和}). \tag{3.3}$$

G 上の任意の節点 $u, v \in V(G)$ に対して, G 上の u-v 歩道の全体を uGv と書く. G は閉路を含むので, 一般に uGv は無限集合であり, その重み $v(uGv)$ は $R[[\boldsymbol{\xi}]]$ に属する形式的巾級数となる. 例えば節点として $(0,0), (2,0) \in V(G)$ をとるとき, 歩道集合 $(0,0)G(2,0)$ の重みは

$$v((0,0)G(2,0)) = b_1 + b_1^2\xi_1 + b_1^3\xi_1^2 + b_1^4\xi_1^3 + \cdots. \tag{3.4}$$

■**FST 連分数の組合せ論的解釈**　歩道集合の重みに関する母関数として, 次の形式的 Newton 級数を考える:

$$G_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_{0,j} \prod_{k=0}^{j-1} (x - \xi_{0,k}) \in R_0[[x]], \tag{3.5}$$

$$g_{0,j} = v((0,0)G(2j,0)) \in R[[\boldsymbol{\xi}]] \qquad (j \geq 0). \tag{3.6}$$

定理 1 (FST 連分数の組合せ論的解釈). FST 連分数 $B_0(x)$ と母関数 $G_0(x)$ は, $R_0[[x]]$ に属する形式的 Newton 級数として等しい: $B_0(x) = G_0(x)$.

別の言い方をすれば, 母関数 $G_0(x)$ は FST 連分数展開 $B_0(x)$ を持つ.

FST 連分数に対するこの組合せ論的解釈は, Flajolet [4] による Stieltjes 連分数の解釈に対する自然な拡張を与える (Flajolet の結果を導くには, 不定元 ξ_n を全て 0 とおけば (グラフ G において $\nwarrow_n$ 枝を全て無視すれば) よい).

4　定理 1 の証明

少し長いので前後半に分けて証明する.

■**前半**　準同型 φ_i を用いて, 形式的 Newton 級数 $G_i(x)$ を次で定義する:

$$G_i(x) = \sum_{j=i}^{\infty} g_{i,j} \prod_{k=i}^{j-1} (x - \xi_{0,k}) = \varphi_i \circ \cdots \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(G_0(x)) \in R_i[[x]] \qquad (i \geq 1). \tag{4.1}$$

補題 2. 任意の $1 \leq i \leq j$ に対して $g_{i,j} = v((2i,0)G(2j,0))$.

証明. 係数 $g_{0,j}$ の定義 (3.6) および準同型 φ_i の定義 (2 節) より, 補題 2 の証明は, 歩道集合の重みの間の次の関係式の確認に帰着する:

$$v((2i,0)G(2j,0)) = v((2i-2,0)G(2j-2,0)) + \sum_{n=i}^{j} v((2i-2,0)G(2j,0)) \cdot \xi_n \qquad (1 \leq i \leq j). \tag{4.2}$$

この関係式は組合せ論的に (全単射を用いて) 証明できる. まず歩道集合 $(2i,0)G(2j,0)$ を $j-i+2$ 個の部分集合に分割する: $(2i,0)G(2j,0) = \Omega^{(0)} \sqcup \bigsqcup_{n=i}^{j} \Omega_n^{(1)}$. ただし部分集合 $\Omega^{(0)}$ および $\Omega_n^{(1)}$ $(i \leq n \leq j)$ の定義は次の通り:

- $\Omega^{(0)}$ に属する歩道は, 全ての $i \leq k \leq j$ に対して, 直線 $\{x+y=2k\}$ 上で $\nwarrow_k$ 枝を通らない.
- $\Omega_n^{(1)}$ に属する歩道は, 全ての $i \leq k < n$ に対して, 直線 $\{x+y=2k\}$ 上で $\nwarrow_k$ 枝を通らないが, 直線 $\{x+y=2n\}$ 上では少なくとも一つの $\nwarrow_n$ 枝を通る.

このとき次のような全単射が存在する (図 2 参照):

- 全単射 $\phi^{(0)} : \Omega^{(0)} \to (2i-2,0)G(2j-2,0)$. 任意の $\omega \in \Omega^{(0)}$ に対して $v(\omega) = v(\phi^{(0)}(\omega))$.
- 全単射 $\phi_n^{(1)} : \Omega_n^{(1)} \to (2i-2,0)G(2j,0)$. 任意の $\omega \in \Omega_n^{(1)}$ に対して $v(\omega) = v(\phi_n^{(1)}(\omega)) \cdot \xi_n$.

これから直ちに関係式 (4.2) を得る. □

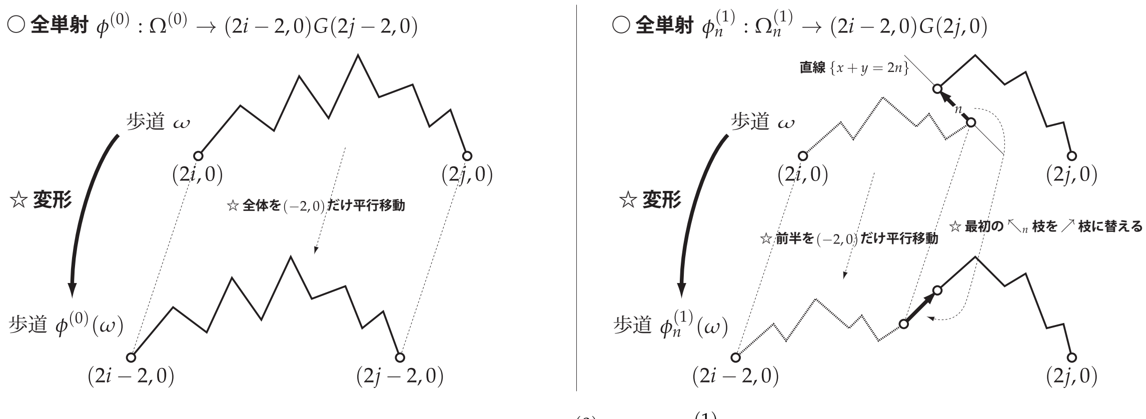

図 2　全単射 $\phi^{(0)}$ および $\phi_n^{(1)}$.

■**後半**　歩道集合

$$\Omega(i,j) = \{\omega \in (i,i)G(2j-i,i);\ \omega \text{ は直線 } \{y=i\} \text{ より下を通らない }\} \qquad (0 \leq i \leq j) \tag{4.3}$$

を考え, 母関数 $\hat{G}_i(x)$ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \hat{G}_i(x) &= \sum_{j=i}^{\infty} \hat{g}_{i,j} \prod_{k=i}^{j-1} (x - \xi_{0,k}) \in R_i[[x]] && (i \geq 0), \\ \hat{g}_{i,j} &= v(\Omega(i,j)) \in R[[\boldsymbol{\xi}]] && (0 \leq i \leq j). \end{aligned} \tag{4.4}$$

特に $\hat{G}_0(x) = G_0(x)$ である.

補題 3. 任意の $i \geq 1$ に対して $\hat{G}_{i-1}(x) = 1 + b_i \cdot \{(x - \xi_{0,i-1}) \cdot \hat{G}_i(x)\} \cdot \hat{G}_{i-1}(x)$.

証明. 重み付きグラフ (G, v) の構造から $i = 1$ の場合を示せば十分である. さらに補題 2 と積の公式 (2.3) より, これは歩道集合の重みの間の次の関係式の確認に帰着する:

$$v((0,0)G(2j,0)) = b_1 \cdot \sum_{\ell=1}^{j} v(\Omega(1,\ell)) \cdot v((2\ell,0)G(2j,0)) \qquad (j \geq 1). \tag{4.5}$$

この関係式は次の事実から直ちに導かれる: $j \geq 1$ のとき, 任意の $(0,0)$-$(2j,0)$ 路 ω に対して, 整数 $1 \leq \ell \leq j$ が一意に定まり, ω は図 3 のような形に一意に分解できる. この分解は全単射 $\phi_j : (0,0)G(2j,0) \to \sqcup_{\ell=1}^{j} \Omega(1,\ell) \times (2\ell,0)G(2j,0)$ を与える. 特に任意の $\omega \in (0,0)G(2j,0)$ に対して, $(\hat{\omega}, \omega') = \phi_j(\omega)$ とおくと $v(\omega) = b_1 \cdot v(\hat{\omega}) \cdot v(\omega')$ が成り立つ. □

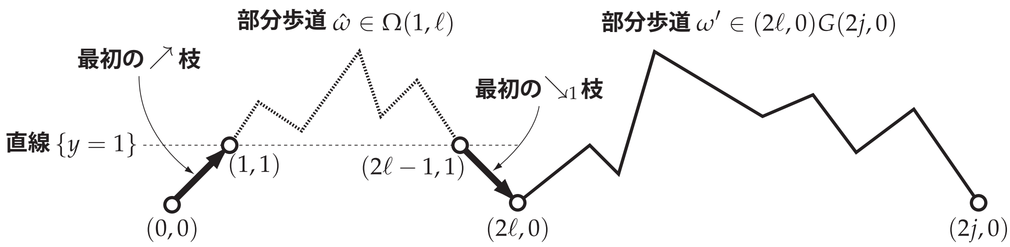

図 3　歩道 $\omega \in (0,0)G(2j,0)$ の分解.

補題 3 より $\hat{G}_{i-1}(x) = \{1 - b_i(x - \xi_{0,i-1}) \cdot \hat{G}_i(x)\}^{-1}$ $(i \geq 1)$ を得る. 従って任意の $n \geq 1$ に対して,

$$G_0(x) = \frac{1|}{|1} - \frac{b_1(x - \xi_{0,0})|}{|1} - \frac{b_2(x - \xi_{0,1})|}{|1} - \cdots - \frac{b_{n-1}(x - \xi_{0,n-2})|}{|1} - \frac{b_n(x - \xi_{0,n-1}) \cdot \hat{G}_n(x)|}{|1} \tag{4.6}$$

が成り立つ. ここで極限 $n \to \infty$ をとると右辺は FST 連分数 $B_0(x)$ に収束するので, $G_0(x) = B_0(x)$. こうして定理 1 は示された.

定理 1 と全く同様にして, 次の定理も示すことができる.

定理 4. 任意の $n \geq 0$ に対して, 近似連分数 $B_0^{(n)}(x)$ は次の母関数に等しい:

$$\begin{aligned} G_0^{(n)}(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_{0,j}^{(n)} \prod_{k=0}^{j-1} (x - \xi_{0,k}), \\ g_{0,j}^{(n)} &= v(\{\omega \in (0,0)G(2j,0);\ \omega \text{ は直線 } \{y = n\} \text{ より上を通らない }\}) \qquad (j \geq 0). \end{aligned} \tag{4.7}$$

5　FST 連分数による Newton–Padé 近似の逆問題

FST 連分数による Newton–Padé 近似 (順問題) は次のように定式化できる: 与えられた形式的 Newton 級数 $F_0(x) \in R_0[[x]]$ に対して, 次の条件を満たす FST 連分数 $B_0(x) \in R_0[[x]]$ を求めよ: 任意の $n \geq 0$ に対して, 形式的 Newton 級数 $E_{n+1}(x) \in R_{n+1}[[x]]$ が存在して,

$$F_0(x) = B_0^{(n)}(x) + E_{n+1}(x) \cdot \prod_{k=0}^{n} (x - \xi_{0,k}). \tag{5.1}$$

従って逆問題は次のようになる: 与えられた FST 連分数 $B_0(x) \in R_0[[x]]$ に対して, 形式的 Newton 級数 $F_0(x) \in R_0[[x]]$ で, $B_0(x)$ が $F_0(x)$ に対する順問題の解となるものを求めよ.

定理 1 および 4 の簡単な応用問題である.

定理 5 (FST 連分数による Newton–Padé 近似の逆問題の解). 逆問題の解は母関数 $G_0(x)$ である.

6 おわりに

■まとめ　本研究では FST 連分数と Newton–Padé 近似に関して考察し, 次の結果を得た:

(i) FST 連分数は重み付きグラフを用いて組合せ論的に解釈でき, グラフ上の歩道を用いて定義されるある母関数と同一視できる.

(ii) FST 連分数による Newton–Padé 近似の問題を考えるとき, その逆問題は重み付きグラフ上の歩道を用いて解くことができる.

特に (i) は Stieltjes 連分数に対する Flajolet [4] の結果の自然な拡張を与えている.

■今後の課題

(i) FST 連分数に関連する直交関数である R_{II} 有理関数 [6] に対する, 重み付きグラフを用いた組合せ論的解釈. 直交多項式に対する Viennot [9] の理論の拡張を与える.

(ii) 離散可積分系である R_{II} chain [8] や FST chain [7] およびその超離散類似への応用. 初期値問題に対して組合せ論的な解を構成し, 解の正値性 (超離散化可能性) を調べる.

(iii) 非交叉ランダムウォークへの応用. 課題 (i) (ii) にもいえることであるが, 行列式との関係をいかに利用するかが鍵である.

■謝辞　本研究は科研費 (22740063) の助成を受けたものである.

参考文献

[1] G. A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris, Padé Approximants, second edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 59, Cambridge University Press, 1996.

[2] G. Claessens, *On the Newton-Padé approximation problem*, J. Approximation Theory **22** (1978), no. 2, 150–160.

[3] J. Fédou, E. Roblet and X. G. Viennot, *An identity on Thron's dual continued fractions*, Ann. Sci. Math. Québec **21** (1997), no. 1, 67–82.

[4] P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math. **32** (1980), no. 2, 125–161.

[5] A. Haider, *Algebraic properties of special rings of formal series*, J. Prime Res. Math. **3** (2007), 178–185.

[6] M. E. H. Ismail and D. R. Masson, *Generalized orthogonality and continued fractions*, J. Approx. Theory **83** (1995), no. 1, 1–40.

[7] V. P. Spiridonov, S. Tsujimoto and A. S. Zhedanov, *Integrable discrete time chains for the Frobenius-Stickelberger-Thiele polynomials*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), no. 1, 139–165.

[8] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Comm. Math. Phys. **210** (2000), no. 1, 49–83.

[9] G. Viennot, Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux généraux, UQAM, 1983.

[10] L. Wuytack, *An algorithm for rational interpolation similar to the qd-algorithm*, Numer. Math. **20** (1972/73), 418–424.