

Semi-discrete Modified KdV方程式と平面離散曲線の時間発展

井ノ口, 順一
山形大学理学部

梶原, 健司
九州大学大学院数理学研究院

松浦, 望
福岡大学理学部

太田, 泰広
神戸大学大学院理学研究科

<https://doi.org/10.15017/23395>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (11), pp.75-81, 2011-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8

「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 11 (pp. 75 - 81)

Semi-discrete Modified KdV 方程式と平面離散曲線の時間発展

井ノ口 順一 (INOUCHI Jun-ichi), 梶原 健司 (Kajiwara Kenji), 松浦 望 (MATSUURA Nozomu), 太田 泰広 (OHTA Yasuhiro)

(Received 15 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

Semi-discrete Modified KdV 方程式と平面離散曲線の時間発展

山形大学理学部 井ノ口順一 (JUN-ICHI INOBUCHI)
 九州大学大学院数理学研究院 梶原 健司 (KENJI KAJIWARA)
 福岡大学理学部 松浦 望 (NOZOMU MATSUURA)
 神戸大学大学院理学研究科 太田泰広 (YASUHIRO OHTA)

概要

ユークリッド平面上の離散曲線の semi-discrete modified KdV 方程式で記述される連続的な運動を考察し、 τ 関数と双線形構造を議論する。

1 平面離散曲線の時間発展と semi-discrete mKdV 方程式

写像 $\gamma: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $l \mapsto \gamma_l$ を平面上の離散曲線, すなわち,

$$\left| \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon_l} \right| = 1, \quad (1)$$

$$\frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon_l} = R(K_l) \frac{\gamma_l - \gamma_{l-1}}{\epsilon_{l-1}}, \quad (2)$$

を満たすものとする。ただし,

$$\frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon_l} = \begin{bmatrix} \cos \Psi_l \\ \sin \Psi_l \end{bmatrix}, \quad R(K_l) = \begin{pmatrix} \cos K_l & -\sin K_l \\ \sin K_l & \cos K_l \end{pmatrix}, \quad K_l = \Psi_l - \Psi_{l-1}, \quad (3)$$

とする。等周条件 (1) は曲線が伸縮しないことを意味し, (2) は Frenet-Serret の公式の離散版に相当する。また, K_l は線分間の角度を表し, 角関数の離散版と見なすことができる。次に, 線分長が一定, すなわち $\epsilon_l = \epsilon$ (定数) とし, 離散曲線の次のような連続的変形 (時間発展) を考える:

$$\frac{d\gamma_l}{ds} = \frac{1}{\cos \frac{K_l}{2}} R\left(-\frac{K_l}{2}\right) \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_l}{\epsilon}. \quad (4)$$

Doliwa-Santini[1] は 3 次元空間中の球面上の離散曲線の運動を Ablowitz-Ladik 階層とその一般化を用いて定式化した³, (4) はそのうちのの一つから球面の半径が ∞ の極限を取って得られる。また, (4) は Hoffmann-Kutz[5, 6] の導入した, 離散曲線の「辺接ベクトル」 $\Delta^h \gamma_l = 2\epsilon(\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1})/\|\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}\|^{2*1}$ と平行な流れによる曲線の運動

$$\frac{d\gamma_l}{ds} = \alpha \Delta^h \gamma_l = 2\alpha \epsilon \frac{\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}}{\|\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}\|^2}, \quad (5)$$

と同値である。実際, 図 1 左より読み取れる関係式 $\|\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1}\| = 2\epsilon \cos \frac{K_l}{2}$, $\gamma_{l+1} - \gamma_{l-1} = 2 \cos \frac{K_l}{2} R\left(-\frac{K_l}{2}\right) (\gamma_{l+1} - \gamma_l)$ を用い, s のスケールで $\alpha = 1$ と規格化すれば (5) から (4) が得られる。

さて, (2) と (4) の両立条件および等周条件 (1) より, ポテンシャル関数 θ_l が存在し, 次式が成り立つ。

$$\Psi_l = \frac{\theta_{l+1} + \theta_l}{2}, \quad K_l = \frac{\theta_{l+1} - \theta_{l-1}}{2}, \quad (6)$$

$$\frac{d\theta_l}{ds} = \frac{2}{\epsilon} \tan\left(\frac{\theta_{l+1} - \theta_{l-1}}{4}\right). \quad (7)$$

^{*1} この記号は, γ を複素数と同一視したときに, 右辺が $(\gamma_{l+1} - \gamma_l)/\epsilon$, $(\gamma_l - \gamma_{l-1})/\epsilon$ の調和平均であることに由来する。

(7) は semi-discrete potential modified KdV 方程式と呼ばれる [3]. 両立条件は離散角函数 K_l について

$$\frac{dK_l}{ds} = \frac{1}{\epsilon} \left(\tan \frac{K_{l+1}}{2} - \tan \frac{K_{l-1}}{2} \right), \quad (8)$$

と書き直される. また, Hoffmann-Kutz の導入した「離散曲率」 κ_l , すなわち図 1 右のように, 隣接する線分の midpoint で接する円の半径の逆数

$$\kappa_l = \frac{2}{\epsilon} \tan \frac{K_l}{2} = \frac{d\theta_l}{ds}, \quad (9)$$

について両立条件は

$$\frac{d\kappa_l}{ds} = \frac{2}{\epsilon} \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4} \kappa_l^2 \right) (\kappa_{l+1} - \kappa_{l-1}). \quad (10)$$

と表される. (8) および (10) は semi-discrete modified KdV 方程式と呼ばれる. 本稿では, 上で提示した

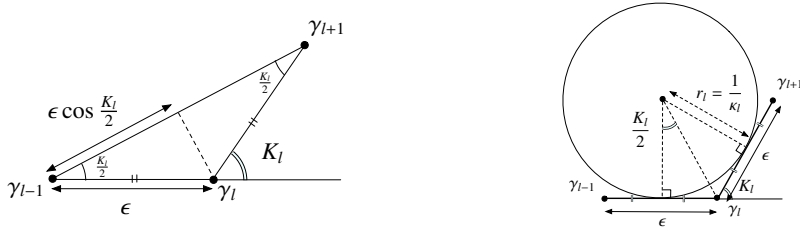


図 1 左: 辺接ベクトルと角函数, 右: Hoffmann-Kutz の離散曲率

semi-discrete modified KdV 方程式で記述される離散曲線の時間発展について, τ 函数による明示公式を構成する.

2 曲線の τ 函数による表示

2.1 双線形方程式と曲線の明示公式

命題 2.1 $\tau_l = \tau_l(s; y) \in \mathbb{C}$ を次の双線形方程式を満たす τ 函数とする:

$$D_s \tau_l \cdot \tau_l^* = \frac{1}{2\epsilon} (\tau_{l-1}^* \tau_{l+1} - \tau_{l+1}^* \tau_{l-1}), \quad (11)$$

$$\tau_l \tau_l^* = \frac{1}{2} (\tau_{l-1}^* \tau_{l+1} + \tau_{l+1}^* \tau_{l-1}), \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} D_s D_y \tau_l \cdot \tau_l = -\tau_{l+1}^* \tau_{l-1}^*, \quad (13)$$

$$D_y \tau_{l+1} \cdot \tau_l = -\epsilon \tau_{l+1}^* \tau_l^*. \quad (14)$$

ただし, $*$ は複素共役を表す. このとき, θ_l, γ_l は以下のように表される:

$$\theta_l = \frac{2}{\sqrt{-1}} \log \frac{\tau_l}{\tau_l^*}, \quad \gamma_l = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} (\log \tau_l \tau_l^*)_y \\ \frac{1}{2\sqrt{-1}} (\log \frac{\tau_l}{\tau_l^*})_y \end{bmatrix}. \quad (15)$$

証明 (11)–(15) から (1), (2), (4), (7) を導けばよいが, これらは直接計算で示される. 特に (1), (2), (4) は (12)–(14) から, (7) は (11),(12) から導かれる. \square

次にソリトン解に対応する τ 関数を提示する. 同様にブリーザー解も構成できるが, 本稿では省略する.

命題 2.2 次の関数は双線形方程式 (11)–(14) を満たす.

$$\tau_l(s; y) = \exp[-(s + \epsilon l)y] \det \left(f_{j-1}^{(i)} \right)_{i,j=1,\dots,N}, \quad (16)$$

$$f_n^{(i)} = \alpha_i p_i^n (1 - \epsilon p_i)^{-l} e^{-\frac{p_i}{1-\epsilon^2 p_i^2} s + \frac{1}{p_i} y} + \beta_i (-p_i)^n (1 + \epsilon p_i)^{-l} e^{-\frac{p_i}{1-\epsilon^2 p_i^2} s - \frac{1}{p_i} y}, \quad (17)$$

$$\alpha_i, p_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}. \quad (18)$$

ここで注意を喚起したいのは, τ 関数の行列式の要素の指数因子における s の係数である. これは補助線形問題の時間発展のスペクトルパラメータ依存性に対応しているが, それが $0, \infty$ 以外の特異性を持つような時間発展となっていることを意味する. 実際, Doliwa-Santini[1] が考察した Ablowitz-Ladik 階層の拡張はまさにそのようなスペクトルパラメータ依存性を持っている. このような時間発展を持つ方程式の他の例として, Principal chiral field 方程式 [9, 11] や Maxwell-Bloch 方程式 [11, 12] などが知られている. この結果は, 次の事実を想起すると興味深い. Ohta-Maruno[13] は, 2次元戸田格子方程式の Bäcklund 変換と離散 2次元戸田格子方程式の簡約から次の方程式が得られることを示し, ソリトン解を構成した.

$$\frac{du_n}{dt} = \alpha(1 + \beta u_n v_n)(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad \frac{dv_n}{dt} = \alpha(1 + \beta u_n v_n)(v_{n+1} - v_{n-1}). \quad (19)$$

しかし, ここで (10) を導出するために $u_n \approx v_n$ などの条件を課すと, 解との整合性が壊れてしまう. 実際, 構成された (10) のソリトン解における時間発展の構造は (19) と異なるものであった.

2.2 τ 関数の構成と双線形方程式の導出

本章では命題 2.2 を証明する. そのために generic な τ 関数を考え, それが満たす双線形方程式を Plücker 関係式を用いて構成する. 最後にそれらに簡約を行って (16) と双線形方程式 (11)–(14) を導出する.

命題 2.3 $\sigma_k^{l,m}(u, v; y)$ を次で定義される Casorati 行列式とする.

$$\sigma_k^{l,m}(u, v; y) = \det \left(f_{k+j-1}^{(i)}(l, m) \right)_{i,j=1,\dots,N}, \quad (20)$$

$$f_k^{(i)}(l, m) = \alpha_i p_i^k (1 - a p_i)^{-l} (1 - b p_i)^{-m} e^{-\frac{u}{1-a p_i} + \frac{v}{1-b p_i} + \frac{1}{p_i} y} + \beta_i q_i^k (1 - a q_i)^{-l} (1 - b q_i)^{-m} e^{-\frac{u}{1-a q_i} + \frac{v}{1-b q_i} + \frac{1}{q_i} y}, \quad (21)$$

$$p_i \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}. \quad (22)$$

このとき, σ は以下の双線形方程式を満たす.

$$(D_u - 1) \sigma_{k-1}^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} = -\sigma_k^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m}, \quad (23)$$

$$(D_v - 1) \sigma_{k-1}^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} = -\sigma_k^{l,m+1} \sigma_{k-1}^{l,m-1}, \quad (24)$$

$$b \sigma_{k+1}^{l,m+1} \sigma_k^{l+1,m} - a \sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_k^{l,m+1} + (a - b) \sigma_{k+1}^{l+1,m+1} \sigma_k^{l,m} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{1}{2}D_u D_y \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} = a(\sigma_k^{l,m})^2 - a\sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{2}D_v D_y \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} = b(\sigma_k^{l,m})^2 - b\sigma_{k+1}^{l,m+1} \sigma_{k-1}^{l,m-1}, \quad (27)$$

$$(D_y - a) \sigma_k^{l+1,m} \cdot \sigma_k^{l,m} = -a\sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l,m}. \quad (28)$$

命題 2.3 から命題 2.2 は次のようにして導かれる。まず、簡約条件

$$\sigma_k^{l+1,m+1} \approx \sigma_k^{l,m}, \quad (29)$$

$$\sigma_{k+1}^{l,m} = B \sigma_k^{*,l,m}, \quad B \in \mathbb{R}, \quad (30)$$

を要請する。これによって (23)–(27) はそれぞれ次のような双線形方程式に帰着する ($b = -a$ とおいている)。

$$(D_u - 1) \sigma_l^* \cdot \sigma_l = -\sigma_{l+1} \sigma_{l-1}^*, \quad (31)$$

$$(D_v - 1) \sigma_l^* \cdot \sigma_l = -\sigma_{l-1} \sigma_{l+1}^*, \quad (32)$$

$$\sigma_{l-1}^* \sigma_{l+1} + \sigma_{l+1}^* \sigma_{l-1} - 2\sigma_l^* \sigma_l = 0, \quad (33)$$

$$\frac{1}{2}D_u D_y \sigma_l \cdot \sigma_l = a(\sigma_l)^2 - a\sigma_{l+1}^* \sigma_{l-1}^*, \quad (34)$$

$$\frac{1}{2}D_v D_y \sigma_l \cdot \sigma_l = -a(\sigma_l)^2 + a\sigma_{l-1}^* \sigma_{l+1}^*, \quad (35)$$

$$(D_y - a) \sigma_{l+1} \cdot \sigma_l = -a\sigma_{l+1}^* \sigma_l^*. \quad (36)$$

さらに独立変数 u, v を $u = cs, v = -cs$ ($c \in \mathbb{R}$) と特殊化すると, (31), (32) および (34) と (35) からそれぞれ

$$D_s \sigma_l^* \cdot \sigma_l = c(\sigma_{l-1} \sigma_{l+1}^* - \sigma_{l+1} \sigma_{l-1}^*), \quad (37)$$

$$D_s D_y \sigma_l \cdot \sigma_l = 4ac[(\sigma_l)^2 - \sigma_{l-1}^* \sigma_{l+1}^*], \quad (38)$$

が得られる。最後に $a = \epsilon, c = \frac{1}{2\epsilon}$ とおき, (16) の指数因子を考慮すれば, (37), (33), (38), (36) は (11), (12), (13), (14) にそれぞれ帰着する。解のレベルで簡約条件 (29), (30) を実現するには

$$q_i = -p_i, \quad b = -a, \quad p_i, \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad \beta_i \in \sqrt{-1}\mathbb{R}, \quad (39)$$

を課せばよいことは直接計算でわかる。さらに u, v やパラメータの特殊化を行えば, 行列式の要素 (21) は (m) に関する指数因子は α_i, β_i に組み込んで直ちに (17) を与える。

2.3 命題 2.3 の証明

双線形方程式のうち, (25) は Hirota-Miwa 方程式の一種 (discrete KP 方程式の Bäcklund 変換), (28) は 2 次元戸田格子方程式の Bäcklund 変換の一つとして知られている方程式で, Plücker 関係式から行列式の技法で導出できることがよく知られている [10, 14, 15]. また, l, m の対称性から (24), (27) についてはそれぞれ (23), (26) を示しておけば十分である。

(23) の導出 $\sigma_k^{l,m}$ を (20), (21) で与えられる行列式とする. 要素は線形関係式

$$\frac{f_k^{(i)}(l, m) - f_k^{(i)}(l-1, m)}{a} = f_{k+1}^{(i)}(l, m), \quad \frac{f_k^{(i)}(l, m) - f_k^{(i)}(l, m-1)}{b} = f_{k+1}^{(i)}(l, m), \quad (40)$$

$$\partial_u f_k^{(i)}(l, m) = f_k^{(i)}(l+1, m), \quad \partial_v f_k^{(i)}(l, m) = f_k^{(i)}(l, m+1), \quad \partial_y f_k^{(i)}(l, m) = f_{k-1}^{(i)}(l, m). \quad (41)$$

を満たすものとする. さて, (23) の導出には補助的な τ 関数 ρ を使うのが便利である.

$$\rho_k^{l,m} = \det(f_k^{(i)}(l+j-1, m))_{i,j=1,\dots,N}. \quad (42)$$

σ と ρ の間には次のような関係があり, これは (40) を用い列の基本変形を行って確かめることができる:

$$\rho_k^{l,m} = (-a)^{N(N-1)/2} \sigma_k^{l,m}. \quad (43)$$

(23) は Plücker 関係式から行列式 ρ に対する微分・差分公式を通じて導出することができる. Freeman-Nimmo の記号を導入しておくとも便利である.

$$\rho_k^{l,m} = |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1|, \quad j = \begin{bmatrix} f_k^{(1)}(l-j, m) \\ f_k^{(2)}(l-j, m) \\ \vdots \\ f_k^{(N)}(l-j, m) \end{bmatrix}. \quad (44)$$

補題 2.4 (微分・差分公式)

$$\partial_u \rho_k^{l,m} = |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1|, \quad (45)$$

$$\rho_{k-1}^{l,m} = a^{N-1} |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{k-1}|, \quad (46)$$

$$\rho_{k-1}^{l,m} = a^{N-1} |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-2_{k-1}|, \quad (47)$$

$$(\partial_u - 1) \rho_{k-1}^{l,m} = a^{N-1} |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{k-1}|. \quad (48)$$

この補題は [14, 15] と同様の方法で導出できるため, ここでは証明を省略する. (23) は補題を以下の Plücker 関係式に適用すれば得られる.

$$\begin{aligned} 0 &= |-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2| \times |\mathbf{1}, \dots, N-2, N-1, N-1_{k-1}| \\ &\quad + |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1| \times |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{k-1}| \\ &\quad - |\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1_{k-1}| \times |-\mathbf{1}, \mathbf{1}, \dots, N-2, N-1|. \quad \square \end{aligned}$$

(26) の導出 $P := [(26) \text{ の左辺-右辺}] \times (\sigma_{k-1}^{l,m})^2 - [(26) \text{ の左辺-右辺}]_{k-1} \times (\sigma_k^{l,m})^2$ を考え, (23) と (28) を組み合わせ導く*2.

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{1}{2} D_u D_y \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} - a(\sigma_k^{l,m})^2 + a\sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} \right] \sigma_{k-1}^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} - \sigma_k^{l,m} \sigma_k^{l,m} \left[\frac{1}{2} D_u D_y \sigma_{k-1}^{l,m} \cdot \sigma_{k-1}^{l,m} - a(\sigma_{k-1}^{l,m})^2 + a\sigma_k^{l+1,m} \sigma_{k-2}^{l-1,m} \right] \\ &= D_y \left(D_x \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_{k-1}^{l,m} \right) \cdot \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} + a\sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} \sigma_{k-1}^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} - a\sigma_k^{l+1,m} \sigma_{k-2}^{l-1,m} \sigma_k^{l,m} \sigma_k^{l,m} \quad (49) \end{aligned}$$

*2 この計算は [4, 10] における 2 次元戸田格子方程式の双線形形式から Bäcklund 変換を導く計算にヒントを得た.

ここで D-operator の交換公式

$$(D_u D_y f \cdot f) g^2 - f^2 (D_u D_y g \cdot g) = 2D_y (D_u f \cdot g) \cdot fg, \quad (50)$$

を使っていることに注意. (49) 第 1 項に (23) を用い, さらに以下のように (28) も使って

$$\begin{aligned} D_y (D_x \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_{k-1}^{l,m}) \cdot \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} &= D_y (-\sigma_{k-1}^{l,m} \sigma_k^{l,m} + \sigma_k^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m}) \cdot \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} = D_y \sigma_k^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} \cdot \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-1}^{l,m} \quad \because D_y f \cdot f = 0 \\ &= (D_y \sigma_k^{l+1,m} \cdot \sigma_k^{l,m}) \sigma_{k-1}^{l-1,m} \sigma_{k-1}^{l,m} + (D_y \sigma_{k-1}^{l-1,m} \cdot \sigma_{k-1}^{l,m}) \sigma_k^{l+1,m} \sigma_k^{l,m} \\ &= (\sigma_k^{l+1,m} \sigma_k^{l,m} - a \sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l,m}) \sigma_{k-1}^{l-1,m} \sigma_{k-1}^{l,m} + (-\sigma_{k-1}^{l,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} + a \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-2}^{l-1,m}) \sigma_k^{l+1,m} \sigma_k^{l,m} \quad \because (28) \\ &= -a \sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} \sigma_{k-1}^{l,m} + a \sigma_k^{l,m} \sigma_{k-2}^{l-1,m} \sigma_k^{l+1,m} \sigma_k^{l,m}, \end{aligned}$$

を得る. ここで第 1 行から第 2 行に移行する際に, 交換公式

$$D_y ab \cdot cd = (D_y a \cdot c) bd + (D_y b \cdot d) ac, \quad (51)$$

を用いている. この計算結果を (49) に代入すると, 直ちに 0 となることがわかる. これから $A(u, y, l)$ を引数に関する任意函数として

$$\frac{1}{2} D_u D_y \sigma_k^{l,m} \cdot \sigma_k^{l,m} - a (\sigma_k^{l,m})^2 + a \sigma_{k+1}^{l+1,m} \sigma_{k-1}^{l-1,m} = A(u, y, l) \sigma_k^{l,m} \sigma_k^{l,m}, \quad (52)$$

を得るが, $N = 0$ の場合 $\sigma = 1$ であることから $A = 0$ と定まる. 以上により (26) が導かれた. \square

3 連続極限

最後に, 本稿で議論した離散曲線の連続的時間発展と, discrete potential modified KdV 方程式で記述される離散曲線の離散時間発展 [8] および potential modified KdV 方程式で記述される連続曲線の連続的時間発展 [2, 7, 16] との関係を示的に記して本稿を閉じたい. 離散曲線 $\gamma_n^m \in \mathbb{R}^2$, $m, n \in \mathbb{Z}$ の離散時間発展は

$$\left| \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} \right| = 1, \quad \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n} = R(K_n^m) \frac{\gamma_n^m - \gamma_{n-1}^m}{a_{n-1}}, \quad \frac{\gamma_{n+1}^{m+1} - \gamma_n^m}{b_m} = R(W_n^m) \frac{\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m}{a_n}, \quad (53)$$

と定式化され, 両立条件は discrete potential modified KdV 方程式で与えられる.

$$\tan \left(\frac{\Theta_{n+1}^{m+1} - \Theta_n^m}{4} \right) = \frac{b_m + a_n}{b_m - a_n} \tan \left(\frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{4} \right), \quad (54)$$

$$W_m^n = \frac{\Theta_n^{m+1} - \Theta_{n+1}^m}{2}, \quad K_n^m = \frac{\Theta_{n+1}^m - \Theta_{n-1}^m}{2}. \quad (55)$$

ただし, a_n, b_m はそれぞれ n, m の任意函数である. 連続曲線 $\gamma = \gamma(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $x, t \in \mathbb{R}$ の連続的時間発展は

$$|\gamma'| = 1, \quad \gamma'' = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{bmatrix} \gamma', \quad \frac{\partial}{\partial t} \gamma' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa'' + \frac{\kappa^3}{2} \\ -\kappa'' - \frac{\kappa^3}{2} & 0 \end{bmatrix} \gamma', \quad ' = \partial_x, \quad (56)$$

で与えられ, 両立条件は potential modified KdV 方程式である:

$$\theta_t + \frac{1}{2} (\theta_x)^3 + \theta_{xxx} = 0, \quad \kappa = \theta_x. \quad (57)$$

このとき, 直接計算により以下のことを確かめることができる.

命題 3.1 (i) (53), (54) において $a_n = a, b_m = b$ (定数) とおき,

$$s = n + m, \quad l = n - m, \quad \delta = a + b, \quad \epsilon = a - b, \quad \delta \rightarrow 0 \quad (58)$$

という極限により, (53), (54) は (1),(2), (4) および (7) に帰着する.

(ii) (1),(2),(4) および (7) は

$$x = \epsilon l + s, \quad t = -\frac{\epsilon^3}{6}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (59)$$

という極限により (56), 57 に帰着する.

なお, ソリトン解などの厳密解のレベルでも上の極限移行が成立することを注意しておく.

参考文献

- [1] A. Doliwa and P.M. Santini, Integrable dynamics of a discrete curve and the Ablowitz-Ladik hierarchy, *J. Math. Phys.* **36**(1995) 1259–1273.
- [2] R.E. Goldstein and D.M. Petrich, The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3203–3206.
- [3] R. Hirota, Exact N-soliton solution of nonlinear lumped self-dual network equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **35**(1973) 289–294.
- [4] 広田良吾, 「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店 (1992).
- [5] T. Hoffmann and N. Kutz, Discrete curves in $\mathbb{C}P^1$ and the Toda lattice, *Stud. Appl. Math.* **113**(2004) 31–55.
- [6] T. Hoffmann, 曲線や曲面に関する離散微分幾何学, 可視化の技術と現代幾何学 (若山正人編), 岩波書店 (2010) p.133–181.
- [7] 井ノ口順一, 「曲線とソリトン」, 朝倉書店 (2010).
- [8] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, preprint, arXiv:1008.2808.
- [9] M. Jimbo and T. Miwa, Solitons and infinite dimensional Lie algebras, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **19**(1983) 943–1001.
- [10] 梶原健司, 離散可積分系の基礎, 若山正人編「可視化の技術と現代幾何学」, 岩波書店 (2010) 47–92.
- [11] S. Kakei and J. Satsuma, Grassmann hierarchy のある拡張, 京都大学数理解析研究所講究録 **868**(1994) 85–97.
- [12] S. Kakei and J. Satsuma, Multi-soliton solutions of a coupled system of the nonlinear Schrödinger equation and the Maxwell-Bloch equations, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**(1994) 885–894.
- [13] K. Maruno and Y. Ohta, Casorati determinant form of dark soliton solutions of the discrete nonlinear Schrödinger equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **75**(2006) 054002.
- [14] Y. Ohta, R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, Casorati and discrete Gram type determinant representations of solutions to the discrete KP hierarchy, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62**(1993) 1872–1886.
- [15] Y. Ohta, K. Kajiwara, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Casorati determinant solution for the relativistic Toda lattice equation, *J. Math. Phys.* **34**(1993) 5190–5204.
- [16] G. Lamb Jr., Solitons and the motion of helical curves, *Phys. Rev. Lett.* **37** (1976) 235–237.