

離散口トカ・ボルテラ系に関連する拡張型フィボナッチ列について

赤岩, 香苗
京都府立大学人間環境学部

岩崎, 雅史
京都府立大学生命環境学部

<https://doi.org/10.15017/23410>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (26), pp.176-181, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 26 (pp. 176 - 181)

離散口トカ・ボルテラ系に関連する拡張型フィボナッチ列について

赤岩 香苗 (AKAIWA Kanae), 岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi)

(Received 13 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

離散ロトカ・ボルテラ系に関連する拡張型フィボナッチ列について

京都府立大学人間環境学部 赤岩香苗 (AKAIWA Kanae)
京都府立大学生命環境学部 岩崎雅史 (IWASAKI Masashi)

概要 可積分な離散ロトカ・ボルテラ (dLV) 系は, 生物数理モデルの1つとして知られるロトカ・ボルテラ (LV) 系の時間離散版である. 本報告では, dLV 系には拡張型フィボナッチ列を保存する数理構造があることを説明する. また, $n \rightarrow \infty$ のとき, dLV 変数の1つは dLV 系の差分パラメータおよび拡張型フィボナッチ列のパラメータを係数に含む代数方程式の実数解に収束することを示す.

1 はじめに

異なる生物種間の捕食関係を模式化した可積分系の1つにロトカ・ボルテラ (LV) 系

$$\begin{aligned} \frac{dU_k(t)}{dt} &= U_k(t)(U_{k+1}(t) + U_{k-1}(t)), \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1, \\ U_0(t) &:= 0, \quad U_{2m}(t) := 0, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

がある [7]. ただし, k は生物種の個体番号, t は時間変数, $U_k(t)$ は時間 t における個体番号 k の個体数を表す. LV 系 (1.1) では, k 番目の生物種に対して $(k-1)$ 番目の生物種は捕食者, $(k+1)$ 番目の生物種は被食者となる. LV 系 (1.1) の時間変数 t を離散化すると離散ロトカ・ボルテラ (dLV: discrete Lotka-Volterra) 系

$$\begin{aligned} u_k^{(n+1)}(1 + \delta u_{k-1}^{(n+1)}) &= u_k^{(n)}(1 + \delta u_{k+1}^{(n)}), \quad k = 1, 2, \dots, 2m-1, \\ u_0^{(n)} &:= 0, \quad u_{2m}^{(n)} := 0, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

が得られる [2, 5]. ここで, δ は正の差分パラメータ, $u_k^{(n)}$ は離散時間 n における個体番号 k の個体数を表す. dLV 変数 $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_{2m-1}^{(n)}$ が $n=0$ において正ならば, $n \rightarrow \infty$ において $u_{2k-1}^{(n)}$ は正の定数, $u_{2k}^{(n)}$ は 0 に収束する [3, 5].

dLV 系 (1.2) の解は, 以下のように Hankel 行列式を使って表すことができる [2, 5].

$$u_{2k-1}^{(n)} = \frac{\hat{H}_k^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)}}{H_k^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)}}, \quad u_{2k}^{(n)} = \frac{H_{k+1}^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)}}{\hat{H}_k^{(n)} H_k^{(n+1)}}, \quad (1.3)$$

$$H_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_0^{(n)} & a_1^{(n)} & \cdots & a_{k-1}^{(n)} \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \cdots & a_k^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^{(n)} & a_k^{(n)} & \cdots & a_{2k-2}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad \hat{H}_k^{(n)} := \begin{vmatrix} a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \cdots & a_k^{(n)} \\ a_2^{(n)} & a_3^{(n)} & \cdots & a_{k+1}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_k^{(n)} & a_{k+1}^{(n)} & \cdots & a_{2k-1}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad (1.4)$$

$$H_0^{(n)} := 1, \quad H_{m+1}^{(n)} := 0, \quad \hat{H}_0^{(n)} := 1. \quad (1.5)$$

Hankel 行列式 (1.4), (1.5) の下付き添字 k は行列式のサイズと対応する. Hankel 行列式 (1.4), (1.5) は広田の双線形形式

$$\delta \hat{H}_k^{(n)} H_{k-1}^{(n+1)} = \hat{H}_{k-1}^{(n)} H_k^{(n+1)} - H_k^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)}, \quad (1.6)$$

$$\delta H_{k+1}^{(n)} \hat{H}_{k-1}^{(n+1)} = H_k^{(n)} \hat{H}_k^{(n+1)} - \hat{H}_k^{(n)} H_k^{(n+1)} \quad (1.7)$$

を満たす。また、Hankel 行列式 (1.4) に含まれる任意関数 $a_j^{(n)}$ については、分散関係式

$$a_j^{(n+1)} = a_j^{(n)} + \delta a_{j+1}^{(n)}, \quad j = 0, 1, \dots, 2m-2 \quad (1.8)$$

が成り立つ。 $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{2m-2}^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ は (1.8) によって与えられるが、 $a_{2m-1}^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ は (1.8) によって定義されないことに注意されたい。

[3, 5] では、dLV 変数 $u_k^{(n)}$ の正值性および $n \rightarrow \infty$ における収束性を利用して、上 2 重対角行列の特異値分解アルゴリズム dLV が定式化されている。 [1] では、Hankel 行列式 (1.4), (1.5) に含まれる任意関数 $a_j^{(n)}$ に着目して、 $\delta = 1$ とした dLV 系 (1.2) と m -step フィボナッチ列 (cf. [4]) が関連づくことを示した。本報告では、 [1] の議論を一般化して δ が任意の dLV 系 (1.2) と拡張型 m -step フィボナッチ列が関連づくことを 2 節で説明する。また 3 節では、 $n \rightarrow \infty$ のとき、差分パラメータ δ および拡張型 m -step フィボナッチ列のパラメータを係数を含む代数方程式の実数解に dLV 変数 $u_1^{(n)}$ が収束することを証明する。いくつかの簡単な数値例も示す。

2 拡張型フィボナッチ列保存

数列 $\{F_j\}_{j=0,1,\dots}$ がフィボナッチ列 [6] ならば、漸化式

$$F_{j+2} = F_j + F_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

が成り立つ。また、漸化式

$$G_{j+m} = G_j + G_{j+1} + \dots + G_{j+m-1}, \quad j = 0, 1, \dots \quad (2.2)$$

を満たす数列 $\{G_j\}_{j=0,1,\dots}$ は m -step フィボナッチ列として知られている。一般的には、2-step フィボナッチ列は単純にフィボナッチ列、3-step フィボナッチ列はトリボナッチ列と呼ばれる。

本報告では、以下の漸化式を満たす拡張型フィボナッチ列 $\{E_j\}_{j=0,1,\dots}$ を新たに導入する。 $m = 2\ell$ (m が偶数) のとき、任意の $E_0, E_1, \dots, E_{2\ell-1}$ に対して、

$$\begin{aligned} E_{j+2\ell} = & \beta_1(E_j + \delta E_{j+1}) + \beta_2(E_{j+2} + \delta E_{j+3}) + \dots \\ & + \beta_\ell(E_{j+2\ell-2} + \delta E_{j+2\ell-1}), \quad j = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$m = 2\ell + 1$ (m が奇数) のとき、任意の $E_0, E_1, \dots, E_{2\ell}$ に対して、

$$\begin{aligned} E_{j+2\ell+1} = & \beta_1(E_j + \delta E_{j+1}) + \beta_2(E_{j+2} + \delta E_{j+3}) + \dots \\ & + \beta_\ell(E_{j+2\ell-2} + \delta E_{j+2\ell-1}) + \beta_{\ell+1}E_{j+2\ell}, \quad j = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

なお、 δ は dLV 系 (1.2) における差分パラメータであり、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\ell+1}$ は非ゼロの任意定数とする。 $m = 2, \delta = \beta_1 = 1$ の場合の $\{E_j\}_{j=0,1,\dots}$ はフィボナッチ列、 $\delta = \beta_1 = \dots = \beta_\ell = \beta_{\ell+1} = 1$ の場合の $\{E_j\}_{j=0,1,\dots}$ は m -step フィボナッチ列となる。

最初に、サイズが m である Hankel 行列式 $H_m^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ に関する命題を与える。

命題 1 数列 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列とする。 $m = 2\ell$ ならば、

$$H_{2\ell}^{(n+1)} = H_{2\ell}^{(n)}, \quad (2.5)$$

$m = 2\ell + 1$ ならば、

$$H_{2\ell+1}^{(n+1)} = (1 + \delta \cdot \beta_{\ell+1}) H_{2\ell+1}^{(n)}. \quad (2.6)$$

分散関係式 (1.8) を使って Hankel 行列式 $H_m^{(n+1)}$ に対して基本変形を行えば命題 1 は証明できる。

次に、命題 1 と広田の双線形形式 (1.7) を併せると、Hankel 行列式 $\hat{H}_m^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ に関する命題が得られる。

命題 2 数列 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列とする。さらに、 $H_m^{(n)} \neq 0$ とする。 $m = 2\ell$ ならば、

$$\hat{H}_{2\ell}^{(n+1)} = \hat{H}_{2\ell}^{(n)}, \quad (2.7)$$

$m = 2\ell + 1$ ならば、

$$\hat{H}_{2\ell+1}^{(n+1)} = (1 + \delta \cdot \beta_{\ell+1}) \hat{H}_{2\ell+1}^{(n)}. \quad (2.8)$$

分散関係式 (1.8) によって $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_{2m-2}^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ は簡単に得られるが、 $a_{2m-1}^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ は定義されていない。Hankel 行列式 $\hat{H}_m^{(n)}$ の (m, m) 成分は $a_{2m-1}^{(n)}$ なので、命題 2 を利用すると $a_{2m-1}^{(n)}$ の時間発展 $n \rightarrow n+1$ を導くことができる。以下に、 $\{a_j^{(n+1)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ に関する命題を示す。

命題 3 数列 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列とする。さらに、 $H_m^{(n)} \neq 0$ とする。そのとき、 $\{a_j^{(n+1)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ もまた拡張型フィボナッチ列となる。つまり、 $m = 2\ell$ ならば、

$$\begin{aligned} a_{j+2\ell}^{(n+1)} &= \beta_1(a_j^{(n+1)} + \delta a_{j+1}^{(n+1)}) + \beta_2(a_{j+2}^{(n+1)} + \delta a_{j+3}^{(n+1)}) + \dots \\ &\quad + \beta_\ell(a_{j+2\ell-2}^{(n+1)} + \delta a_{j+2\ell-1}^{(n+1)}), \quad j = 0, 1, \dots, 2\ell - 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$m = 2\ell + 1$ ならば、

$$\begin{aligned} a_{j+2\ell+1}^{(n+1)} &= \beta_1(a_j^{(n+1)} + \delta a_{j+1}^{(n+1)}) + \beta_2(a_{j+2}^{(n+1)} + \delta a_{j+3}^{(n+1)}) + \dots \\ &\quad + \beta_\ell(a_{j+2\ell-3}^{(n+1)} + \delta a_{j+2\ell-2}^{(n+1)}) + \beta_{\ell+1} a_{j+2\ell-1}^{(n+1)}, \quad j = 0, 1, \dots, 2\ell. \end{aligned} \quad (2.10)$$

$n = 0, 1, \dots$ に対して命題 3 を再帰的に利用すると、以下の主定理が得られる。

定理 4 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が $H_m^{(0)} \neq 0$ を満たす拡張型フィボナッチ列とする。そのとき、すべての n に対して、 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ もまた拡張型フィボナッチ列となる。

つまり、dLV 系 (1.2) の初期値 $u_k^{(0)}$ をなす数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列ならば、dLV 系 (1.2) の時間発展によって得られる dLV 変数 $u_k^{(n)}$ をなす数列 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ も拡張型フィボナッチ列となる。

3 dLV 変数の収束性

本節では、dLV 変数 $u_1^{(n)}$ の $n \rightarrow \infty$ における収束値を代数方程式の実数解に関連づける。以下、すべての n において $H_k^{(n)} \neq 0, \hat{H}_k^{(n)} \neq 0, k = 1, 2, \dots, m$ とする。実際には $H_k^{(0)} \neq 0, \hat{H}_k^{(0)} \neq 0$ ならば $n = 1, 2, \dots$ に対して $H_k^{(n)} \neq 0, \hat{H}_k^{(n)} \neq 0$ となるが、詳しくは [1] を参照されたい。

$j \rightarrow \infty$ のとき、フィボナッチ数の比 F_{j+1}/F_j が黄金比 $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ に収束することは有名である。また黄金比 τ は、2 次の代数方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (3.1)$$

の実数解と等しいことが知られている [6]. [4] によると, $j \rightarrow \infty$ のとき, m -step フィボナッチ列の十分大きな隣り合う 2 数の比 G_{j+1}/G_j は m 次の代数方程式

$$x^m - x^{m-1} - \dots - x - 1 = 0 \quad (3.2)$$

の実数解 c_m となる.

ここで, $m=2$, かつ, 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,2,3}$ がフィボナッチ列とする. 分散関係式 (1.8) から n が大きくなれば $|a_j^{(n)}|$ も大きくなるのは明らかで, dLV 系 (1.2) における極限 $n \rightarrow \infty$ はフィボナッチ列 $\{F_j\}_{j=0,1,\dots}$ の極限 $k \rightarrow \infty$ と対応する. よって, $n \rightarrow \infty$ のとき, dLV 変数 $u_1^{(n)} = a_1^{(n)}/a_0^{(n)}$ は 2 次の代数方程式 (3.1) の実数解 τ に収束する. 同様に, 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が m -step フィボナッチ列ならば, $n \rightarrow \infty$ において, dLV 変数 $u_1^{(n)} = a_1^{(n)}/a_0^{(n)}$ は m 次の代数方程式 (3.2) の実数解 c_m と一致する [1].

定理 4 を利用すると, $u_1^{(n)} = a_1^{(n)}/a_0^{(n)}$ の $n \rightarrow \infty$ における漸近挙動について, 以下の定理が導かれる.

定理 5 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が $H_m^{(0)} \neq 0$ を満たす拡張型フィボナッチ列とする. そのとき, $n \rightarrow \infty$ において, dLV 変数 $u_1^{(n)}$ は以下に示す m 次の代数方程式の実数解に収束する. $m=2$ のとき,

$$x^2 - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \quad (3.3)$$

$m=3$ のとき,

$$x^3 - \beta_2 x^2 - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \quad (3.4)$$

$m=4$ のとき,

$$x^4 - \beta_2(\delta x^3 + x^2) - \beta_1(\delta x + 1) = 0, \quad (3.5)$$

$m=5$ のとき,

$$x^5 - \beta_3 x^4 - \beta_2(\delta x^3 + x^2) - \beta_1(\delta x + 1) = 0. \quad (3.6)$$

[3, 5] では, 離散時間 $n=0$ において $u_k^{(0)}$ が正ならば, $u_k^{(n)}$ は漸近収束することが示されているが, $u_k^{(0)}$ が正でない場合の収束性については議論されていない. $u_k^{(0)}$ が正でない場合の $u_k^{(n)}$ の漸近収束性について, 以下に数値例を示す. 実験環境は OS: Mac OS 10.6.2, CPU: Intel Core 2 Duo 3.06GHz, RAM: 4GB であり, Wolfram Mathematica 6.0 を利用した. 数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,2,3}$ として $a_0^{(0)}=1, a_1^{(0)}=2, a_2^{(0)}=3, a_3^{(0)}=5$ のようにフィボナッチ数を与えると, $n=0$ のときの dLV 変数はそれぞれ $u_1^{(0)}=2, u_2^{(0)}=-1/6 < 0, u_3^{(0)}=-3/5 < 0$ となる. $u_k^{(0)}$ は必ずしも正ではないが, n を大きくすると, $u_1^{(n)}$ と $u_3^{(n)}$ はそれぞれ 2 次の代数方程式 (3.1) の実数解 $\tau \approx 1.618033988749895$ と $-\tau^{-1} \approx -0.6180339887498948$ に近づく. 因みに $u_1^{(50)} = 1.618033988749895, u_2^{(50)} = -2.744912295573105 \times 10^{-43}, u_3^{(50)} = -0.6180339887498948$ である. また, $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,5}$ として $a_0^{(0)}=1, a_1^{(0)}=2, a_2^{(0)}=3, a_3^{(0)}=6, a_4^{(0)}=11, a_5^{(0)}=20$ のようにトリボナッチ数を与えた場合, n を大きくしても $u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}$ は収束しないが, $u_1^{(50)} = 1.839286755214161$ のように $u_1^{(n)}$ は (3.2) で $m=3$ とした代数方程式の実数解 1.839286755214161 に近づく. なお, $u_2^{(50)} = -1.659179411653574 \times 10^{-27}$ であり, n が大きくなるにつれて $u_2^{(n)}$ は 0 に近づいていく.

$m=5$ の場合の数値例を以下に示す. $a_0^{(0)}=1, a_1^{(0)}=2, a_2^{(0)}=3, a_3^{(0)}=6, a_4^{(0)}=7$ および $\beta_1=2, \beta_2=3, \beta_3=4$ として,

$$a_{j+5}^{(0)} = 2(a_j^{(0)} + \delta a_{j+2}^{(0)}) + 3(a_{j+2}^{(0)} + \delta a_{j+4}^{(0)}) + 4a_{j+4}^{(0)}, \quad j=0,1,\dots,4 \quad (3.7)$$

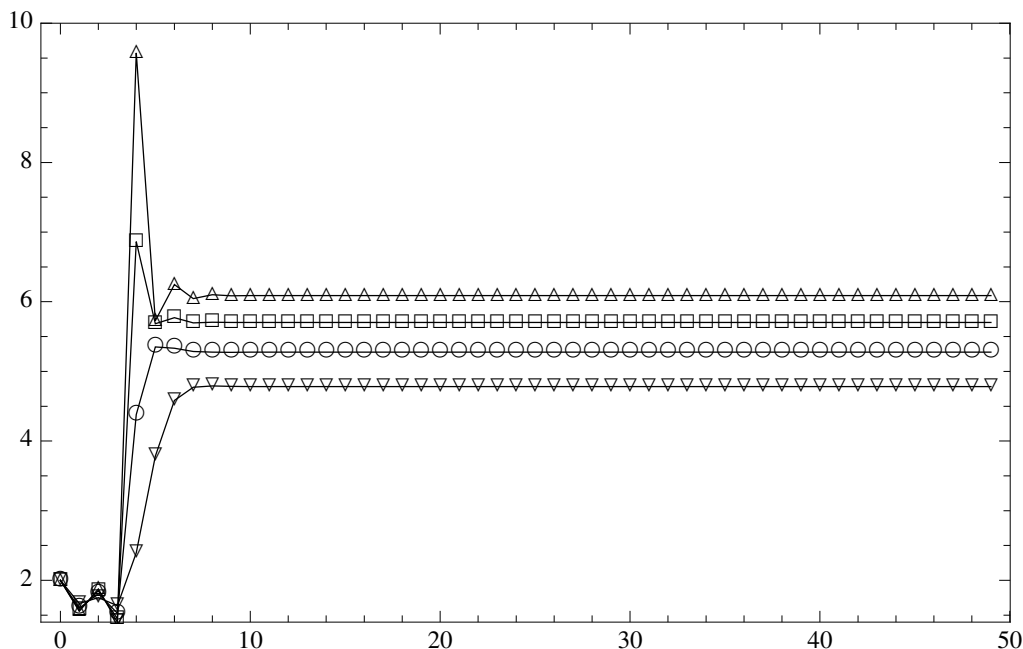


図 1: $m = 5$, $\delta = 1, 2, 3, 4$ の場合の $u_1^{(n)}$ の挙動. 横軸は反復回数, 縦軸は $u_1^{(n)}$ の値. (∇ : $\delta = 1$, \circ : $\delta = 2$, \square : $\delta = 3$, \triangle : $\delta = 4$).

表 1: $\delta = 1, 2, 3, 4$ の場合の $u_1^{(50)}$ の値と Solve[(3.8)] の値.

δ	$u_1^{(50)}$	Solve[(3.8)]
1	4.780881665109554	4.780881665109474
2	5.275070472441088	5.275070472441079
3	5.704200883501665	5.704200883501707
4	6.088688422111487	6.088688422111447

によって $a_5^{(0)}, a_6^{(0)}, a_7^{(0)}, a_8^{(0)}, a_9^{(0)}$ を求める. 続いて, (1.3)–(1.5) によって $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_9^{(0)}$ を定め, その後, dLV 系 (1.2) を 50 回反復させる. 例えば, $\delta = 1$ のとき, $u_1^{(50)} = 4.780881665109554$ となる. $\delta = 2, 3, 4$ に対しても同様の計算を行うと, 図 1 が得られる. 横軸は反復回数, 縦軸は $u_1^{(n)}$ の値であり, 記号 $\nabla, \circ, \square, \triangle$ はそれぞれ $\delta = 1, \delta = 2, \delta = 3, \delta = 4$ の場合を表す. 図 1 から, $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ に拡張型フィボナッチ数が並ぶ場合も, $n \rightarrow \infty$ において dLV 変数 $u_1^{(n)}$ は定数に収束することが窺える. さらに, Mathematica の関数 Solve[] によって 5 次の代数方程式

$$x^5 - 4x^4 - 3(\delta x^3 + x^2) - 2(\delta x + 1) = 0, \quad \delta = 1, 2, 3, 4 \quad (3.8)$$

の実数解を求め, 図 1 の $u_1^{(50)}$ の値を併記すると, 表 1 となる. 表 1 は左から順に, δ の値, $u_1^{(50)}$ の値, Solve[(3.8)] の値を記している. 表 1 から, n が十分大きくなると $u_1^{(n)}$ は代数方程式 (3.8) の実数解に近づくことが確認できる.

4 まとめ

本報告では、dLV系(1.2)には拡張型フィボナッチ列を保存する数理構造があることを示した。dLV系(1.2)の初期値 $u_k^{(0)}$ において、数列 $\{a_j^{(0)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列ならば、dLV系(1.2)の時間発展によって得られるdLV変数 $u_k^{(n)}$ においても、 $\{a_j^{(n)}\}_{j=0,1,\dots,2m-1}$ が拡張型フィボナッチ列となる。また、 $m=2,3,4,5$ の場合、すべての k に対して $u_k^{(0)} > 0$ でなくても $n \rightarrow \infty$ においてdLV変数 $u_1^{(n)}$ は定数に収束する。収束値は差分パラメータ δ および拡張型フィボナッチ列のパラメータを係数に含む m 次代数方程式の実数解に一致することを明らかにした。

今後は、 $u_1^{(n)}$ の収束性について、 $m=2,3,4,5$ の場合だけでなく任意の m の場合についても議論する。また、dLV系(1.2)と関連する新たな数列を見出し、dLV変数の $n \rightarrow \infty$ における収束値がどのような代数方程式の解になるのか調べたい。

参考文献

- [1] K. Akaiwa and M. Iwasaki: “On m -step Fibonacci sequence in discrete Lotka-Volterra system”, submitted.
- [2] R. Hirota and S. Tsujimoto: “Conserved quantities of a class of nonlinear difference equations”, J. Phys. Soc. Jpn **64** (1995), 3125–3127.
- [3] M. Iwasaki and Y. Nakamura: “On the convergence of a solution of the discrete Lotka-Volterra system”, Inverse Problems **18** (2002), 1569–1578.
- [4] P. A. Martin: “The Galois group of $x^n - x^{n-1} - \dots - x - 1$ ”, J. Pure Appl. Algebra **190** (2004), 213–223.
- [5] S. Tsujimoto, Y. Nakamura and M. Iwasaki: “The discrete Lotka-Volterra system computes singular values”, Inverse Problems **17** (2001), 53–58.
- [6] S. Vajda: “Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section – theory and Applications –”, Dover, New York, 2008.
- [7] S. Yamazaki: “On the system of non-linear differential equations $\dot{y}_k = y_k(y_{k+1} - y_{k-1})$ ”, J. Phys. A: Math. Gen. **20** (1987), 6237–6241.