A^<(1)>_<2n+1> 対称性を持つ結合型パンルヴェVI系の_F_n 超幾何函数解

鈴木, 貴雄
神戸大学理学研究科

宮本, 将臣
神戸大学理学研究科

https://doi.org/10.15017/23406

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (22), pp.155-160, 2011-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8
Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 22 (pp. 155 - 160)

$A_{2n+1}^{(1)}$ 対称性を持つ結合型パンルヴェ VI 系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解

鈴木　貴雄（SUZUKI Takao），宮本　将臣（MIYAMOTO Masaomi）

（Received 10 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

$A^{(1)}_{2n+1}$ 対称性を持つ結合型パンルヴェVI系の ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解

神戸大学理学研究科　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)
宮本 将臣　(Miyamoto MASAOMI)

概 要

現在までに, パンルヴェVI 方程式の高階化がいくつか提出されている. その中でも, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つものについては, 一般超幾何関数 ${}_{n+1}F_n$ で記述される特殊解を持つことが最近の研究で明らかになった. 本稿ではこの結果の詳細について報告する.

1 序文

本研究で扱う対象は, 次のハミルトン系として定義される $A^{(1)}_{2n+1}$ 型パンルヴェ方程式 [1, 5] である[1]:

$$\begin{aligned} &t(t-1)\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad t(t-1)\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,\ldots,n), \\ &H = \sum_{i=1}^{n} H_{\mathrm{VI}}\left[q_i, p_i; \sum_{j=0}^{n}\alpha_{2j+1} - \alpha_{2i-1} - \eta, \sum_{j=0}^{i-1}\alpha_{2j}, \sum_{j=i}^{n}\alpha_{2j}, \alpha_{2i-1}\eta\right] \\ &\qquad + \sum_{1\le i<j\le n}(q_i-1)(q_j-t)\{(q_ip_i+\alpha_{2i-1})p_j + p_i(q_jp_j+\alpha_{2j-1})\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, H_{VI} は次で与えられるパンルヴェVI 方程式のハミルトニアンである:

$$H_{\mathrm{VI}}[q,p;\kappa_0,\kappa_1,\kappa_t,\kappa] = q(q-1)(q-t)p^2 - \kappa_0(q-1)(q-t)p - \kappa_1 q(q-t)p - (\kappa_t-1)q(q-1)p + \kappa q.$$

また, $\alpha_0,\ldots,\alpha_{2n+1}$ 及び η は定数パラメータで, 関係式 $\alpha_0+\ldots+\alpha_{2n+1}=1$ を満たすとする. 方程式 (1.1) は次の二つの重要な性質を持つ [5]; 詳細については付録を参照のこと.

定理 1.1. 方程式 (1.1) の対称性を与える双有理変換群は, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群と同型である.

定理 1.2. 方程式 (1.1) は, ループ代数 $\mathfrak{sl}_{2n+2}[z,z^{-1}]$ 上で定義されるラックス形式の微分両立条件として得られる[2].

本研究の目的は, 方程式 (1.1) が一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ によって記述される特殊解を持つことを示すことである[3].

一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ はガウス超幾何函数の一般化の一つであり, 次のベキ級数で定義される:

$${}_{n+1}F_n\left[\begin{matrix} a_0,\ldots,a_n \\ b_1,\ldots,b_n \end{matrix};t\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(a_0)_i(a_1)_i\ldots(a_n)_i}{(1)_i(b_1)_i\ldots(b_n)_i}t^i, \quad (a)_i = a(a+1)\ldots(a+i-1) = \frac{\Gamma(a+i)}{\Gamma(a)}.$$

また, ${}_{n+1}F_n$ は次の一般超幾何微分方程式を満たす:

$$[\delta(\delta+b_1-1)\ldots(\delta+b_n-1) - t(\delta+a_0)\ldots(\delta+a_n)]x = 0, \quad \delta = t\frac{d}{dt}.$$

良く知られているように, パンルヴェVI 方程式[4]はガウス超幾何函数 ${}_2F_1$ によって記述される特殊解を持つ [2]. 従って本研究の結果は, この両者の間の関係を自然な形で高階化したことになる[5].

[1] この方程式は, 津田照久氏によって得られたシュレジンガー系 $\mathcal{H}_{n,1}$ [7] と等価である.
[2] また, フックス型方程式のモノドロミー保存変形としても得られる [7].
[3] 同じ結果が津田照久氏によって独立に得られている [8]. ただし, 津田氏の結果は積分表示によるものであり, 本研究とはアプローチが全く異なる.
[4] 方程式 (1.1) の $n=1$ の場合がパンルヴェVI 方程式そのものである.
[5] パンルヴェVI 方程式のもう一つの高階化である笹野系 [4] については, 現在のところ超幾何函数解は見つかっていない.

2　対称形式と一般超幾何微分方程式

まず最初に, パンルヴェVI 方程式とガウス超幾何函数との間の関係を復習しておく. 方程式 (1.1) において $n=1$ とした上で, 特殊化の条件 $p_1=\eta=0$ を課す. この時, 残りの従属変数 q_1 はリッカチ方程式

$$t(t-1)\frac{dq_1}{dt}=\alpha_1 q_1^2+\{(\alpha_3+\alpha_0)t-(\alpha_0+\alpha_1)\}q_1-\alpha_3 t,$$

を満たす. これは変数変換

$$q_1=\frac{t(1-t)}{\alpha_1}\frac{d}{dt}\log\{(t-1)^{\alpha_3}x(t)\},$$

によって, 次のガウス超幾何微分方程式に変換される:

$$[\delta(\delta+\alpha_2+\alpha_3-1)-t(\delta+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\delta+\alpha_3)]x=0.$$

次に, 上記の事実を一般の n に対して拡張することを考える. 具体的には, 方程式 (1.1) の下で特殊化の条件 $p_1=\ldots=p_n=\eta=0$ を課すと, 次の非線形微分方程式系に帰着する:

$$\begin{aligned}t(t-1)\frac{dq_i}{dt}&=\alpha_{2i-1}q_i^2+\left\{\sum_{j=0}^{n}\alpha_{2j+1}t-\alpha_{2i-1}(t+1)+\sum_{j=0}^{i-1}\alpha_{2j}(t-1)\right\}q_i-\sum_{j=0;j\neq i-1}^{n}\alpha_{2j+1}t\\&\quad+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{2j-1}(q_j-1)(q_i-t)+\sum_{j=i+1}^{n}\alpha_{2j-1}(q_i-1)(q_j-t).\end{aligned}$$

しかしこの方程式は, リッカチ方程式の場合と異なり, 線形化することが容易ではない. そこで, 予め方程式 (1.1) をより対称性の高い形式[6]に書き直しておいて, その後で特殊化の条件を課す, ということを考える.

従属変数 x_n を次の積分で定める:

$$t(1-t)\frac{d}{dt}\log x_n=\sum_{i=1}^{n}\{(q_i-1)(q_i-t)p_i+\alpha_{2i-1}q_i\}+t\alpha_{2n+1}-(t+1)\eta.$$

これを用いて従属変数 x_i,y_i $(i=0,\ldots,n-1)$ 及び y_n を次のように定める:

$$x_i=\frac{x_nq_{i+1}}{t},\quad y_i=\frac{tp_{i+1}}{x_n},\quad y_n=-\frac{1}{x_n}\left(\sum_{j=1}^{n}q_jp_j+\eta\right).$$

これら $2n+2$ 個の従属変数は次のハミルトン系[7]を満たす:

$$\begin{aligned}&\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\quad\frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}\quad(i=0,\ldots,n),\\&H=\frac{1}{t}\sum_{i=0}^{n}\left\{\frac{1}{2}x_i^2y_i^2-\alpha_{2i+2}^{(2n-2i-1)}x_iy_i+\sum_{j=0}^{i-1}x_i(x_iy_i+\alpha_{2i+1})y_j\right\}+\frac{1}{1-t}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}x_i(x_iy_i+\alpha_{2i+1})y_j.\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで, パラメータに関する記号を

$$\alpha_k^{(l)}=\alpha_k+\alpha_{k+1}+\ldots+\alpha_{k+l},\quad\alpha_{k+2n+2}=\alpha_k,$$

と定め, そして次の非整数差条件が常に満たされることを要請しておく:

$$\alpha_{2i}^{(2j-1)}\notin\mathbb{Z},\quad\sum_{i=0}^{n}\alpha_{2i+1}\notin\mathbb{Z},\quad\alpha_{2i-1}^{(2j-1)}\notin\mathbb{Z}\quad(i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,n-i+1).$$

[6] これ以降, **対称形式**と呼ぶことにする.

[7] $A_{2n+1}^{(1)}$ 型高階パンルヴェ方程式をドリンフェルト・ソコロフ階層から導く際には, 実はまずこの対称形式の方が先に得られる. そしてこれを $2n$ 次元正準座標系で書き直したものが方程式 (1.1) である.

また, 従属変数の間には次の関係式が成り立つことを注意しておく:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i y_i + \eta = 0.$$

この時, 特殊化の条件 $p_1 = \ldots = p_n = \eta = 0$ は $y_0 = \ldots = y_n = \eta = 0$ と等価であり, この条件の下で対称形式 (2.1) は一般超幾何微分方程式に帰着する[8].

命題 2.1. 対称形式 (2.1) の下で特殊化の条件

$$y_i = 0 \quad (i = 0, \ldots, n), \quad \eta = 0,$$

を課す. このとき $\mathbf{x} = {}^t[x_0, \ldots, x_n]$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の線形微分方程式系

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{A_0}{t} + \frac{A_1}{1-t}\right)\mathbf{x}, \\ &A_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{2i+2}^{(2n-2i-1)} E_{i,i} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{2j+1} E_{i,j}, \quad A_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j+1} E_{i,j}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

を満たす. ただし, $E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{k,l=0}^{n}$ は行列単位とする.

ここで, A_0, A_1 は具体的には次の形の行列となる:

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\alpha_2^{(2n-1)} & \alpha_3 & \alpha_5 & \ldots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n+1} \\ 0 & -\alpha_4^{(2n-3)} & \alpha_5 & \ldots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n+1} \\ 0 & 0 & -\alpha_6^{(2n-5)} & \ldots & \alpha_{2n-1} & \alpha_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_{2n}^{(1)} & \alpha_{2n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{2n+1} \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{2n+1} \end{bmatrix}.$$

また, 無限遠点での留数行列は下三角行列となる.

3 ${}_{n+1}F_n$ 超幾何函数解

一般超幾何微分方程式 (2.2) の $t = 0$ での基本解を, フロベニウスの方法を用いて級数解の形で与える. 次のようなゲージ変換を考える:

$$\mathbf{x}^k = t^{\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} O & t^{-1} I_{n-k} \\ I_{k+1} & O \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (k = 0, \ldots, n),$$

ただし, I_k は k 次単位行列とする. このとき, 各 k に対して (2.2) は次のように変換される[9]:

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{x}^k}{dt} = \left(\frac{A_0^k}{t} + \frac{A_1^k}{1-t}\right)\mathbf{x}^k, \\ &A_0^k = -\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{2i+2k+4}^{(2n-2i-1)} E_{i,i} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{2j+2k+3} E_{i,j}, \quad A_1 = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j+2k+3} E_{i,j}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

方程式系 (3.1) の級数解は次のようにして求まる. ベキ級数

$$\mathbf{x}^k = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{x}_i^k t^i,$$

[8] もう少し正確に述べると, 一般超幾何微分方程式を大久保型に変換したもの [3] と等価な方程式系が得られる.
[9] 方程式 (2.2) 中のパラメータの添字を全て $2k+2$ 増やしたものに変換される.

を (3.1) に代入すると漸化式

$$A_0^k \mathbf{x}_0^k = \mathbf{0}, \quad \{A_0^k - (i+1)I_{n+1}\}\mathbf{x}_{i+1}^k = (A_0^k - A_1^k - iI_{n+1})\mathbf{x}_i^k \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}),$$

が得られる. この漸化式は係数行列に関する次元定理より 1 次元分の解を持つことが分かり, その具体形は次で与えられる:

$$\mathbf{x}_i^k = \begin{bmatrix} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{2k-2j+1}^{2j})_{i+1}}{(\alpha_{2k-2j}^{2j+1})_{i+1}} \cdot \frac{(\alpha_{2k+3}^{2n})_i}{(\alpha_{2k+2}^{2n+1})_i} \\ \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(\alpha_{2k-2j+1}^{2j})_{i+1}}{(\alpha_{2k-2j}^{2j+1})_{i+1}} \cdot \frac{(\alpha_{2k+5}^{2n-2})_i(\alpha_{2k+3}^{2n})_i}{(\alpha_{2k+4}^{2n-1})_i(\alpha_{2k+2}^{2n+1})_i} \\ \vdots \\ \frac{(\alpha_{2k+1})_{i+1}}{(\alpha_{2k}^{1})_{i+1}} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(\alpha_{2k+2j+3}^{2n-2j})_i}{(\alpha_{2k+2j+2}^{2n-2j+1})_i} \\ \prod_{j=0}^{n} \frac{(\alpha_{2k+2j+3}^{2n-2j})_i}{(\alpha_{2k+2j+2}^{2n-2j+1})_i} \end{bmatrix} \quad (i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}; k = 0, \ldots, n).$$

これにより, 最終的に次の定理が得られる.

定理 3.1. 領域 $|t| < 1$ において, 一般超幾何微分方程式 (2.2) は次の基本解を持つ:

$$\mathbf{x} = t^{-\alpha_{2k+2}^{(2n-2k-1)}} \begin{bmatrix} f^{k,k} \\ \vdots \\ f^{k,0} \\ tf^{k,n} \\ \vdots \\ tf^{k,k+1} \end{bmatrix} \quad (k = 0, \ldots, n), \quad f^{k,l} = \prod_{i=1}^{l} \frac{\alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}}{\alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)}} \cdot {}_{n+1}F_n \left[\begin{matrix} a_0, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix} ; t \right],$$

ただし, 一般超幾何函数のパラメータは次で与えられる:

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha_{2k-2n+1}^{(2n)}, \\ &a_i = 1 + \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \quad b_i = 1 + \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \quad (i = 1, \ldots, l), \\ &a_i = \alpha_{2k-2i+3}^{(2i-2)}, \qquad b_i = \alpha_{2k-2i+2}^{(2i-1)} \qquad (i = l+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

4 $A_{2n+1}^{(1)}$ 型パンルヴェ方程式の退化構造

一般超幾何函数 ${}_{n+1}F_n$ は合流操作によって, 一般合流型超幾何函数 ${}_{n-r+1}F_n$ に帰着することが知られている. 一般合流型超幾何函数はベキ級数

$${}_{n-r+1}F_n \left[\begin{matrix} a_r, \ldots, a_n \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix} ; t \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_r)_i \ldots (a_n)_i}{(b_1)_i \ldots (b_n)_i} t^i \quad (r = 1, \ldots, n+1),$$

によって定義され, 合流操作 ${}_{n-r+2}F_n \to {}_{n-r+1}F_n$ は変数とパラメータの置き換え

$$t \to \varepsilon t, \quad a_{r-1} \to \varepsilon^{-1},$$

及び極限 $\varepsilon \to 0$ によって与えられる. この合流操作は対称形式 (2.1) に自然に持ち上がり, $A_{2n+1}^{(1)}$ 型パンルヴェ方程式の退化構造を与える.

各 $r = 1, \ldots, n+1$ に対して, 次のハミルトン系 ${}_{n-r+1}\mathcal{H}_n$ を考える:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = 0, \ldots, n),$$

$$tH = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2} x_i y_i (x_i y_i - 2\alpha_{2i+2}^{(2n-2i-1)}) + \sum_{i=0}^{r-2} x_{i+1} y_i + \sum_{i=r-1}^{n} \left\{ tx_0 + \sum_{j=i+1}^{n} x_j (x_j y_j + \alpha_{2j+1}) \right\} y_i.$$

ここで, パラメータは次を満たすとする:

$$\alpha_{2i} = 0 \quad (i = 0, \ldots, r-1), \quad \sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j+1} + \sum_{j=r}^{n} \alpha_{2j} = 1.$$

また, 従属変数の間には次の関係式が常に成り立つとする:

$$\sum_{j=0}^{n} x_j y_j + \eta = 0.$$

合流操作 ${}_{n-r+2}\mathcal{H}_n \to {}_{n-r+1}\mathcal{H}_n$ は変数とパラメータの置き換え

$$t \to \varepsilon t, \quad \alpha_{2r-2} \to -\varepsilon^{-1}, \quad \alpha_{2r-1} \to \alpha_{2r-1} + \varepsilon^{-1}, x_i \to \varepsilon^{-1} x_i, \quad y_i \to \varepsilon y_i \quad (i = 0, \ldots, r-2),$$

及び極限 $\varepsilon \to 0$ によって与えられる. ただし, ${}_{n+1}\mathcal{H}_n$ は対称形式 (2.1) を表すとする.

この時, 次の定理が自然に成り立つ[10].

定理 4.1. ハミルトン系 ${}_{n-r+1}\mathcal{H}_n$ は特殊化の条件

$$y_0 = \ldots = y_n = \eta = 0,$$

の下で, 一般合流型超幾何函数 ${}_{n-r+1}F_n$ によって記述される解を持つ.

A 対称形式のアフィン・ワイル群対称性

双有理変換 $r_0, \ldots, r_{2n+1}$ の従属変数 x_j, y_j $(j = 0, \ldots, n)$ への作用を

$$\begin{aligned}
&r_0(x_j) = t^{-\alpha_0} x_j, \quad r_0(y_j) = t^{\alpha_0} \left(y_j + \frac{\alpha_0}{x_n - t x_0} \{x_n - t x_0, y_j\} \right), \\
&r_{2i+1}(x_j) = x_j + \frac{\alpha_{2i+1}}{y_i} \{y_i, x_j\}, \quad r_{2i+1}(y_j) = y_j \quad (i = 0, \ldots, n-1), \\
&r_{2i}(x_j) = x_j, \quad r_{2i}(y_j) = y_j + \frac{\alpha_{2i}}{x_{i-1} - x_i} \{x_{i-1} - x_i, y_j\} \quad (i = 1, \ldots, n), \\
&r_{2n+1}(x_j) = t^{\alpha_{2n+1}} \left(x_j + \frac{\alpha_{2n+1}}{y_n} \{y_n, x_j\} \right), \quad r_{2n+1}(y_j) = t^{-\alpha_{2n+1}} y_j,
\end{aligned}$$

パラメータ η, α_j $(j = 0, \ldots, 2n+1)$ への作用を

$$r_i(\eta) = \eta + (-1)^i \alpha_i, \quad r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{i,j} \alpha_i \quad (i = 0, \ldots, 2n+1),$$

と与える. ここで, ポワソン括弧は次のように定義する:

$$\{x_i, y_j\} = -\delta_{i,j} \quad (i, j = 0, \ldots, n).$$

また, $a_{i,j}$ は $A^{(1)}_{2n+1}$ 型カルタン行列の (i, j) 成分で, 具体的には次のように与えられる:

$$\begin{aligned}
&a_{i,i} = 2 && (i = 0, \ldots, 2n+1), \\
&a_{i,i+1} = a_{2n+1,0} = a_{i+1,i} = a_{0,2n+1} = -1 && (i = 0, \ldots, 2n), \\
&a_{i,j} = 0 && (\text{otherwise}).
\end{aligned}$$

対称形式 (2.1) はこれらの変換の下で不変であり[11], また変換群 $\langle r_0, \ldots, r_{2n+1} \rangle$ は $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群と同型となる[12].

[10]詳細については [6] 参照.
[11]この事実を特殊解に応用すれば, 一般超幾何函数のオイラー変換公式が得られるはずである.
[12]アフィン・ワイル群の定義についてはここでは省略する.

B　対称形式のラックス形式

対称形式 (2.1) は $2n+2$ 次正方行列を用いて定義されるラックス形式[13]

$$z\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\psi} = M\boldsymbol{\psi}, \quad t\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\psi} = B\boldsymbol{\psi},$$

の微分両立条件として得られる．ここで, 行列 M, B は次のように与えられる[14]:

$$\begin{aligned} M = &\sum_{i=1}^{2n+2} \varepsilon_i E_{i,i} + \sum_{i=1}^{n+1} y_{i-1} E_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) E_{2i,2i+1} + (x_0 - t^{-1}x_n) z E_{2n+2,1} \\ &+ \sum_{i=1}^{2n} E_{i,i+2} + t^{-1} z E_{2n+1,1} + z E_{2n+2,2}, \\ B = &(tw_{2n+1}x_0 - \varepsilon_1) E_{1,1} + \sum_{i=2}^{n+1} (w_{2i-3}x_{i-1} - \varepsilon_{2i-1}) E_{2i-1,2i-1} - \sum_{i=1}^{n+1} (w_{2i-1}x_{i-1} + \varepsilon_{2n+2}) E_{2i,2i} \\ &+ \sum_{i=1}^{n+1} w_{2i-1} E_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{n} x_{i-1} E_{2i,2i+1} + t^{-1} x_n z E_{2n+2,1} - \sum_{i=1}^{n} E_{2i-1,2i+1} - t^{-1} z E_{2n+1,1}, \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} &y_0 = tw_{2n+1} - w_1, \quad y_i = w_{2i-1} - w_{2i+1} \quad (i = 1, \ldots, n), \\ &\alpha_0 = -\varepsilon_{2n+2} + \varepsilon_1 + 1, \quad \alpha_i = -\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} \quad (i = 1, \ldots 2n+1). \end{aligned}$$

また, $E_{i,j} = [\delta_{i,k}\delta_{j,l}]_{k,l=1}^{2n+2}$ はここでは $2n+2$ 次の行列単位とする．

参考文献

[1] K. Fuji and T. Suzuki, Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems, Funkcial. Ekvac. **53** (2010) 143-167.

[2] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé — A Modern Theory of Special Functions, Aspects of Mathematics **E16** (Vieweg, 1991).

[3] K. Okubo, K. Takano and S. Yoshida, A connection problem for the generalized hypergeometric equation, Funkcial. Ekvac. **31** (1988) 483-495.

[4] Y. Sasano and Y.Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B2** (2007), 215-225.

[5] T. Suzuki, A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A, Preprint (arXiv:1002.2685).

[6] T. Suzuki, A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$, SIGMA **6** (2010), 078.

[7] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, MI Preprint Series **7** (Kyushu Univ., 2010) 1-31.

[8] T. Tsuda, Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type, Quart. J. Math., in press.

[13] 原点に確定特異点を, 無限遠点に不確定特異点を持つ．

[14] これらの行列は適当なゲージ変換で, ループ代数 $\mathfrak{sl}_{2n+2}[z, z^{-1}]$ の元に変換出来る．