

UC階層とモノドロミー保存変形, 超幾何関数

津田, 照久
九州大学数理学研究科

<https://doi.org/10.15017/23391>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 22A0-S8 (7), pp.43-49, 2011-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.22AO-S8
「非線形波動研究の新たな展開 — 現象とモデル化 —」 (研究代表者 笥 三郎)
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.22AO-S8

Development in Nonlinear Wave: Phenomena and Modeling

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 28 - 30, 2010

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 7 (pp. 43 - 49)

UC階層とモノドロミー保存変形, 超 幾何関数

津田 照久 (TSUDA Teruhisa)

(Received 14 January 2011)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2011

UC階層とモノドロミー保存変形，超幾何函数

九大数理 津田 照久 (TSUDA Teruhisa)

KP階層は，云うまでもなく，ソリトン理論において最も重要な位置を占める非線形偏微分方程式系であり，自然数の重みの時間発展を持つ斉次な無限次元可積分系を成す．それに対して，UC階層とは「KP階層の斉次性を保ったまま負の重みの無限変数を付け加えた拡張」ということができる．この小文では，UC階層の相似簡約から自然に現れるモノドロミー保存変形型の有限次元可積分系について論ずる．得られた方程式 (= シュレジンジャー系) は，パンルヴェVI型方程式やガルニエ系を含むような興味深いクラスを与え，多項式ハミルトン系による統一的な表示を持つ．積分表示と捻れドラム理論に基づいた超幾何函数解の構成についても紹介する．詳細は [24, 26] を参照されたい．

1 はじめに：パンルヴェ方程式の特殊多項式

パンルヴェII型方程式

$$(P_{II}) \quad \frac{d^2q}{dx^2} = 2q^3 + xq + a$$

は定数パラメタ $a = 0$ のとき，特殊解 $q \equiv 0$ を許す．ベックルト変換 (双有理変換の対称性)

$$\begin{aligned} \pi : q &\mapsto -q, & a &\mapsto -a, \\ r_1 : q &\mapsto q + \frac{a - \frac{1}{2}}{q^2 - \frac{dq}{dx} + \frac{x}{2}}, & a &\mapsto 1 - a. \end{aligned}$$

を用いると，パラメタ a が整数のとき P_{II} は有理解を持つことが分かる．驚くべきことに，有理解の分子と分母に現れる因子はモニックな整数係数多項式となることが観察される．これをヤブロンスキー・ヴォロビエフ多項式と呼ぶ．初めのいくつかは $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^3 + 4$, $T_3(x) = x^6 + 20x^3 - 80$, $T_4(x) = x(x^9 + 60x^3 + 11200)$, ...

等である．この多項式の正体は，次のように，ソリトン理論の立場から自然に理解することができる．典型的なソリトン方程式の一つである (変形) KdV 方程式

$$(1) \quad 4 \frac{\partial v}{\partial t} = -6v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

を考えよう．変数の次数を $\deg x = 1$, $\deg t = 3$, $\deg v = -1$ と数えると (1) は斉次式ゆえ，自己相似解 $v(x, t) = (-3t/4)^{-1/3} q((-3t/4)^{-1/3} x)$ を許す．このとき，函数 $q = q(x)$ が P_{II} を満たすことは容易に確かめられる ([1] 参照)．一方，(1) は2-コアのヤング図形 ($n \geq n-1 \geq \dots \geq 2 \geq 1$) に対するシューア函数で表される有理解，しかも自己相似解，を持つ．この事実は KdV 方程式系が2-被約の KP 階層であることに基づく ([13] 参照)．以上をまとめると，ヤブロンスキー・ヴォロビエフ多項式 $T_n(x)$ がシューア函数の特殊化であることが明らかになる (梶原・太田 [7])．

II型以外のパンルヴェ方程式に対しても，有理解 (又は代数解) に付随した類似の多項式の系列が生成できる．IV型については岡本多項式，III, V, VI型については梅村多項式と総称される一連の特殊多項式は，組み合わせ論や表現論の視点から興味深い性質を持つことが知られている ([27] 参照)．先程と同様に， P_{IV} がブジネ方程式 これもやはり KdV のように KP 階層の理論の範疇にある の相似簡約であることから，岡本多項式の正体が3-コアのヤング図形に対するシューア函数であることが分かる ([8, 15] 参照)．

ところが P_V, P_{VI} の梅村多項式については状況が一変する．即ち，増田等 [11, 12] によって発見されたように，シューア函数ではなく，その一般化である普遍指標 (特に2-コアのヤング図形

の組に付随したもの)が現れたのである¹. 実はこれらの結果は, UC 階層と呼ぶ KP 階層の拡張を考へることによつて, 系統的に説明することができる.

2 普遍指標と UC 階層

ヤング図形の組 $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l)$, $\mu = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_{l'})$ に対し, 普遍指標 $S_{[\lambda, \mu]}$ を捻れたヤコビ・トゥルディ公式 (小池 [9])

$$S_{[\lambda, \mu]} = \det \left(\begin{array}{cc} q_{\mu_{l'-i+1}+i-j}, & i \leq l' \\ p_{\lambda_i - \mu_{l'-i+j}}, & i > l' \end{array} \right)_{1 \leq i, j \leq l+l'}$$

によつて定義する. 但し $p_n = p_n(x)$ は母函数

$$e^{\xi(x, k)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} p_n(x) k^n, \quad \xi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n k^n$$

で決まる変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$ のみに関する多項式とし, 一方 $q_n = q_n(y)$ は p_n において単に x を y に置き換へたものとする. 2 系列の無限変数 $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$ について, 各々の次数を $\deg x_n = n$, $\deg y_n = -n$ と勘定すると, 例えば

$$S_{[0, 0]} = 1, \quad S_{[(1), 0]} = x_1, \quad S_{[(1), (1)]} = x_1 y_1 - 1, \\ S_{[(2, 1), (1)]} = \left(\frac{x_1^3}{3} - x_3 \right) y_1 - x_1^2, \quad \dots$$

のように $S_{[\lambda, \mu]}$ は次数がヤング図形の面積の差 $|\lambda| - |\mu|$ に等しいような斉次多項式になる. 普遍指標は, シューア函数の自然な拡張²であつて, 一般線形群の既約有理表現の指標を与える³.

ところで, 無限次元可積分系の理論と一般線形群の表現論は密接に関係している. 些か標語的だが, KP 階層はシューア函数を特徴付ける無限次元可積分系と考えられ, その普遍指標への対応物が UC 階層に他ならない.

¹ それに続いて, ガルニエ系 P_{VI} の多変数版 に対しても, 普遍指標による特殊解が構成された [23].

² 実際 $\mu = 0$ の場合, 普遍指標は文字通りシューア函数に帰着する: $S_{[\lambda, 0]} = \det(p_{\lambda_i - i + j}) = S_\lambda$.

³ GL_r の既約有理表現は, $l + l' \leq r$ なるヤング図形の組 $[\lambda, \mu]$ で指定できる. それを $\rho_{[\lambda, \mu]}$ と表すと, $\text{tr} \circ \rho_{[\lambda, \mu]} = S_{[\lambda, \mu]}$ が成り立つ. 但し変数の対応は $g \in GL_r$ の固有値 (t_1, \dots, t_r) を用いて, $x_n = \sum_{i=1}^r t_i^n / n$, $y_n = \sum_{i=1}^r t_i^{-n} / n$ とおいた.

互いに可換な頂点作用素の組

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n^\pm k^n = e^{\pm \xi(x - \bar{\partial}_y, k)} e^{\mp \xi(\bar{\partial}_x, k^{-1})}, \\ \sum_{n \in \mathbb{Z}} Y_n^\pm k^{-n} = e^{\pm \xi(y - \bar{\partial}_x, k^{-1})} e^{\mp \xi(\bar{\partial}_y, k)}$$

を導入する. 但し記号

$$\bar{\partial}_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots \right)$$

を用いた.

定義 1 ([22]). 未知函数 $\tau = \tau(x, y)$ に対する 2 連立双線形方程式

$$\sum_{i+j=-1} X_i^- \tau \otimes X_j^+ \tau = \sum_{i+j=-1} Y_i^- \tau \otimes Y_j^+ \tau = 0$$

を UC 階層 (の双線形恒等式) と呼ぶ.

函数 τ が変数 y に依存しない場合, UC 階層は KP 階層に帰着する. UC 階層の解空間は佐藤グラスマン多様体 (= KP 階層の解空間) の直積を成し, 特に斉次多項式解の全体は普遍指標の集合に一致する. 実は, 多項式とは限らない一般の斉次解を考へることから, モノドロミー保存変形との繋がりが見えてくる (第 4 節).

3 モノドロミー保存変形

L 連立一階線形常微分方程式

$$(F) \quad \frac{d\Psi}{dz} = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{A_i}{z - s_i} \Psi \quad (A_i : L \times L \text{ 行列})$$

はリーマン球面 \mathbb{P}^1 上に $N + 3$ 個の確定特異点 $S = \{s_0 = 1, s_1, \dots, s_N, s_{N+1} = 0, s_{N+2} = \infty\}$ を持つフックス型方程式である. 正則点 $z = p \in X = \mathbb{P}^1 \setminus S$ を始点とする閉曲線に沿つた解析接続は, (F) の解の基本系に対する線形変換を引き起こす. こうして得られる基本群 $\pi_1(X, p)$ の L 次元表現 (の共役類) のことを (F) のモノドロミーという. さて, 特異点の位置 s_i を動かしたとき, (F) のモノドロミーが変化しないように係数 $A_j = A_j(s)$ の s -依存性を決定しよう.

定理 2 (古典的). (F) のモノドロミーが s_i に依らない必要十分条件は, z についての有理函数 $B_i(z)$ が存在して, 変形方程式

$$(D) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial s_i} = B_i \Psi$$

が成り立つことである.

(F) と (D) の完全積分可能条件から得られる A_j に対する s についての非線形偏微分方程式系をモノドロミー保存変形と呼ぶ⁴. 最初の非自明な例が $L=2, N=1$ のときであり, パンルヴェ VI 型方程式

$$(P_{VI}) \quad \frac{d^2 q}{ds^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-s} \right) \left(\frac{dq}{ds} \right)^2 - \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{q-s} \right) \frac{dq}{ds} + \frac{q(q-1)(q-s)}{s^2(s-1)^2} \times \left(a + b \frac{s}{q^2} + c \frac{s-1}{(q-1)^2} + d \frac{s(s-1)}{(q-s)^2} \right)$$

に等しい.

4 UC 階層の相似簡約

頂点作用素で結ばれた UC 階層の隣接する解の列には, 元的双線形恒等式に由来する類似の関係式が成り立つ. 典型的には

$$\tau_{m,n} \otimes \tau_{m+1,n+1} = \sum_{i+j=0} X_i^- \tau_{m+1,n} \otimes X_j^+ \tau_{m,n+1}$$

のような方程式である⁵.

⁴適当な規格化の下, 有理函数 $B_i(z)$ は A_j で具体的に表される. 通例, 無限遠点の留数行列 $A_{N+2} = -\sum_{i=0}^{N+1} A_i$ を対角化しておいて, $B_i = A_i/(s_i - z)$ を得る. 結局, (F) のモノドロミー保存変形はシュレジンジャー系 [18]

$$\frac{\partial A_i}{\partial s_j} = -\sum_{j \neq i} \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j}, \quad \frac{\partial A_i}{\partial s_j} = \frac{[A_i, A_j]}{s_i - s_j} \quad (i \neq j)$$

によって記述される.

⁵KP 階層の用語に倣えば「変形 UC 階層」とでも呼ぶべきものである. ここで, 添字が $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ のように 2 次元分あるのは, 互いに可換な頂点作用素の存在の反映である. 実際, KP 階層の場合は

$$\sum_{i+j=-2} X_i^- \tau_n \otimes X_j^+ \tau_{n+1} = 0$$

となる.

解の列 $\{\tau_{m,n}(x, y)\}$ に対する付帯条件として斉次性: $E\tau_{m,n} = d_{m,n}\tau_{m,n}$ と周期性: $\tau_{m+L,n} = \tau_{m,n+L} = \tau_{m,n}$ を課す. 但し

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nx_n \frac{\partial}{\partial x_n} - ny_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right)$$

は次数を測る微分作用素である⁶. さらに, 独立変数 x_k, y_k を新たに有限個の変数 $t = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ の「冪和」

$$x_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^N \theta_i t_i^k, \quad y_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^N \theta_i t_i^{-k}$$

で読み替える (独立変数の特殊化)⁷. 以上の操作によって得られる方程式を $S_{L,N}$ とおく.

定理 3. $S_{L,N}$ はモノドロミー保存変形である.

証明の概略. 元的双線形恒等式から, 波動函数

$$\psi_{m,n} = \frac{\tau_{m,n-1}(x - [k^{-1}], y - [k])}{\tau_{m,n}(x, y)} e^{\xi(x,k)}$$

(k : スペクトル変数) の満たす方程式として,

$$\begin{cases} \text{フックス型方程式 (F)} & (z = k^{-L}) \\ \text{変形方程式 (D)} & (s_i = t_i^L) \end{cases}$$

の両方が自ずと従う. ここで記号 $[k] = (k, k^2/2, k^3/3, \dots)$ を用いた. \square

正確には「 $N+3$ 個の確定特異点のうち $N+1$ 個の近傍で $L-1$ 次元の正則解を持つ」ような (F) が現れる. あるいは, ヤング図形を並べて各特異点での留数行列の固有値の縮退の様子を表したものをスペクトル型と呼ぶが, この場合

$$(1, 1, \dots, 1), (1, 1, \dots, 1), \underbrace{(L-1, 1), \dots, (L-1, 1)}_{N+1 \text{ 個}}$$

のようになる.

興味深いことに, $S_{L,N}$ は多時間ハミルトン系

$$\frac{\partial q_n^{(i)}}{\partial s_j} = \frac{\partial H_j}{\partial p_n^{(i)}}, \quad \frac{\partial p_n^{(i)}}{\partial s_j} = -\frac{\partial H_j}{\partial q_n^{(i)}} \begin{pmatrix} 1 \leq i, j \leq N \\ 1 \leq n \leq L-1 \end{pmatrix}$$

⁶実際 $ES_{[\lambda,\mu]} = (|\lambda| - |\mu|)S_{[\lambda,\mu]}$ となる.

⁷斉次性の条件より, $t_0 = 1$ として一般性を失わない.

の形に表すことができる(以下, $\mathcal{H}_{L,N}$ と記す).
ハミルトン函数 H_i は

$$s_i H_i = \sum_{n=0}^{L-1} e_n q_n^{(i)} p_n^{(i)} + \sum_{j=0}^N \sum_{0 \leq m < n \leq L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)} \\ + \sum_{j=0}^N \frac{s_j}{s_i - s_j} \sum_{m,n=0}^{L-1} q_m^{(i)} p_m^{(j)} q_n^{(j)} p_n^{(i)}$$

なる正準変数についての多項式である⁸. 特に $L = 2$ の場合, $\mathcal{H}_{L,N}$ はガルニエ系に等価であり, さらに $N = 1$ とすると P_{VI} のハミルトン系表示に帰着する. 但し, 正準変数と UC 階層の τ 函数の関係は次の通りである:

$$q_n^{(i)} = \left(\frac{t_i}{t_0} \right)^n \frac{\tau_{n,-n}(\theta_i + 1) \tau_{0,0}(\theta_0 + 1)}{\tau_{0,0}(\theta_i + 1) \tau_{n,-n}(\theta_0 + 1)}, \\ q_n^{(i)} p_n^{(i)} = \frac{\theta_i \tau_{n,-n-1}(\theta_i - 1) \tau_{n,-n}(\theta_i + 1)}{L \tau_{n,-n-1} \tau_{n-1,-n}}.$$

構成より, $\mathcal{H}_{L,N}$ の様々な性質が UC 階層から導かれることが大切である. 例えば

- (i) τ 函数と広田の双線形形式 (\because UC 階層の双線形恒等式);
- (ii) 普遍指標による解 ($\because S_{[\lambda,\mu]}$ は斉次式. なお λ, μ として L -コアのヤング図形が現れる.);
- (iii) ワイル群対称性 (\because 頂点作用素の置換);
- (iv) 線形補助問題 (\because UC 階層の波動函数).

5 超幾何函数 $F_{L,N}$

多重指数 $s^m = \prod_{i=1}^N s_i^{m_i}$ の記法の下, 無限級数

$$F_{L,N} = \sum_{m_i \geq 0} \frac{(\alpha_1)_{|m|} \cdots (\alpha_{L-1})_{|m|} (\beta_1)_{m_1} \cdots (\beta_N)_{m_N}}{(\gamma_1)_{|m|} \cdots (\gamma_{L-1})_{|m|} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_N}} s^m$$

によって N 変数の超幾何函数 $F_{L,N}(\alpha, \beta, \gamma; s)$ を定義する⁹. ここで $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$ (ポホ

⁸ここで $s_0 = q_n^{(0)} = q_0^{(i)} = 1, p_n^{(0)} = \kappa_n - \sum_{i=1}^N q_n^{(i)} p_n^{(i)}, p_0^{(i)} = \theta_i - \sum_{n=1}^{L-1} q_n^{(i)} p_n^{(i)}$ なる略記法を用いた. 即ち, ハミルトン函数 H_i は q と p に関して各々3次と2次の多項式である. 複素パラメタ $(e, \kappa, \theta) = (e_0, \dots, e_{L-1}, \kappa_0, \dots, \kappa_{L-1}, \theta_0, \dots, \theta_N)$ には2つの関係式 $\sum_{n=0}^{L-1} e_n = (L-1)/2, \sum_{n=0}^{L-1} \kappa_n = \sum_{i=0}^N \theta_i$ が付くので, 正味 $2L+N-1$ 個である. これらは (F) の特異点での指数に対応している.

⁹例えば $(L, N) = (2, 1), (L, 1), (2, N)$ の場合, $F_{L,N}$ は各々ガウスの超幾何函数 ${}_2F_1$, トマエの ${}_L F_{L-1}$, アベル・ロリチュエラの F_D に帰着する.

ハマの記号) である. オイラー作用素を

$$\delta_i = s_i \frac{\partial}{\partial s_i}, \quad \mathcal{D} = \sum_{i=1}^N \delta_i$$

と書くことにすると, 定義より $y = F_{L,N}$ の満たす超幾何微分方程式

$$\left\{ s_i (\beta_i + \delta_i) \prod_{k=1}^{L-1} (\alpha_k + \mathcal{D}) - \delta_i \prod_{k=1}^{L-1} (\gamma_k - 1 + \mathcal{D}) \right\} y = 0$$

が直ちに従うが, 以下ではオイラー型積分表示

$$F_{L,N} = \prod_{k=1}^{L-1} \frac{\Gamma(\gamma_k)}{\Gamma(\alpha_k) \Gamma(\gamma_k - \alpha_k)} \times \int_{\Delta_0} \Phi \varphi_0$$

を出発点に, 等価な線形パフ系を構成しよう¹⁰.
まず上記の積分表示において, 被積分形式は

$$\Phi = \prod_{k=1}^{L-1} u_k^{\lambda_k} (u_{k-1} - u_k)^{\mu_k} \prod_{i=1}^N (1 - s_i u_{L-1})^{\nu_i}$$

($u_0 = 1$) なる $U = \mathbb{C}^{L-1} \setminus D$ 上の多価函数に

$$\varphi_0 = \frac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_{L-1}}{u_{L-1} \prod_{k=1}^{L-1} (u_{k-1} - u_k)} \in \Omega^{L-1}(*D)$$

を乗じたものであり¹¹, 積分域 $\Delta_0 = \{0 \leq u_{L-1} \leq \cdots \leq u_2 \leq u_1 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^{L-1}$ は $L-1$ -単体である. ここで超平面の合併

$$D = \bigcup_{k=1}^{L-1} (\{u_k = 0\} \cup \{u_k = u_{k-1}\}) \cup \bigcup_{i=1}^N \{u_{L-1} = 1/s_i\}$$

は Φ の特異点集合であり, また

$$\Omega^p(*D) = \{ \text{高々 } D \text{ のみに極を持つ有理 } p\text{-形式} \}$$

とおいた. さて, 函数 $1/\Phi$ の多価性が決める U 上の局所系を \mathcal{L} (その双対を \mathcal{L}^\vee) とおく. こ

¹⁰級数 $F_{L,N}$ は原点の近傍で収束して正則函数を定める. その解析接続を超幾何函数と呼ぶ訳だが, その特異性の起こる場所さえ (1 変数の場合と異なり) 超幾何微分方程式からは直接見て取れない. 一方, 線形パフ系 (定理 4) の形から, 特異点は $s_i = 0, s_i = 1, s_i = \infty, s_i = s_j (i \neq j)$ に限ることが分かる.

¹¹パラメタの対応は以下の通り:

$$\lambda_k = \begin{cases} \alpha_k - \gamma_{k+1} & (k \neq L-1) \\ \alpha_{L-1} & (k = L-1) \end{cases}, \quad \mu_k = \gamma_k - \alpha_k, \quad \nu_i = -\beta_i.$$

の局所系を係数とする (コ) ホモロジー群の構造は次のようになる :

$$(i) \dim H^p(U, \mathcal{L}) = \dim H_p(U, \mathcal{L}^\vee) = \begin{cases} N(L-1) + 1 & (p = L-1) \\ 0 & (p \neq L-1). \end{cases}$$

(ii) $H^{L-1}(U, \mathcal{L}) \cong \Omega^{L-1}(*D)/\nabla\Omega^{L-2}(*D)$ の基底 :

$$\varphi_0, \quad \varphi_n^{(i)} = \frac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_{L-1}}{u_{L-1}(1-s_i u_{L-1}) \prod_{k \neq n} (u_{k-1} - u_k)}.$$

但し $\nabla = d + d \log \Phi \wedge$ は共変微分作用素である .

(iii) $H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ の基底 = $U \cap \mathbb{R}^{L-1}$ の有界な部屋 .

任意の $\Delta \in H_{L-1}(U, \mathcal{L}^\vee)$ に対し , 超幾何積分

$$y_0 = \int_{\Delta} \Phi \varphi_0, \quad y_n^{(i)} = \int_{\Delta} \Phi \varphi_n^{(i)}$$

を並べたベクトル値函数 $\vec{y} = \vec{y}(s; \Delta) = {}^T(y_0, y_1^{(1)}, \dots, y_{L-1}^{(1)}, \dots, y_1^{(N)}, \dots, y_{L-1}^{(N)})$ を考える .

定理 4. \vec{y} は階数 $N(L-1) + 1$ の線形パフ系

$$(P) \quad d\vec{y} = \sum_{0 \leq i < j \leq N+1} C_{ij} d \log(s_i - s_j) \vec{y}$$

を満たす (係数 C_{ij} はパラメタ $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ の一次式である . 詳細は [24] 参照) .

特に原点で正則な (P) の解は次で与えられる .

$$\begin{aligned} y_0 &= c F_{L,N}, \quad y_1^{(i)} = \frac{\gamma_1 - \alpha_1}{\gamma_1} c F_{L,N}(\beta_i + 1, \gamma_1 + 1), \\ y_2^{(i)} &= \frac{\alpha_1(\gamma_2 - \alpha_2)}{\gamma_1 \gamma_2} c F_{L,N}(\alpha_1 + 1, \beta_i + 1, \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1), \\ &\dots \\ y_n^{(i)} &= \frac{\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}(\gamma_n - \alpha_n)}{\gamma_1 \cdots \gamma_n} c F_{L,N}(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{n-1} + 1, \\ &\quad \beta_i + 1, \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_n + 1), \quad \dots \end{aligned}$$

但し $c = \prod_{k=1}^{L-1} \Gamma(\alpha_k) \Gamma(\gamma_k - \alpha_k) / \Gamma(\gamma_k)$ とした . 隣接関係式 (付録 A) を用いると , 各 $y_n^{(i)}$ を y_0 の導函数の線形結合として表すこともできる .

6 $\mathcal{H}_{L,N}$ の超幾何函数解

多項式ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$ の相空間の次元 $2N(L-1)$ は , 対応するフックス型方程式 (F) のアクセサリ・パラメタの数の丁度等しい . $\mathcal{H}_{L,N}$ の初期値の空間は一般に複雑な代数多様体であるが , 定数パラメタがある超平面上にある場合 , 射影空間 $\mathbb{P}^{N(L-1)}$ の点で径数づけられるような特殊解の族が存在する¹² . 実際 , 次が示される .

定理 5. $\kappa_0 - \sum_{i=1}^N \theta_i = 0$ のとき $\mathcal{H}_{L,N}$ は特殊解

$$q_n^{(i)} = 0, \quad p_n^{(i)} = -\theta_i \frac{y_n^{(i)}}{y_0}$$

を許す . 但し $\{y_0, y_n^{(i)}\}$ は (P) の任意の解であり , パラメタの対応は

$$\alpha_n = e_n - e_0, \quad \beta_i = -\theta_i, \quad \gamma_n = e_n - e_0 - \kappa_n$$

である .

注 (パンルヴェ系と超幾何系). P_{VI} (= $\mathcal{H}_{2,1}$) , ガルニエ系 (= $\mathcal{H}_{2,N}$) の超幾何函数解は各々 Fuchs [4] と岡本・木村 [16] によって与えられた . P_{VI} -鎖 (= $\mathcal{H}_{L,1}$) についても最近 , 鈴木 [20] によって独立に考察されている .

A 超幾何函数 $F_{L,N}$ の隣接関係式

ここでは $F_{L,N}$ の隣接関係式をまとめておく :

$$\begin{aligned} F_{L,N}(\alpha_n + 1) &= \frac{\mathcal{D} + \alpha_n}{\alpha_n} F_{L,N}, \\ F_{L,N}(\beta_i + 1) &= \frac{\delta_i + \beta_i}{\beta_i} F_{L,N}, \\ F_{L,N}(\gamma_n + 1) &= \frac{\gamma_n}{\varepsilon_L} \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial s_i} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{L-1} (\mathcal{D} + \gamma_k - 1) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{L-1} \varepsilon_j (\mathcal{D} + \gamma_n)^{L-1-j} \right\} F_{L,N}, \end{aligned}$$

¹²次元の勘定を表にまとめると ,

ハミルトン系 $\mathcal{H}_{L,N}$	相空間の次元 = $2N(L-1)$ 定数パラメタ $2L + N - 1$ 個
$F_{L,N}$ の超幾何系 (P)	パフ系の階数 = $N(L-1) + 1$ 定数パラメタ $2L + N - 2$ 個

表1 KP階層からパルヴェ方程式へ

周期	変数 x の特殊化	パルヴェ方程式	$z = k^L$ に関する線形常微分方程式
$L = 2$	$x_n = 0 (n \neq 1, 3)$	P_{II}	2×2 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個 (ポアンカレ階数 3/2)
$L (\geq 3)$	$x_n = 0 (n \neq 1, 2)$	$P(A_{L-1}^{(1)})$: $L = 3 \Rightarrow P_{IV}$ $L = 4 \Rightarrow P_V$	$L \times L$ 系 確定特異点 1 個 不確定特異点 1 個 (階数 2/L)
$L (\geq 2)$	$x_1 = t + a$ $x_n = a/n (n \neq 1)$	P_{III} -鎖: $L = 2 \Rightarrow P_{III}$	$L \times L$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個 (階数 1/L)

表2 UC階層からパルヴェ方程式へ

周期	変数 (x, y) の特殊化	パルヴェ方程式	$z = k^L$ に関する線形常微分方程式
(L, L)	$x_n = t + a/n$ $y_n = -t + a/n$	$P(A_{2L-1}^{(1)})$: $L = 2 \Rightarrow P_V$	$L \times L$ 系 確定特異点 2 個 不確定特異点 1 個 (階数 1)
(L, L)	$x_n = (a + bt^n)/n$ $y_n = (a + bt^{-n})/n$	P_{VI} -鎖: $L = 2 \Rightarrow P_{VI}$	$L \times L$ 系 (フックス型) 確定特異点 4 個

$$F_{L,N}(\alpha_n - 1) = \frac{\alpha_n - 1}{\varepsilon'_L} \left\{ \sum_{i=1}^N s_i (\delta_i + \beta_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{L-1} (\mathcal{D} + \alpha_k) \right. \\ \left. - \sum_{j=0}^{L-1} \varepsilon'_j (\mathcal{D} + \alpha_n - 1)^{L-1-j} \right\} F_{L,N},$$

$$F_{L,N}(\gamma_n - 1) = \frac{\mathcal{D} + \gamma_n - 1}{\gamma_n - 1} F_{L,N},$$

$$F_{L,N}(\beta_i + 1, \beta_j - 1) = \frac{(s_i - s_j) \frac{\partial}{\partial s_i} + \beta_i}{\beta_i} F_{L,N},$$

$$F_{L,N}(\alpha_1 + 1, \dots, \alpha_{L-1} + 1, \beta_i + 1, \\ \gamma_1 + 1, \dots, \gamma_{L-1} + 1) = \frac{\gamma_1 \cdots \gamma_{L-1}}{\alpha_1 \cdots \alpha_{L-1} \beta_i} \frac{\partial F_{L,N}}{\partial s_i}.$$

但し ε_j は L 個の変数 $\alpha_k - \gamma_n (k = 1, \dots, L-1)$ と $\sum_{i=1}^N \beta_i - \gamma_n$ に関する j 次の基本対称式である。同様に, ε'_j は $\gamma_k - \alpha_n (k = 1, \dots, L-1)$ と $1 - \alpha_n$ に関する j 次の基本対称式である。

B KP/UC階層とパルヴェ型常微分方程式

本論ではフックス型方程式の変形に関する話題を扱ってきたが, 特異点を合流して生ずる不確定特異点を含んだ場合についても全く同様である。ここでは, 特に変形パラメタが1次元の場合,

合, 即ち, 得られる非線形系が常微分方程式の場合に注目して, KP/UC階層とパルヴェ型方程式の関係をまとめておく(詳細は[25]を参照されたい)。

定理 6. パルヴェ方程式 P_{II} , $P(A_{L-1}^{(1)})$, P_{III} -鎖は, 各々KP階層の周期 2, $L(\geq 3)$, $L(\geq 2)$ の相似簡約である。また $P(A_{2L-1}^{(1)})$ と P_{VI} -鎖はUC階層の周期 (L, L) の相似簡約である。表 1, 2 参照¹³。

上の定理で, KP階層と P_{II} 及び $P(A_{L-1}^{(1)})$ の関係については, 各々 Ablowitz-Segur [1] と野海・山田 [15], Schiff [17] によって, 既によく知られた結果である。

注. P_I の導出はやや例外的で, KP階層に対して2-被約条件: $\partial\tau/\partial x_{2n} \equiv 0$ と斉次性: $L_{-2}\tau = c\tau$ と独立変数の特殊化: $x_n = 0 (n \neq 1, 5)$ を課すことで得られる ([2, 6, 10] 参照)。但し, ピラソ口作用素 $L_{-2} = x_1^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x_{n+2}\partial/\partial x_n$

¹³記号 $P(A_{L-1}^{(1)})$ は $A_{L-1}^{(1)}$ 型の高階パルヴェ方程式 [14], または周期 L のグループ鎖 [3, 28] を表す。 P_{III} -鎖は P_{III} の高階拡張 ($2L-2$ 階) で, 元々KP階層とは異なる文脈から発見された [19, 29]。 P_{VI} -鎖 ($= \mathcal{H}_{L,1}$) は, 第4節で見たように, あるクラスのシュレジンジャー系に等価な P_{VI} の高階拡張 ($2L-2$ 階) である。なお P_{VI} -鎖はドリinfeld・ソコロフ階層からも導出できる [5, 21]。

を用いた . 対応する $z = k^2$ についての線形方程式は $z = \infty$ にポアンカレ階数 $5/2$ の不確定特異点を持つ 2×2 系である .

参考文献

- [1] Ablowitz, M.J., Segur, H.: Exact linearization of a Painlevé transcendent. *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1103–1106 (1977)
- [2] Adler, M., van Moerbeke, P.: A matrix integral solution to two-dimensional W_p -gravity. *Comm. Math. Phys.* **147**, 25–56 (1992)
- [3] Adler, V.E.: Nonlinear chains and Painlevé equations. *Phys. D* **73**, 335–351 (1994)
- [4] Fuchs, R.: Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. *Math. Ann.* **63**, 301–321 (1907)
- [5] Fuji, K., Suzuki, T.: Drinfeld-Sokolov hierarchies of type A and fourth order Painlevé systems. *Funkcial. Ekvac.* **53**, 143–167 (2010)
- [6] Fukuma, M., Kawai, H., Nakayama, R.: Infinite dimensional Grassmannian structure of two-dimensional quantum gravity. *Comm. Math. Phys.* **143**, 371–403 (1992)
- [7] Kajiwara, K., Ohta, Y.: Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé II equation. *J. Math. Phys.* **37**, 4693–4704 (1996)
- [8] Kajiwara, K., Ohta, Y.: Determinant structure of the rational solutions for the Painlevé IV equation. *J. Phys. A* **31**, 2431–2446 (1998)
- [9] Koike, K.: On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters. *Adv. Math.* **74**, 57–86 (1989)
- [10] Kontsevich, M.: Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function. *Comm. Math. Phys.* **147**, 1–23 (1992)
- [11] Masuda, T.: On a class of algebraic solutions to the Painlevé VI equation, its determinant formula and coalescence cascade. *Funkcial. Ekvac.* **46**, 121–171 (2003)
- [12] Masuda, T., Ohta, Y., Kajiwara, K.: A determinant formula for a class of rational solutions of Painlevé V equation. *Nagoya Math. J.* **168**, 1–25 (2002)
- [13] 三輪哲二, 伊達悦朗, 神保道夫: ソリトンの数理, 岩波書店 2007.
- [14] Noumi, M., Yamada, Y.: Higher order Painlevé equations of type $A_L^{(1)}$. *Funkcial. Ekvac.* **41**, 483–503 (1998)
- [15] Noumi, M., Yamada, Y.: Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials. *Nagoya Math. J.* **153**, 53–86 (1999)
- [16] Okamoto, K., Kimura, H.: On particular solutions of the Garnier systems and the hypergeometric functions of several variables. *Quart. J. Math.* **37**, 61–80 (1986)
- [17] Schiff, J.: Bäcklund transformations of MKdV and Painlevé equations. *Nonlinearity* **7**, 305–312 (1994)
- [18] Schlesinger, L.: Über eine klasse von differentialsystemen beliebiger ordnung mit festen kritischen punkten. *J. Reine Angew. Math.* **141**, 96–145 (1912)
- [19] Shabat, A.B.: Third version of the dressing method. *Theoret. and Math. Phys.* **121**, 1397–1408 (1999)
- [20] Suzuki, T.: A particular solution of a Painlevé system in terms of the hypergeometric function ${}_{n+1}F_n$. *SIGMA* **6**, 078 (2010)
- [21] Suzuki, T.: A class of higher order Painlevé systems arising from integrable hierarchies of type A . Preprint, arXiv:1002.2685
- [22] Tsuda, T.: Universal characters and an extension of the KP hierarchy. *Comm. Math. Phys.* **248**, 501–526 (2004)
- [23] Tsuda, T.: Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system. *Adv. Math.* **206**, 657–683 (2006)
- [24] Tsuda, T.: Hypergeometric solution of a certain polynomial Hamiltonian system of isomonodromy type. *Quart. J. Math.* (2010), doi:10.1093/qmath/haq040
- [25] Tsuda, T.: From KP/UC hierarchies to Painlevé equations. Preprint, arXiv:1004.1347
- [26] Tsuda, T.: UC hierarchy and monodromy preserving deformation. MI Preprint Series, Kyushu University, MI2010-7; available also from arXiv:1007.3450
- [27] 梅村浩: Painlevé 方程式の 100 年 . *数学* **51**, 395–420 (1999)
- [28] Veselov, A.P., Shabat, A.B.: A dressing chain and the spectral theory of the Schrödinger operator. *Funct. Anal. Appl.* **27**, 81–96 (1993)
- [29] Willox, R., Hietarinta, J.: Painlevé equations from Darboux chains. I. $P_{III}-P_V$. *J. Phys. A* **36**, 10615–10635 (2003)