

ホインの微分方程式の積分変換とその応用

竹村, 剛一
中央大学理工学部数学科

<https://doi.org/10.15017/23404>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (20), pp.143-148, 2011-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン :

権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8
Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 20 (pp. 143 - 148)

ホインの微分方程式の積分変換とその 応用

竹村 剛一 (TAKEMURA Kouichi)

(Received 15 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

ホインの微分方程式の積分変換とその応用 (Integral transformation of Heun's equation and some applications)

中央大学理工学部数学科 竹村剛一 (TAKEMURA Kouichi)

概要 ホインの微分方程式は、4 点に確定特異点をもつ二階常微分方程式の標準形である。本稿では、ホインの微分方程式における積分変換を紹介し、いずれかの特異点がみかけの特異点となる場合の解の積分表示や性質を導出する。

1 はじめに

パンルヴェ方程式は、2 階の非線形常微分方程式でありその解は極以外に動く特異点を持たないという性質をもつものの標準形であり、数学においても物理においても重要な方程式である ([4])。第六パンルヴェ方程式は、非自励なハミルトン系

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H_{VI}}{\partial \mu}, \quad \frac{d\mu}{dt} = -\frac{\partial H_{VI}}{\partial \lambda}, \quad (1.1)$$

$$H_{VI} = \frac{1}{t(t-1)}[\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\mu^2 - \{\theta_0(\lambda-1)(\lambda-t) + \theta_1\lambda(\lambda-t) + (\theta_t-1)\lambda(\lambda-1)\}\mu + \kappa_1(\kappa_2+1)(\lambda-t)], \quad (1.2)$$

において μ を消去して得られる λ についての 2 階非線形常微分方程式系である。一方で、第六パンルヴェ方程式は、線型常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dz^2} + \left(\frac{1-\theta_0}{z} + \frac{1-\theta_1}{z-1} + \frac{1-\theta_t}{z-t} - \frac{1}{z-\lambda} \right) \frac{dy_1}{dz} \\ + \left(\frac{\kappa_1(\kappa_2+1)}{z(z-1)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{z(z-1)(z-\lambda)} - \frac{t(t-1)H_{VI}}{z(z-1)(z-t)} \right) y_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

において H_{VI} を式 (1.2) で与えたとき、 t を動かしたときにこの線型微分方程式のモノドロミーが保存されるために λ と μ の満たすべき条件として得られることが知られている。

ところで、ホイン (Heun) の微分方程式とは 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0, \quad (1.4)$$

で、係数の間に $\gamma + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + 1$ という関係式があるものとして定められる ([5, 7])。ここで、 q は局所モノドロミー (各特異点の特性指数) に依らず、アクセサリパラメーターと呼ばれる。ホインの微分方程式は、4 点に確定特異点をもつ 2 階線形常微分方程式の標準形であることが知られている。また、ホインの微分方程式やこれに類する微分方程式 ("合流型" の微分方程式など) は、量子 Calogero 系や量子 Inozemtsev 系といった量子力学の模型 ([2])、ブラックホールの解析や結晶転移 ([7]) などさまざまな物理の模型で現れる。 $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha - \beta \in \mathbb{Z} + 1/2$ のときには高階定常 KdV 方程式と関連しており ([13])、モノドロミーは超楕円積分を用いて計算され、別の表示として Hermite-Krichever 仮設法を用いたものがある ([8, 9, 10])。

パンルヴェ方程式とホインの微分方程式の関係であるが、第六パンルヴェ方程式と関連する線型微分方程式 (1.3) において、 $z = \lambda$ (式 (1.2) からみかけの特異点となっている) を他の特異点に

合流させることにより、ホインの微分方程式が得られる。パラメーターの関係としては、微分方程式 (1.3) における (λ, μ) が極限においてアクセサリパラメーター q に化けると考えられる。より詳細な関係は第六パンルヴェ方程式の初期値空間を考えることによって定式化される ([12])。

本稿での主結果は、ホインの微分方程式において積分変換を用いることによってこれまで知られていなかった解の積分表示が得られる ([11]) ということであり、その解とは特異点 $z = 0, 1, t, \infty$ のいずれか一つが見かけの特異点となる時のものである。また、線型微分方程式 (1.3) においても同様の結果が得られる ([11])。

2 見かけの特異点

$z = a$ が確定特異点となる以下の 2 階線型微分方程式の $z = a$ での級数解を考察する。

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} r_i (z-a)^{i-1} \right) \frac{dy}{dz} + \left(\sum_{i=0}^{\infty} s_i (z-a)^{i-2} \right) y = 0, \quad (2.1)$$

簡単のため $s_0 = 0$ とし、 $\theta_a = 1 - r_0$ とおく。また、 $F(\xi) = \xi^2 + (r_0 - 1)\xi + s_0 = \xi(\xi - \theta_a)$ とおく。 $(z = a$ での特性多項式である。) このとき、級数 $y = (z-a)^\rho \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i$ ($c_0 \neq 0$) が微分方程式 (2.1) を満たすならば、 $\rho = 0$, θ_a (特性指数) となり、係数 c_n は

$$F(\rho + n)c_n + \sum_{i=1}^n \{(n-i+\rho)r_i + s_i\}c_{n-i} = 0, \quad (n \geq 1) \quad (2.2)$$

をみたす。とくに、 $F(\rho + n) \neq 0$ がすべての正整数 n で成り立つならば、 c_n は順次決定されていく。 $\theta_a \notin \mathbb{Z}$ のときはこの条件をみたし、このときの局所解の基底を以下の型にとれる。

$$f^{(a)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(a)} (z-a)^j, \quad g^{(a)}(z) = (z-a)^{\theta_a} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{(a)} (z-a)^j. \quad (2.3)$$

また、 $\theta_a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときの局所解の基底は以下の型にとれる。

$$f^{(a)}(z) = (z-a)^{\theta_a} \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{(a)} (z-a)^j, \quad g^{(a)}(z) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{(a)} (z-a)^j \right) + A^{(a)} f^{(a)}(z) \log(z-a). \quad (2.4)$$

$\theta_a \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ のときの局所解の基底についても似た型にとれるが、ここでは省略する。

みかけの特異点の定義であるが、 $\theta_a \in \mathbb{Z}$ であり対数項が現れない ($A^{(a)} = 0$) とき、 $z = a$ はみかけの特異点 (非対数的特異点) と呼ばれる。このとき、 $z = a$ におけるモノドロミーは自明、すなわちモノドロミー行列は単位行列となる。なお、 $\theta_a = 0$ の場合には、特異点 $z = a$ はみかけの特異点にならないことが知られている。

さて、 $\theta_a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ の場合に $z = a$ がみかけの特異点になるための条件を導こう。 $\rho = 0$ の場合の級数解 $y = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (z-a)^i$ を考えるうえで、 $c_0 \neq 0$ としたとき、 $c_1, \dots, c_{\theta_a-1}$ は漸化式 (2.2) から決定される。ここで $n = \theta_a$ を式 (2.2) に代入すると、

$$(0 \cdot c_{\theta_a} +) \sum_{i=1}^{\theta_a} \{(\theta_a - i)r_i + s_i\} c_{\theta_a-i} = 0, \quad (2.5)$$

という式が得られるが、式 (2.5) は $z = a$ がみかけの特異点になるための必要十分条件となる。 $\theta_a \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ の場合に $z = a$ がみかけの特異点になるための必要十分条件は、 $\rho = \theta_a$ のときの級数解で同様の議論をすることにより得られる。

ここで、ホインの微分方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-t} \right) \frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)} y = 0, \quad (2.6)$$

で $z=0$ の場合を考えよう。 $z=0$ は確定特異点であり、特性指数は $0, 1-\gamma$ となる。 $\gamma \notin \mathbb{Z}$ のときの局所解の基底は以下の型で与えられる。

$$f_1(z) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i, \quad f_2(z) = z^{1-\gamma} \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} c'_i z^i \right). \quad (2.7)$$

ここで、 $f_1(z)$ の係数は、 $-q + \gamma c_1 = 0$ 、および $i \geq 1$ に対して

$$(i-1+\alpha)(i-1+\beta)c_{i-1} - [i\{(i-1+\gamma)(1+t) + t\delta + \varepsilon\} + q]c_i + (i+1)(i+\gamma)tc_{i+1} = 0, \quad (2.8)$$

により決定される。よって、 c_i は q についての i 次の多項式となる。局所解 $f_1(z)$ は $Hl(t, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; z)$ と書かれる。 $(Hl$ は "Heun local" に由来する。)

$1-\gamma = n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ としたとき、 $z=0$ がみかけの特異点となるための条件は、ある n 次多項式 $P_n(q)$ を用いて $P_n(q) = 0$ の形で書くことができる。例えば、 $\gamma = -1$ ($n=2$) の場合では、 $z=0$ がみかけの特異点となるための条件は次のように書ける。

$$P_2(q) = q^2 + \{(\delta-1)t + \varepsilon - 1\}q + \alpha\beta t = 0. \quad (2.9)$$

また、 $\gamma = -2$ ($n=3$) の場合では、 $z=0$ がみかけの特異点となるための条件は次のように書ける。

$$P_3(q) = q^3 + \{(3\delta-4)t + 3\varepsilon - 4\}q^2 + \{2(\delta-1)(\delta-2)t^2 + 4((\delta-1)(\varepsilon-1) + \alpha\beta)t + 2(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)\}q + 4\alpha\beta t((\delta-1)t + \varepsilon - 1) = 0. \quad (2.10)$$

$t = (1-\varepsilon)/(\delta-1)$ のときには $q=0$ は必ず $P_3(q) = 0$ の解となっており、 $z=0$ がみかけの特異点となるための十分条件が $q=0$ という単純な式で書けてしまう。また、 $t = (\varepsilon-1)/(\delta-1)$ のときには $q = 2(1-\varepsilon)$ は $P_3(q) = 0$ の解となり、さらに α または β が負の整数のときには例外ヤコビ多項式という新たな種類の直交多項式 ([1, 6]) を解にもつ場合に対応する。

$\gamma-1 = n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ としたとき、 $z=0$ がみかけの特異点となるための条件は、ある n 次多項式 $\tilde{P}_n(q)$ を用いて $\tilde{P}_n(q) = 0$ の形で書くことができる。例えば、 $\gamma = 3$ ($n=2$) の場合では、 $z=0$ がみかけの特異点となるための条件は次のように書ける。

$$\tilde{P}_2(q) = q^2 - \{(3\delta+1)t + 3\varepsilon + 1\}q + \{2\delta(\delta+1)t^2 + (4\delta\varepsilon + \alpha\beta)t + 2\varepsilon(\varepsilon+1)\} = 0. \quad (2.11)$$

3 ホイン多項式

ホインの微分方程式の局所解 $Hl(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ が有限項となる場合を考えよう。 i 次の係数 $c_i (= c_i(q))$ は q について i 次の多項式である。

$-\alpha = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり、 q_0 の値を $c_{n+1}(q_0) = 0$ をみたすようにとる。式 (2.8) より従う $0 = (n+\alpha)(n+\beta)c_n - [(n+1)\{(n+\gamma)(1+t) + t\delta + \varepsilon\} + q]c_{n+1} + (n+2)(n+1+\gamma)tc_{n+2}$ における c_n の係数は 0 となるので、 $q = q_0$ において $c_{n+1} = 0$ が満たされるならば $c_{n+2} = 0$ となり、順次 $c_{n+3} = c_{n+4} = \dots = 0$ が成立する。

よって、 $-\alpha = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であり q が $c_{n+1}(q) = 0$ を満たすならば、 $Hl(z) = \sum_{i=0}^n c_i z^i$ という形の n 次多項式の解をもつことがわかった。この形のホインの微分方程式の解をホイン多項式と呼ぶ。

より一般に、ホインの微分方程式の多項式的な解は、 $\sigma_0 \in \{0, 1-\gamma\}$, $\sigma_1 \in \{0, 1-\delta\}$, $\sigma_t \in \{0, 1-\varepsilon\}$.
のもとで多項式 $p(z)$ を用いて

$$y = z^{\sigma_0}(z-1)^{\sigma_1}(z-t)^{\sigma_t}p(z), \quad (3.1)$$

の形で表わされる。ここで、 $\sigma_0 = \sigma_1 = \sigma_t = 0$ の場合の多項式解をもつための条件は $\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\deg y = -\alpha$, $c_{-\alpha+1}(q) = 0$ (または α を β に置き換えたもの) と書け、多項式解 y は $z = 0, 1, t$ にて一斉に正則となっている。 $\sigma_0 = 1-\gamma$, $\sigma_1 = \sigma_t = 0$ の場合に多項式的な解をもつための条件は $\gamma-\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $n = \gamma-\alpha-1$ (または α を β に置き換えたもの) となり、 $p(z)$ の次数は n 、 q の満たすべき代数方程式の次数は $n+1$ である。また、 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1-\delta$, $\sigma_t = 1-\varepsilon$ の場合に多項式的な解をもつための条件は $\gamma-\alpha \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$, $n = \alpha-\gamma-1$ (または α を β に置き換えたもの) となり、 $p(z)$ の次数は n 、 q の満たすべき代数方程式の次数は $n+1$ である。

ここで、 $\gamma' - \alpha' + 2 = 0$ の場合にホインの微分方程式

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{\gamma'}{w} + \frac{\delta'}{w-1} + \frac{\varepsilon'}{w-t} \right) \frac{dy}{dw} + \frac{\alpha'\beta'w - q'}{w(w-1)(w-t)}y = 0, \quad (3.2)$$

が多項式的な解をもつ条件を考える。 $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 1-\delta'$, $\sigma_t = 1-\varepsilon'$ のときに $\deg p(z) = \alpha' - \gamma' - 1 = 1$ となる解が考えられる。 $(w-1)^{1-\delta'}(w-t)^{1-\varepsilon'}(w+d)$ の形で解を探すと、

$$\begin{aligned} d &= \frac{q' - (\alpha' - 1)((\delta' - 2)t + \varepsilon' - 2)}{\delta' + \varepsilon' - \alpha' - 2}, \\ c_2(q') &= (q')^2 + \{(-2\alpha'\delta' + 3\alpha' + 3\delta' - 4)t + (-2\alpha'\varepsilon' + 3\alpha' + 3\varepsilon' - 4)\}q' \\ &\quad + (\alpha' - 2)[(\delta' - 1)(\delta' - 2)(\alpha' - 1)t^2 + (\varepsilon' - 1)(\varepsilon' - 2)(\alpha' - 1) \\ &\quad + \{(\alpha' - 1)(2\varepsilon'\delta' - 3\delta' - 3\varepsilon' + 5) - \delta' - \varepsilon' + 3\}t] = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

が満たされる場合に解が見つかる。

4 ホインの微分方程式における積分変換と、特異点のいずれかが見かけの特異点となる場合の解の積分表示

ホインの微分方程式におけるオイラー型の積分変換は Kazakov と Slavyanov によって発見されたが ([3])、これは 4 点に確定特異点をもつサイズ 2 のフックス型微分方程式におけるミドルコンボリューションを考えることでも導出される ([12])。

Theorem 1 $y(w)$ は以下のホインの微分方程式の解とする。

$$\frac{d^2y}{dw^2} + \left(\frac{\gamma'}{w} + \frac{\delta'}{w-1} + \frac{\varepsilon'}{w-t} \right) \frac{dy}{dw} + \frac{\alpha'\beta'w - q'}{w(w-1)(w-t)}y = 0. \quad (4.1)$$

このとき

$$\tilde{y}(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_t]} y(w)(z-w)^{-\alpha} dw \quad (4.2)$$

で定義される関数 $\tilde{y}(z)$ は

$$\frac{d^2\tilde{y}}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\varepsilon}{z-t} \right) \frac{d\tilde{y}}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)}\tilde{y} = 0, \quad (4.3)$$

の形のホインの微分方程式の解となる。ここで、 $i \in \{0, 1, t, \infty\}$ であり $[\alpha_z, \alpha_i] = \alpha_z \alpha_i \alpha_z^{-1} \alpha_i^{-1}$ は $w = z$ と $w = i$ をめぐる *Pochhammer* の径路とし、パラメーターたちは以下の関係を満たすものである。

$$\begin{aligned}\gamma' &= \gamma - \alpha + 1, \delta' = \delta - \alpha + 1, \varepsilon' = \varepsilon - \alpha + 1, \beta' = \beta - \alpha + 1, \\ \alpha' &= 2 - \alpha, q' = q + (\alpha - 1)(\varepsilon + \delta t + (\gamma - \alpha)(t + 1)).\end{aligned}\quad (4.4)$$

この定理は、オイラー型の積分変換によって、異なるパラメーターのホインの微分方程式の解がつながることを示している。よって、知られている解を積分変換で移すことによって未知の解が得られる可能性がある。実際、 $\gamma', \delta', \varepsilon', \beta' - \alpha' \in \mathbb{Z} + 1/2$ で q' が一般の場合に有限帯ポテンシャルによる解が得られているが、これを積分変換によって移すと、 $\gamma, \delta, \varepsilon, \alpha + 1/2, \beta + 1/2 \in \mathbb{Z}$ で q が一般の場合の解が得られる。

また、多項式型の解を積分変換で移すと、特異点 $\{0, 1, t, \infty\}$ のいずれかが見かけの特異点となるホインの微分方程式の解が得られる。このことをより明示的に述べよう。

Theorem 2 ([11]) $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon'$ は Theorem 1 でのパラメーターとする。

$\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$, $\alpha, \beta, \delta', \varepsilon' \notin \mathbb{Z}$ であり、微分方程式 (4.3) において $z = 0$ が見かけの特異点ならば、次数が $-\gamma$ の多項式 $h(w)$ を用いて $y(w) = (w - 1)^{1-\delta'}(w - t)^{1-\varepsilon'}h(w)$ という形の w についてのホインの微分方程式 (4.1) の解 $y(w)$ が存在し、これを用いて

$$\tilde{y}(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w - 1)^{1-\delta'}(w - t)^{1-\varepsilon'}h(w)(z - w)^{-\alpha}dw, \quad (4.5)$$

($p = 1, t$) が z についてのホインの微分方程式 (4.3) の 0 でない解となる。

ここで、微分方程式 (4.3) において $\gamma = -1$ で $z = 0$ が見かけの特異点である場合を考える。 $z = 0$ が見かけの特異点となる条件は、式 (2.9) すなわち $q^2 + \{(\delta - 1)t + \varepsilon - 1\}q + \alpha\beta t = 0$ と書けるが、これは式 (3.3) での $c_2(q') = 0$ と同値な式となっている。このとき、 $(w - 1)^{1-\delta'}(w - t)^{1-\varepsilon'}(w + q/\beta)$ は w についてのホインの微分方程式 (4.1) の解となっている。積分変換を施すことにより、

$$\tilde{y}(z) = \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w - 1)^{1-\delta'}(w - t)^{1-\varepsilon'}\left(w + \frac{q}{\beta}\right)(z - w)^{-\alpha}dw, \quad (4.6)$$

($p = 0, 1, t, \infty$) は z についてのホインの微分方程式 (4.3) の解となる。

$\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ のときには次の定理が成り立つ。

Theorem 3 ([11]) $\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, $\alpha, \beta, \delta', \varepsilon' \notin \mathbb{Z}$ であり、微分方程式 (4.3) において $z = 0$ は見かけの特異点ならば、次数が $\gamma - 2$ の多項式 $h(w)$ を用いて $y(w) = w^{1-\gamma}h(w)$ という形の w についてのホインの微分方程式 (4.1) の解が存在し、これを用いて

$$\tilde{y}(z) = z^{1-\gamma}(z - 1)^{1-\delta}(z - t)^{1-\varepsilon} \int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w - 1)^{\delta'-1}(w - t)^{\varepsilon'-1}h(w)(z - w)^{\alpha-2}dw \quad (4.7)$$

($p = 1, t$) が z についてのホインの微分方程式 (4.3) の 0 でない解となる。

ここで、微分方程式 (4.3) において $\gamma = 3$ であり $z = 0$ が見かけの特異点である場合を考える。 $z = 0$ が見かけの特異点となる条件は式 (2.11) で表わされ、このとき $w^{1-\gamma}\{(\alpha - 2)w + ((\delta + 1)t + \varepsilon + 1 - q)\}$ は w に関するホインの微分方程式 (4.1) をみたす。積分変換を施すことにより、

$$\begin{aligned}\tilde{y}(z) &= z^{1-\gamma}(z - 1)^{1-\delta}(z - t)^{1-\varepsilon} \cdot \\ &\int_{[\alpha_z, \alpha_i]} (w - 1)^{\delta'-1}(w - t)^{\varepsilon'-1}\{(\alpha - 2)w + ((\delta + 1)t + \varepsilon + 1 - q)\}(z - w)^{\alpha-2}dw,\end{aligned}\quad (4.8)$$

($p = 0, 1, t, \infty$) は z についてのホインの微分方程式 (4.3) の解となる。

参考文献

- [1] D. Gomez-Ullate, N. Kamran, R. Milson: “An extended class of orthogonal polynomials defined by a Sturm-Liouville problem”, *J. Math. Anal. Appl.* **359** (2009), 352–367.
- [2] V. I. Inozemtsev: “Lax representation with spectral parameter on a torus for integrable particle systems”, *Lett. Math. Phys.* **17** (1989), 11–17.
- [3] A. Ya. Kazakov, S. Yu. Slavyanov: “Integral relations for special functions of the Heun class”, *Theoret. and Math. Phys.* **107** (1996), 733–739.
- [4] 岡本 和夫; パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [5] A. Ronveaux (ed.): *Heun’s differential equations*, Oxford University Press, 1995.
- [6] R. Sasaki, S. Tsujimoto, A. Zhedanov: “Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations”, *J. Phys. A* **43** (2010) 315204.
- [7] S. Slavyanov, W. Lay: *Special Functions*, Oxford University Press, 2000.
- [8] K. Takemura: “The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system III: the finite gap property and the monodromy”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **11** (2004), 21–46.
- [9] K. Takemura: “The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system IV: the Hermite-Krichever Ansatz”, *Comm. Math. Phys.*, **258** (2005), 367–403.
- [10] K. Takemura: “The Heun equation and the Calogero-Moser-Sutherland system V: generalized Darboux transformations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **13** (2006), 584–611.
- [11] K. Takemura: “Integral transformation of Heun’s equation and some applications”, Preprint, arXiv:1008.4007 [math.CA].
- [12] K. Takemura: “Middle convolution and Heun’s equation”, *SIGMA* **5**, 040 (2009), 22 pages.
- [13] A. Treibich, J.-L. Verdier: “Revetements exceptionnels et sommes de 4 nombres triangulaires”, *Duke Math. J.*, **68** (1992), 217–236.