符号付き超離散パンルヴェII 型方程式とその特殊解の系列について

礒島, 伸
青山学院大学理工学部

今野, 智之
青山学院大学理工学部

三村, 尚之
青山学院大学理工学研究科

村田, 実貴生
青山学院大学理工学部

他

https://doi.org/10.15017/23405

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22AO-S8 (21), pp.149-154, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」（研究代表者　筧　三郎）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 21 (pp. 149 - 154)

符号付き超離散パンルヴェII 型方程式とその特殊解の系列について

礒島　伸（ISOJIMA Shin），今野　智之（KONNO Tomoyuki），三村　尚之（MIMURA Naoyuki），村田　実貴生（MURATA Mikio），薩摩　順吉（SATSUMA Junkichi）

（Received 14 January 2011）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

符号付き超離散パンルヴェII 型方程式とその特殊解の系列について

青山学院大学理工学部	礒島伸	(ISOJIMA Shin)
	今野智之	(KONNO Tomoyuki)
青山学院大学大学院理工学研究科	三村尚之	(MIMURA Naoyuki)
青山学院大学理工学部	村田実貴生	(MURATA Mikio)
青山学院大学理工学部	薩摩順吉	(SATSUMA Junkichi)

概　要　本稿では [1] に基づいて q 差分パンルヴェII 型方程式の超離散類似を「符号付き超離散化」の手続きによって構成する．さらにパンルヴェII 型方程式の特殊関数解の系列に対応する，超離散系の厳密解の系列を求める．また Airy 方程式の符号付き超離散化とその特殊解についても議論する．

1　超離散 Airy 方程式とその特殊解

q-Airy 方程式は

$$w(q\tau)-\tau w(\tau)+w(q^{-1}\tau)=0 \tag{1.1}$$

で与えられる．適当な連続極限で (1.1) は Airy 方程式

$$\frac{d^2v}{ds^2}+sv=0 \tag{1.2}$$

に帰着される．方程式 (1.1) の線形独立な 2 つの解として

$$q\mathrm{Ai}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin\{\frac{\pi}{4}(2n+2\frac{\log\tau}{\log q}+1)\}q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1\cdot(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}\tau^n \tag{1.3}$$

$$q\mathrm{Bi}(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{2}\sin\{\frac{\pi}{4}(2n+2\frac{\log\tau}{\log q}+3)\}q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1\cdot(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2n})}\tau^n \tag{1.4}$$

を取ることができる．これらの関数の振る舞いは図 1[a] に見られるようにそれぞれ Ai，Bi 関数に類似している．

このように定符号ではない解を持つ方程式を超離散化するためには「符号付き超離散化」の手続き [2] が有効である．以下，$\tau=q^m$ と置き，パラメータ ε を $q=e^{Q/\varepsilon}$ $(Q<0)$ により導入する．符号付き超離散化の手続きにおいては，従属変数を

$$w(q^m)=\{s(\omega_m)-s(-\omega_m)\}e^{W_m/\varepsilon} \tag{1.5}$$

によって置き換える．ここで $\omega_m\in\{+1,-1\}$ は $w(q^m)$ の符号であり，関数 $s(\omega)$ は

$$s(\omega)=\begin{cases}1 & (\omega=+1)\\ 0 & (\omega=-1)\end{cases} \tag{1.6}$$

で定義される．この置き換えを施すと (1.1) は

$$\begin{aligned}&s(\omega_{m+1})e^{W_{m+1}/\varepsilon}+s(-\omega_m)e^{mQ+W_m/\varepsilon}+s(\omega_{m-1})e^{W_{m-1}/\varepsilon}\\&\qquad=s(-\omega_{m+1})e^{W_{m+1}/\varepsilon}+s(\omega_m)e^{mQ+W_m/\varepsilon}+s(-\omega_{m-1})e^{W_{m-1}/\varepsilon}\end{aligned} \tag{1.7}$$

と変形できる．この式の両辺に $\varepsilon\log$ を施した後に極限 $\varepsilon\to+0$ を取ると，超離散 Airy 方程式

$$\begin{aligned}&\max\left(W_{m+1}+S(\omega_{m+1}),\ mQ+W_m+S(-\omega_m),\ W_{m-1}+S(\omega_{m-1})\right)\\&\qquad=\max\left(W_{m+1}+S(-\omega_{m+1}),\ mQ+W_m+S(\omega_m),\ W_{m-1}+S(-\omega_{m-1})\right)\end{aligned}\tag{1.8}$$

を得る．ここで関数 $S(\omega)$ は $s(\omega)$ の超離散化に相当し，

$$S(\omega)=\begin{cases}0 & (\omega=+1)\\ -\infty & (\omega=-1)\end{cases}\tag{1.9}$$

で定義される．超離散化された変数は符号 ω_m と「振幅」W_m の組 $\mathscr{W}_m:=(\omega_m,W_m)$ で表される．

方程式 (1.8) は陰的な方程式であるが，次のように陽的な前進スキームに書き直すことができる．

$$\omega_{m+1}=\begin{cases}\frac{\omega_m-\omega_{m-1}}{2}+\frac{\omega_m+\omega_{m-1}}{2}\mathrm{sgn}(mQ+W_m-W_{m-1}) & (\omega_m=-\omega_{m-1}\text{ or }mQ+W_m\neq W_{m-1})\\ \text{任意} & (\omega_m=\omega_{m-1}\text{ and }mQ+W_m=W_{m-1})\end{cases}\tag{1.10}$$

$$W_{m+1}\begin{cases}=\max\left(mQ+W_m,\ W_{m-1}\right) & (\omega_m=-\omega_{m-1}\text{ or }mQ+W_m\neq W_{m-1})\\ \leq W_{m-1} & (\omega_m=\omega_{m-1}\text{ and }mQ+W_m=W_{m-1})\end{cases}\tag{1.11}$$

符号付き超離散化により得られた陰的方程式を陽的スキームに書き直すと，一般には次のステップの値が不定となる場合が生じることを注意しておく．なお (1.8) の後退スキームは，前進スキームに対して $m\pm1$ を $m\mp1$ でそれぞれ置き換えることで得られる．

超離散 Airy 方程式の解を求めよう．はじめに，2 点 $\mathscr{W}_0=(\omega_0,W_0)$, $\mathscr{W}_1=(\omega_1,W_1)$ の値を

$$\begin{cases}\omega_1=\omega_0\\ W_1=W_0,\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_1=\omega_0\\ W_1=-Q+W_0,\end{cases}\quad\begin{cases}\omega_1=-\omega_0\\ W_1=2Q+W_0\end{cases}\tag{1.12}$$

と選ぶと時間発展の途中で不定となる場合に落ち込むことを注意しておく．そこで $\mathscr{W}_0$，$\mathscr{W}_1$ が (1.12) を満たさない場合の解を求めると

$$\omega_m=\begin{cases}(-1)^{\frac{m}{2}}\omega_0 & (m=2,4,6,\dots)\\ (-1)^{\frac{m-1}{2}}\omega_1 & (m=3,5,7,\dots)\\ \omega_0 & (m\leq-1)\end{cases}\tag{1.13}$$

$$W_m=\begin{cases}\max(Q+W_1,\ W_0) & (m=2,4,6,\dots)\\ \max(W_1,\ 2Q+W_0) & (m=3,5,7,\dots)\\ -\frac{m(m+1)}{2}Q+\max\left(W_1,\ W_0\right) & (m\leq-1),\end{cases}\tag{1.14}$$

となる．この解において $\mathscr{W}_0=(+1,0)$, $\mathscr{W}_1=(-1,0)$ とした関数を超離散 Bi (uBi) 関数と定義する．

$$\mathrm{uBi}(m)=(\omega_m,W_m)=\begin{cases}\left((-1)^{\frac{m(m+1)}{2}},\ 0\right) & (m\geq0)\\ \left(+1,\ -\frac{m(m+1)}{2}Q\right) & (m\leq-1)\end{cases}\tag{1.15}$$

この関数の振る舞いは Bi 関数に類似している（図 1[b] を参照）.

一方，Ai 関数に相当する解を得るためには例外的な場合 (1.12) を考えなければならない．ここでは (1.12) のうち $\mathscr{W}_0=\mathscr{W}_1$ の場合を考える．このとき $\mathscr{W}_m$ $(m\geq2)$ は一意に定まるが，$\mathscr{W}_{-1}$ は不定となる．

ここで $\mathscr{W}_{-2}$ も不定になる，と仮定しよう．そのためには $\omega_{-1}=\omega_0$ かつ $W_{-1}=W_0+Q$ が成り立たねばならない．この条件により先程は不定だった $\mathscr{W}_{-1}$ が一意に決まる．以下同様に $\mathscr{W}_{m-1}$ $(\forall m\le -2)$ も不定である，と仮定する．$\mathscr{W}_{m-1}$ が不定になるためには $\omega_m=\omega_{m+1}$ かつ $W_m=W_{m+1}-mQ$ が成り立たねばならず，$\mathscr{W}_m$ が一意に決まる．こうして計算していくと

$$\omega_m=\begin{cases}(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\omega_0 & (m\ge 2)\\ \omega_0 & (m\le -1)\end{cases} \tag{1.16}$$

$$W_m=\begin{cases}W_0 & (m\ge 2)\\ \frac{m(m-1)}{2}Q+W_0 & (m\le -1)\end{cases} \tag{1.17}$$

も (1.8) の解であることがわかる．この解において $\mathscr{W}_0=\mathscr{W}_1=(+1,0)$ と選んだ関数として超離散 Ai (uAi) 関数

$$\mathrm{uAi}(m)=(\omega_m,W_m)=\begin{cases}\left((-1)^{\frac{m(m-1)}{2}},\ 0\right) & (m\ge 0)\\ \left(+1,\ \frac{m(m-1)}{2}Q\right) & (m\le -1)\end{cases} \tag{1.18}$$

を定義する．この関数の振る舞いを図 1[b] に示す.

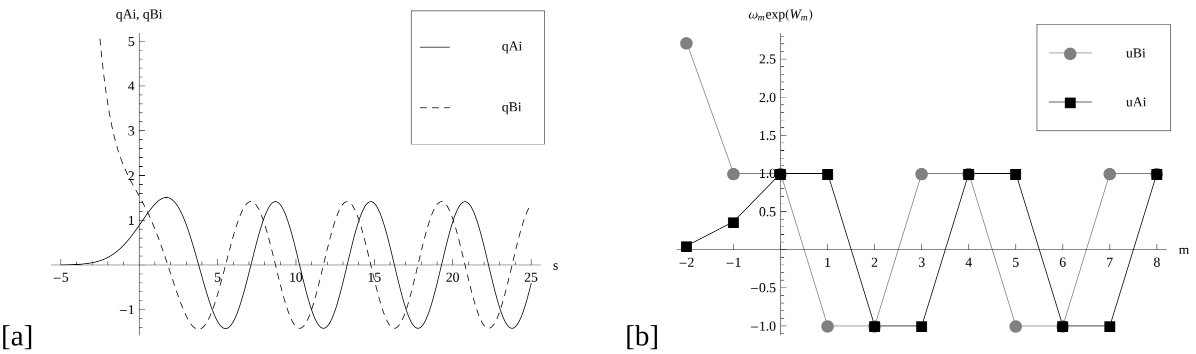

図 1: [a] (1.3), (1.4) の $n=100$ までの近似和のプロット ($q=0.6$, $s=\log(\tau/2)(-2\log q)^{1/3}/\log q$); [b] (1.15), (1.18) のプロット ($Q=-1$);

2 超離散パンルヴェII 型方程式とその特殊解の系列

q-Painlevé II 型方程式 (qPII) は

$$(z(q\tau)z(\tau)+1)\left(z(\tau)z(q^{-1}\tau)+1\right)=\frac{a\tau^2 z(\tau)}{\tau-z(\tau)} \tag{2.1}$$

で与えられる．その特殊解の構造は双線形形式を導入することで明確になる [3]．すなわち，双線形方程式

$$q^{2N}g^{(N+1)}(q^{-1}\tau)g^{(N)}(q^2\tau)-q^N\tau g^{(N+1)}(\tau)g^{(N)}(q\tau)+g^{(N+1)}(q\tau)g^{(N)}(\tau)=0 \tag{2.2}$$

$$q^{2N}g^{(N+1)}(q^{-1}\tau)g^{(N)}(q\tau)-q^{2N}\tau g^{(N+1)}(\tau)g^{(N)}(\tau)+g^{(N+1)}(q\tau)g^{(N)}(q^{-1}\tau)=0 \tag{2.3}$$

を満たす関数 $g^{(N)}(\tau)$ $(N=0,1,2,\dots)$ に対し変数変換

$$z^{(N)}(\tau)=\frac{g^{(N)}(\tau)g^{(N+1)}(q\tau)}{q^N g^{(N)}(q\tau)g^{(N+1)}(\tau)} \tag{2.4}$$

によって構成される関数 $z^{(N)}(\tau)$ は，(2.1) において $a=q^{2N+1}$ とした方程式の解である．なお $g^{(N)}(\tau)$ の明示公式として，成分が (1.8) の解で表される N 次行列式によるものが知られている．

これらの式を超離散化するために新しい変数

$$a=e^{A/\varepsilon} \tag{2.5}$$

$$z(q^m)=(s(\zeta_m)-s(-\zeta_m))e^{Z_m/\varepsilon} \tag{2.6}$$

$$g^{(N)}(q^m)=(s(\gamma_m^{(N)})-s(-\gamma_m^{(N)}))e^{G_m^{(N)}/\varepsilon} \tag{2.7}$$

を導入しよう．(2.1) の超離散類似 (udPII) は

$$\begin{aligned}
&\max\Big[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+\max\big\{S(\zeta_{m+1})+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m-1}),\\
&\quad S(-\zeta_{m+1})+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1}),S(-\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m-1}),\\
&\quad S(\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1})\big\},\ Z_{m+1}+2Z_m+S(\zeta_{m+1}),\\
&\quad 2Z_m+Z_{m-1}+S(\zeta_{m-1}),\ Z_m+S(\zeta_m),\ Z_m+A+2mQ+S(\zeta_m),\\
&\quad Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+\max\big\{S(-\zeta_{m+1})+S(\zeta_{m-1}),S(\zeta_{m+1})+S(-\zeta_{m-1})\big\},\\
&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+\max\big\{S(-\zeta_{m+1})+S(\zeta_m),S(\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)\big\},\\
&\quad Z_m+Z_{m-1}+mQ+\max\big\{S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m-1}),S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1})\big\}\Big]\\
=&\max\Big[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+\max\big\{S(-\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1}),\\
&\quad S(\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)+S(\zeta_{m-1}),S(\zeta_{m+1})+S(\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1}),\\
&\quad S(-\zeta_{m+1})+S(\zeta_m)+S(\zeta_{m-1})\big\},\ Z_{m+1}+2Z_m+S(-\zeta_{m+1}),\\
&\quad 2Z_m+Z_{m-1}+S(-\zeta_{m-1}),\ Z_m+S(-\zeta_m),\ Z_m+A+2mQ+S(-\zeta_m),\\
&\quad Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+\max\big\{S(\zeta_{m+1})+S(\zeta_{m-1}),S(-\zeta_{m+1})+S(-\zeta_{m-1})\big\},\\
&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+\max\big\{S(\zeta_{m+1})+S(\zeta_m),S(-\zeta_{m+1})+S(-\zeta_m)\big\},\\
&\quad Z_m+Z_{m-1}+mQ+\max\big\{S(\zeta_m)+S(\zeta_{m-1}),S(-\zeta_m)+S(-\zeta_{m-1})\big\},mQ\Big]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

で与えられる．また双線形方程式 (2.2) の超離散類似は

$$\begin{aligned}
&\max\Big[2NQ+G_{m-1}^{(N+1)}+G_{m+2}^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m+2}^{(N)}),S(-\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+2}^{(N)})\Big\},\\
&\quad NQ+mQ+G_m^{(N+1)}+G_{m+1}^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_m^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+1}^{(N)}),S(-\gamma_m^{(N+1)})+S(\gamma_{m+1}^{(N)})\Big\},\\
&\quad G_{m+1}^{(N+1)}+G_m^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(\gamma_m^{(N)}),S(-\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(-\gamma_m^{(N)})\Big\}\Big]\\
=&\max\Big[2NQ+G_{m-1}^{(N+1)}+G_{m+2}^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+2}^{(N)}),S(-\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m+2}^{(N)})\Big\},\\
&\quad NQ+mQ+G_m^{(N+1)}+G_{m+1}^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_m^{(N+1)})+S(\gamma_{m+1}^{(N)}),S(-\gamma_m^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+1}^{(N)})\Big\},\\
&\quad G_{m+1}^{(N+1)}+G_m^{(N)}+\max\Big\{S(\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(-\gamma_m^{(N)}),S(-\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(\gamma_m^{(N)})\Big\}\Big]
\end{aligned} \tag{2.9}$$

であり，(2.3) の超離散類似は

$$\begin{aligned}
&\max\Big[2NQ+G_{m-1}^{(N+1)}+G_{m+1}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m+1}^{(N)}),S(-\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+1}^{(N)})\right\},\\
&\quad 2NQ+mQ+G_{m}^{(N+1)}+G_{m}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m}^{(N)}),S(-\gamma_{m}^{(N+1)})+S(\gamma_{m}^{(N)})\right\},\\
&\quad G_{m+1}^{(N+1)}+G_{m-1}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m-1}^{(N)}),S(-\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m-1}^{(N)})\right\}\Big]\\
&=\max\Big[2NQ+G_{m-1}^{(N+1)}+G_{m+1}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m+1}^{(N)}),S(-\gamma_{m-1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m+1}^{(N)})\right\},\\
&\quad 2NQ+mQ+G_{m}^{(N+1)}+G_{m}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m}^{(N+1)})+S(\gamma_{m}^{(N)}),S(-\gamma_{m}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m}^{(N)})\right\},\\
&\quad G_{m+1}^{(N+1)}+G_{m-1}^{(N)}+\max\left\{S(\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(-\gamma_{m-1}^{(N)}),S(-\gamma_{m+1}^{(N+1)})+S(\gamma_{m-1}^{(N)})\right\}\Big] \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

である．変換式 (2.4) の超離散類似は，不定となる場合がない陽的スキーム

$$\zeta_m^{(N)}=\gamma_m^{(N)}\gamma_{m+1}^{(N+1)}\gamma_m^{(N+1)}\gamma_{m+1}^{(N)} \qquad (2.11)$$

$$Z_m^{(N)}=G_m^{(N)}+G_{m+1}^{(N+1)}-G_m^{(N+1)}-G_{m+1}^{(N)}-NQ \qquad (2.12)$$

に書き直すことができる．

以下，(2.8) において $A=(2N+1)Q$ とした場合（差分系において特殊関数解が存在する場合の $a=q^{2N+1}$ に対応する）を考える．その特殊解を構成するために超離散双線形方程式の解を求めよう．

まず最も簡単な $N=0$ の場合を考える．いま，$\mathscr{G}_m^{(0)}=(+1,0)$ とおくと (2.9)，(2.10) は共に (1.8) に帰着される．よって解として $\mathscr{G}_m^{(1)}=\mathrm{uAi}(m)$ を取れる．これらを (2.11)，(2.12) に代入すると $A=Q$ とした (2.8) の特殊解

$$\mathscr{Z}_m^{(0)}=\left(\zeta_m^{(0)},\,Z_m^{(0)}\right)=\begin{cases}((-1)^m,\,0) & (m\geq 0)\\ (+1,\,mQ) & (m\leq -1)\end{cases} \qquad (2.13)$$

が得られる．

次に $N=1$ の場合を考えよう．$\mathscr{G}_m^{(1)}=\mathrm{uAi}(m)$ とし，(1.18) を求めた時と同様に「$m\leq -1$ に対して $\mathscr{G}_m^{(2)}$ は不定である」と仮定する．この仮定の下で計算すると (2.9)，(2.10) を満たす $\mathscr{G}_m^{(2)}$ を求めることができる．以下同様にして，$N\geq 1$ に対して (2.9)，(2.10) を満たす関数 $\mathscr{G}_m^{(N)}=(\gamma_m^{(N)},\,G_m^{(N)})$ を帰納的に求めていく．こうして計算していくと，$N\geq 0$ に対して

$$\gamma_m^{(N)}=\begin{cases}\gamma_0^{(N)}(-1)^{\frac{m(m-1)N}{2}} & (m\geq 0)\\ \gamma_0^{(N)} & (m\leq -1)\end{cases} \qquad (2.14)$$

$$G_m^{(N)}=\begin{cases}\dfrac{mN(N-1)}{2}Q+G_0^{(N)} & (m\geq 0)\\[2mm] \dfrac{Nm(m+N-2)}{2}Q+G_0^{(N)} & (m\leq -1)\end{cases} \qquad (2.15)$$

が (2.9)，(2.10) を満たすことが示される．

これらの解を (2.11)，(2.12) に代入すれば，$A=(2N+1)Q$ に対する (2.8) の特殊解の系列

$$\mathscr{Z}_m^{(N)}=\left(\zeta_m^{(N)},\,Z_m^{(N)}\right)=\begin{cases}((-1)^m,\,0) & (m\geq 0)\\ (+1,\,mQ) & (m\leq -1)\end{cases} \qquad (2.16)$$

が得られる．この特殊解は既出の $N=0$ の場合と同じ関数であり，N 依存性を持たないことを注意しておく．その理由は $N\geq 0$，$Q<0$ より $A=(2N+1)Q<0$ であって，(2.8) において A を含む項が支配的にならないことによる．

特殊解 (2.16) の振る舞いを図 2[a] に，また比較のため，この解に対応するパンルヴェII 型方程式の特殊解の振る舞いを図 2[b] に示した．超離散系における有限な値は連続系での非常に大きな値に相当することから，(2.16) は連続系の解の定性的特徴をよく捉えていると言える．

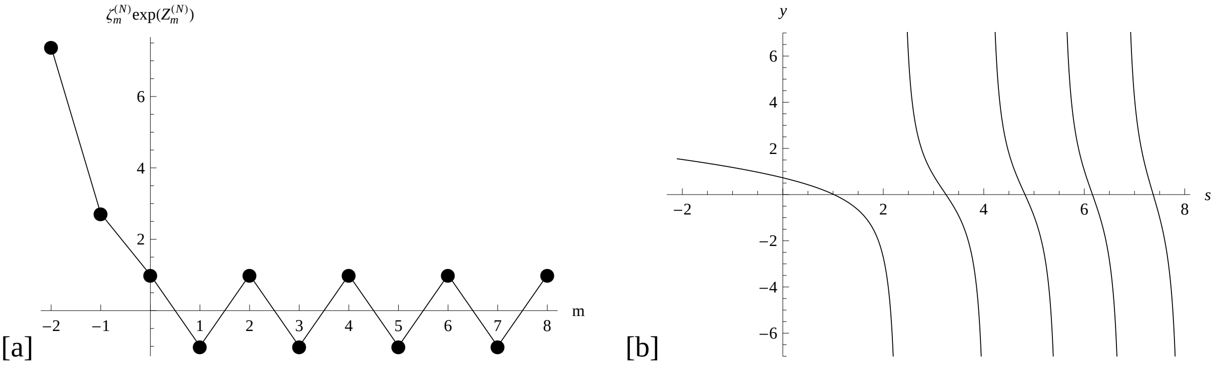

図 2: [a] (2.16) のプロット ($Q=-1$);　[b] パンルヴェII 型方程式 $d^2y/ds^2=2y^3+2sy-1$ の特殊関数解 $y=d(\log \mathrm{Ai}(-s))/ds$ のプロット

3　まとめ

本稿で構成した udPII の特殊解の系列は，N 次行列式で表される qPII の特殊解系列のうち qAi 関数を成分としたものに対応すると考えられる．成分が qBi 関数で与えられる系列や $N<0$ に対する系列に対応する udPII の解系列も構成が可能であると予想される．これらの解については別の機会に報告する．

また uAi 関数は超離散 Airy 方程式を解くことによって得られた．本稿執筆時点において，qAi 関数と uAi 関数の直接の対応関係は明らかになっていない．

参考文献

[1] S. Isojima, K. Konno, N. Mimura, M. Murata and J. Satsuma: “Ultradiscrete Painlevé II equation and a class of its special function solutions”, Submitting to J. Phys. A: Math. Theor.

[2] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata and J. Satsuma: “Singularity confinement test for ultradiscrete equations with parity variables”, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009), 315206 (7pp).

[3] T. Hamamoto, K. Kajiwara and N. S. Witte: “Hypergeometric Solutions to the q-Painlevé Equation of Type $(A_1+A_1')^{(1)}$”, IMRN **2006** (2006), 84619 (26pp).