

## 相互結合ニューラルネットワーク形非線形回路の平衡点集合の実現に関する研究

高橋, 規一  
九州大学工学研究科情報工学専攻

<https://doi.org/10.11501/3110916>

---

出版情報 : 九州大学, 1995, 博士 (工学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

相互結合ニューラルネットワーク形非線形回路の  
平衡点集合の実現に関する研究

高橋 規 一

①

相互結合ニューラルネットワーク形非線形回路の  
平衡点集合の実現に関する研究

高橋 規一

# 目次

1	序論	1
2	相互結合型ニューラルネットワークモデル	5
2.1	緒言	5
2.2	モデル	6
2.2.1	離散系モデル	6
2.2.2	連続系モデル	7
2.3	大域的安定性	10
2.4	連想記憶	13
2.4.1	相互結合型ニューラルネットワークによる連想記憶	13
2.4.2	従来の構成法とその問題点	14
2.4.3	外積法	14
2.4.4	射影学習則	15
2.4.5	固有構造法	16
3	完全対称相互結合型回路の所望平衡点集合の実現	19
3.1	緒言	19
3.2	問題設定	20
3.3	平衡点集合の特徴付け	25
3.3.1	オペアンプがすべて正相の場合	25
3.3.2	オペアンプがすべて逆相の場合	33
3.4	所望平衡点集合の実現条件	37
3.4.1	オペアンプがすべて正相の場合	38
3.4.2	オペアンプがすべて逆相の場合	53
3.5	回路の安定性	54
3.5.1	回路の大域的安定性	55
3.5.2	平衡点の漸近安定性	58
3.6	結言	59
4	テイパー結合行列をもつニューラルネットワークの平衡点の個数について	61
4.1	緒言	61
4.2	問題設定	62
4.3	$k \leq 4$ の場合の解の最大個数	64
4.3.1	$k = 1$ および $2$ の場合	66
4.3.2	$k = 3$ の場合	67

4.3.3	$k = 4$ の場合	76
4.4	$W$ が $n - 1$ 重テーパー行列の場合	84
4.5	結論	86
5	巡回形零対角 2 値結合行列をもつネットワークの平衡点の個数と引き込み領域	87
5.1	緒言	87
5.2	諸定義	88
5.3	ネットワークの構成	89
5.4	結言	97
6	結論	98
	謝辞	101
	参考文献	102

## 第1章

### 序論

パターン認識・理解や学習など、現在のノイマン型コンピュータが苦手とする問題に対して、人間の脳の神経回路を模倣したニューラルネットワークを用いてこれを解決しようとする研究が現在盛んに行われている<sup>[1] - [20]</sup>。従来のノイマン型コンピュータが、逐次直列処理により大量のデータ処理、複雑な科学技術演算を高速かつ正確に実行するのに対し、ニューラルネットワークでは相互に結合しあつた多数の基本素子（ニューロン）が並列的に動作して情報の分散・並列処理を行う。工学の分野では、階層型ニューラルネットワークを用いた音声・文字などのパターン認識、システムの制御・同定への応用や、相互結合型ニューラルネットワークを用いた連想記憶、最適化問題の高速解法、パターン分類、雑音除去などへの応用が期待されており、ここ数十年の間に膨大な数の理論的・実験的研究が行われている。

相互結合型ニューラルネットワークに関する研究が盛んに行われるようになった一つの契機は、1982年に発表された Hopfield の論文<sup>[1]</sup>である。この論文において Hopfield は、各ニューロンの状態は1または0の2値をとる、ニューロンは非同期的に状態を更新する、ニューロン間の結合が対称である、といった特徴をもつ相互結合型ニューラルネットワークの離散系モデルを取り扱い、時間とともに単調に減少する性質をもつエネルギー関数を定義することによって、ネットワークが大域的に安定である（いかなる初期状態から出発しても必ず平衡点の一つに収束する）ことを証明した。さらに Hopfield は 1984年に、ネットワークの動作が微分方程式によって記述される連続系モデル（各ニューロンの状態は-1から1までの連続的な値をとる）を提案し、結合が対称の場合について、時間とともに単調減少するエネルギー関数を定義することによって大域的安定性を保証した<sup>[2]</sup>。この連続系モデルは飽和特性をもつオペアンプ、キャパシタ、線形抵抗、直流電流源からなる一種のアナログ非線形回路である。このことは、多くの工学者、特に非線形回路理論の研究者の

ニューラルネットワークに対する関心を集めることになった要因の一つであろう。その後1988年には、セルラーニューラルネットワークとよばれる新しいタイプの非線形回路網がChuaらによって提案され<sup>[32]</sup>、非線形回路理論の分野ではHopfieldの回路と並んで現在盛んに研究されている<sup>[33]-[37]</sup>。セルラーニューラルネットワークの特徴は、セルと呼ばれる基本素子の配置が格子状であることや、基本素子間の結合が近傍に限られているといった点にあるが、基本的な動作は従来の相互結合型ニューラルネットワークとほぼ同じである。

オペアンプ、キャパシタ、抵抗などから構成される相互結合型ニューラルネットワーク形の非線形回路は一般に多数の平衡点をもち、その動作は非常に複雑である。上に述べたように、結合が対称であれば回路は大域的に安定であるが、一般にはある初期状態から出発した回路はその状態を連続的または離散的に更新しながら、1) 平衡点の一つに収束する、2) リミットサイクルに落ち込む、3) カオス的な軌道を描く、といった様々な振舞いをする。工学的立場から見れば2)、3) の場合はあまり有効でなく、ほとんどの応用例が1) の振舞いを利用するものである。したがって、以下の問題は様々な応用において基本的かつ重要な問題である。

(i) 回路に生じる平衡点集合の特徴付け

(ii) 所望の平衡点集合を実現する回路の構成

相互結合型ニューラルネットワークの平衡点は  $x = F(Wx + \theta)$  という形の非線形方程式 ( $x$  は  $n$  次元ベクトル、 $W$  は  $n \times n$  定数行列、 $\theta$  は  $n$  次元定数ベクトル、 $F(\cdot)$  は非線形関数ベクトル) の解である。したがって、上記の問題はそれぞれ、行列  $W$  およびベクトル  $I$  が与えられたときの解集合の特徴付け、所望の解集合をもつように  $W$  および  $\theta$  を決定することに他ならない。しかしながら、非線形方程式の一般的解法が存在しないことや、組合せの数が非常に多いことなどによりこれらは非常に難しい問題である。

先に挙げた相互結合型ニューラルネットワークのいくつかの応用の中で、連想記憶は上記の問題に最も関係の深い応用例である。連想記憶においては、1) 任意の所望記憶ベクトルが確実に記憶できる、2) 偽記憶が一つも生じない、もしくは出来るだけ少ない、3) 記憶容量が大きい、4) 各平衡点の引き込み領域が広い、5) リミットサイクルが存在せず、任意の初期値から必ず平衡点の一つに収束する、6) 結合係数が逐次的に学習できる、等を満足する回路を構成することが常識的な目標である。しかし、これらの目標をすべて満足する構成法を与えることは極めて難しく、応用によって重点の置き方は異なってくる。これまでも、外積法 (Outer Product Method) <sup>[1],[2]</sup>、射影学習則 (Projection Learning Rule)

[3], [4], 固有構造法 (Eigen Structure Method) などの構成法が提案されている (外積法, 射影学習則は連想記憶の分野では, それぞれ, 相関型学習法, 直交型学習法として古くから知られた方法であるが, 本論文では前者の呼び方を用いる) が, いずれの方法においても一般に偽記憶が多数生じてしまう等の問題がある. すなわち, 上記の問題 (ii) は解決されていない (詳しくは第 2 章で述べる). また, 従来 of 連想記憶に関する結果のほとんどがニューロン間の結合が対称な回路を仮定して得られているので, 上記の問題 (i), (ii) に対する一般的な議論を行なっているわけではない. 結合が対称な回路を仮定する理由は, 大域的安定性が保証されていることである. しかしながら, 非対称な結合をもつネットワークを用いることにより, より複雑な情報処理が行える可能性は大きい. 実際, セルラーニューラルネットワークにおいては, 非対称な結合をもつネットワークの応用例がいくつか示されており<sup>[34]</sup>, 結合が非対称な場合の大域的安定性に関する議論も行われている<sup>[35]–[37]</sup>.

平衡点集合の特徴付けの一つとして, 平衡点の個数を求める問題がある. 非線形回路理論の分野では, 方程式が一意解をもつための条件に関しては優れた結果が得られているが<sup>[38]–[49]</sup>, 解の個数に関する結果は非常に少なく, 簡単な非線形方程式でさえ, 解の正確な個数を知る一般的な方法は得られていない. 平衡点の個数は, 最適化問題への応用においては目的関数の局所最小点の個数に関連し, 連想記憶への応用においては, 記憶容量に関連する重要な問題である. 連想記憶における記憶容量は, ネットワークが確実に記憶できるベクトルの最大個数として定義される. 記憶容量はネットワークの構成法によって異なるが, 上に挙げた構成法の一つである外積法に関しては, 数値実験によって得られた  $0.15n$  ( $n$  はニューロンの個数)<sup>[1]</sup> であるとか, 統計力学的手法によって得られた理論値  $n/(2\log n)$ <sup>[22]</sup> などの結果が知られており, さらに, 記憶容量と引き込み領域の関係についても, 符号理論を適用して得られた結果が発表されている<sup>[14]</sup>. 射影学習則や固有構造法に関しては, その構成法が外積法に比べて複雑であるためか, 記憶容量の算出は専ら数値実験によって行われている. また, 文献 [17] には構成法によらない記憶容量の上界が示されているが, 対称は結合であると仮定している.

本研究は, 上記の (i), (ii) の問題に対する出発点として, 行列  $W$  に様々な条件を仮定して, 所望の平衡点集合の実現, 平衡点の最大個数の厳密評価, 平衡点の個数とそれぞれの平衡点の引き込み領域の関係, について考察している.

以下, 第 2 章では, 相互結合型ニューラルネットワークのモデル (離散系, 連続系) について説明し, 本研究の問題に最も関係のある連想記憶に関する従来 of 研究結果とそれらの問題点について述べる.



第3章では、区分線形の飽和特性をもつオペアンプ、キャパシタ、抵抗、直流電流源から構成される非線形回路について、与えられた平衡点集合を実現する回路構成法について議論する。この回路にはいくつかの仮定を与えているが、それらの仮定は行列  $W$  の対角項がすべて等しくまた非対角項もすべて等しいという特殊な場合に相当する。まず、この非線形回路網の平衡点集合の特徴付けを行い、その簡潔な表現方法を与える。次に、平衡点集合の特徴を利用することにより、所望の平衡点集合だけが実現できるための必要十分条件を与える。これらの議論では、オペアンプがすべて正相である場合だけでなく、オペアンプがすべて逆相の場合についても取り扱う（通常の連続系ニューラルネットワークではオペアンプはすべて正相である）。さらに、正相、逆相のオペアンプが混在する場合について、回路が大域的に安定であることを示し、飽和領域にあるすべての平衡点は、オペアンプが極性に関わらず漸近安定であることを示す。

第4章では、非対称な結合をもつある種の離散系ニューラルネットワークの平衡点の最大個数について議論する。このネットワークは、 $n$  個のニューロンが環状に配置されており、それぞれのニューロンはそれよりすぐ前方にある  $k$  個のニューロンからのみ結合されており、その結合の強さはニューロン間の距離とともに小さくなるという特徴をもつ。この特徴により結合は一般に非対称である。まず、 $k \leq 4$  の場合について平衡点の最大個数を厳密に評価し、それがニューロンの個数  $n$  によらず極めて少ない（ $k \leq 4$  の場合に限れば  $k$  に比例する）ことを示す。次に、 $k = n - 1$  の特殊な場合を取り扱い、平衡点の個数が  $n$  に関して指数関数的に増加することを示す。

第5章では、ニューロン間の結合の係数が1または-1（ただし、自分自身との結合の係数は0）であると仮定した離散系ニューラルネットワークの一つの回路構成法を与える。この仮定により結合は一般に非対称である。この方法によって構成されたネットワークは、ほぼ等しい大きさの引き込み領域をもつ平衡点が多数存在するという特徴をもつ。平衡点の個数と引き込み領域の関係については、連想記憶への応用に関連して研究されている<sup>[14]</sup>が、従来の結果は専ら確率的に導かれたものである。これに対して、第5章に示す結果はすべて決定論的手法によって得られたものであり、上記の特徴をもつネットワークを具体的に構成することにより、非対称な結合をもつネットワークが連想記憶に利用できる可能性を示唆するものである。

最後に第6章において、本研究のまとめと今後の課題について述べる。

## 第2章

# 相互結合型ニューラルネットワークモデル

### 2.1 緒言

本章では、相互結合型ニューラルネットワークの代表的なモデルについて説明し、本研究の目的に最も関係の深い応用である連想記憶回路構成について簡単に述べ、従来の構成法の特徴や問題点を紹介する。

ここ数十年の間に、相互結合型ニューラルネットワークの連想記憶や最適化問題の高速解法への応用に関する研究が盛んに行われているが、その契機となったのは、1982年に発表された Hopfield の論文<sup>[1]</sup>である。その論文で Hopfield は、結合が対称な離散系ネットワークに対して、時間とともに単調減少するエネルギー関数を定義し、ニューラルネットワークが大域的に安定であることを示した。その後さらに、電子回路によって構成される連続系のモデルを提案し<sup>[2]</sup>、このモデルに対しても単調減少するエネルギー関数を定義している。2.2 節において、上記の離散系および連続系のモデルについて簡単に説明する。また、2.3 節では大域的安定性に関する従来の結果について述べる。

本研究の目的である所望の平衡点集合の実現は、相互結合型ニューラルネットワークを連想記憶へ応用する際の最も基本的な問題である。そこで、2.4 節では、まず相互結合型ニューラルネットワークによる連想記憶に関する基本的事項や、連想記憶回路を構成する上での一般的な目標について述べ、次にこれまでに提案された（自己想起型）連想記憶回路構成法の中で代表的なものをいくつか紹介する。Hopfield は前出の 1982 年の論文において、ヘップ則を基にした外積法（Outer Product Method）という構成法を用いている。この方法については、構成法の簡単さおよび理論的解析の容易さから、その後数多くの理論的、実験的研究がなされている。Personnaz らは一般化逆行列を利用した射影学習則（Projection Learning Rule）を提案した<sup>[3], [4]</sup>。また、Michel をはじめとする研究グループ

は特異値分解を利用した固有構造法 (Eigen Structure Method) を提案し、数多くの論文を  
発表している<sup>[6]-[12]</sup>。2.4節ではこれらの構成法の特徴や問題点を明らかにする。

## 2.2 モデル

相互結合型ニューラルネットワークのモデルとしてよく用いられる、離散系モデルと連  
続系モデルを以下で説明する。

### 2.2.1 離散系モデル

離散系モデルは以下の差分方程式によって表される。

$$x_i(t+1) = \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t) - \theta_i \right) \quad (2.1)$$

$$\operatorname{sgn}(c) = \begin{cases} +1 & c > 0 \text{ のとき} \\ -1 & c < 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (2.2)$$

ここで、 $x_i(t)$ ,  $w_{ij}$ ,  $\theta_i$  はそれぞれ、 $i$  番目のニューロンの時刻  $t$  における状態、 $j$  番目の  
ニューロンから  $i$  番目のニューロンへの結合係数、 $i$  番目のニューロンのしきい値を表す。

離散系モデルはさらに、ニューロンの状態更新の方法の違いにより、同期式モデル、非  
同期式モデルに大別される。同期式モデルは、時刻が1増加する際に、すべてのニューロ  
ンが同時に (2.1) によって状態を更新するものである。よって同期式モデルでは、(2.1) は  
簡単に、

$$x(t+1) = \operatorname{sgn}(Wx(t) - \theta) \quad (2.3)$$

と表される。ただし、 $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$  (肩符  $T$  は転置を表す),  $W = [w_{ij}]$ ,  
 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_n]^T$  である。以下では、 $W$ ,  $\theta$  をそれぞれ結合行列、しきい値ベクトルとよぶ。  
非同期式モデルは、時刻が1増加する際に、一つのニューロンのみが (2.1) によって状態を  
更新するものである。

離散系モデルの平衡点は、ニューロンの状態更新が同期式か非同期式かに関わらず、 $n$   
次元値ベクトル  $x$  に関する方程式：

$$x = \operatorname{sgn}(Wx - \theta) \quad (2.4)$$

を解くことによって求められる。

## 2.2.2 連続系モデル

連続系モデルで最も代表的なものは、1984年にHopfieldによって提案されたモデルで、次の微分方程式によって表される。

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j(t) - \frac{u_i(t)}{R_i} + I_i \quad (2.5)$$

$$x_i(t) = f_i(v_i(t)) \quad (2.6)$$

このモデルは図2.1に示す非線形回路によって実現される。 $x_i(t)$ ,  $u_i(t)$ はそれぞれ、 $i$ 番目のオペアンプの出力電圧、入力電圧を表す。 $t_{ij}$ は絶対値が $R_{ij}$  ( $j$ 番目のオペアンプの出力端と $i$ 番目のオペアンプの入力端の間に接続される抵抗)であり、符号は $j$ 番目のオペアンプの出力が非反転か反転かによって決まる。 $R_i$ は、

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{\rho_i} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_{ij}}$$

で与えられる。ここで、 $\rho_i$ は $i$ 番目のオペアンプの入力インピーダンスである。 $C_i$ は $i$ 番目のオペアンプの入力キャパシタンスである。 $I_i$ は $i$ 番目のオペアンプに接続された独立直流電流源の電流値を表す。 $f_i(\cdot)$ はオペアンプの入出力特性を表し、Hopfieldは $f_i(\cdot)$ としてシグモイド関数を用いているが、理論的解析の簡単さのため区分的線形関数や、ステップ関数を用いられることもある(図2.2)。

(2.5) および (2.6) は、ベクトル表現を用いることにより次のように書き換えられる。

$$C \frac{du(t)}{dt} = Tx(t) - R^{-1}u(t) + I \quad (2.7)$$

$$x(t) = F(u(t)) \quad (2.8)$$

ただし、 $C = \text{diag}[C_1, \dots, C_n]$ ,  $u(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$ ,  $T = [t_{ij}]$ ,  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ ,  $R = \text{diag}[R_1, \dots, R_n]$ ,  $I = [I_1, \dots, I_n]^T$ である。また、 $F(u(t)) = [f_1(u_1(t)), \dots, f_n(u_n(t))]^T$ である。

連続系モデルの平衡点は、 $n$ 次元ベクトル  $u$  に関する方程式：

$$u = RTF(u) + RI \quad (2.9)$$

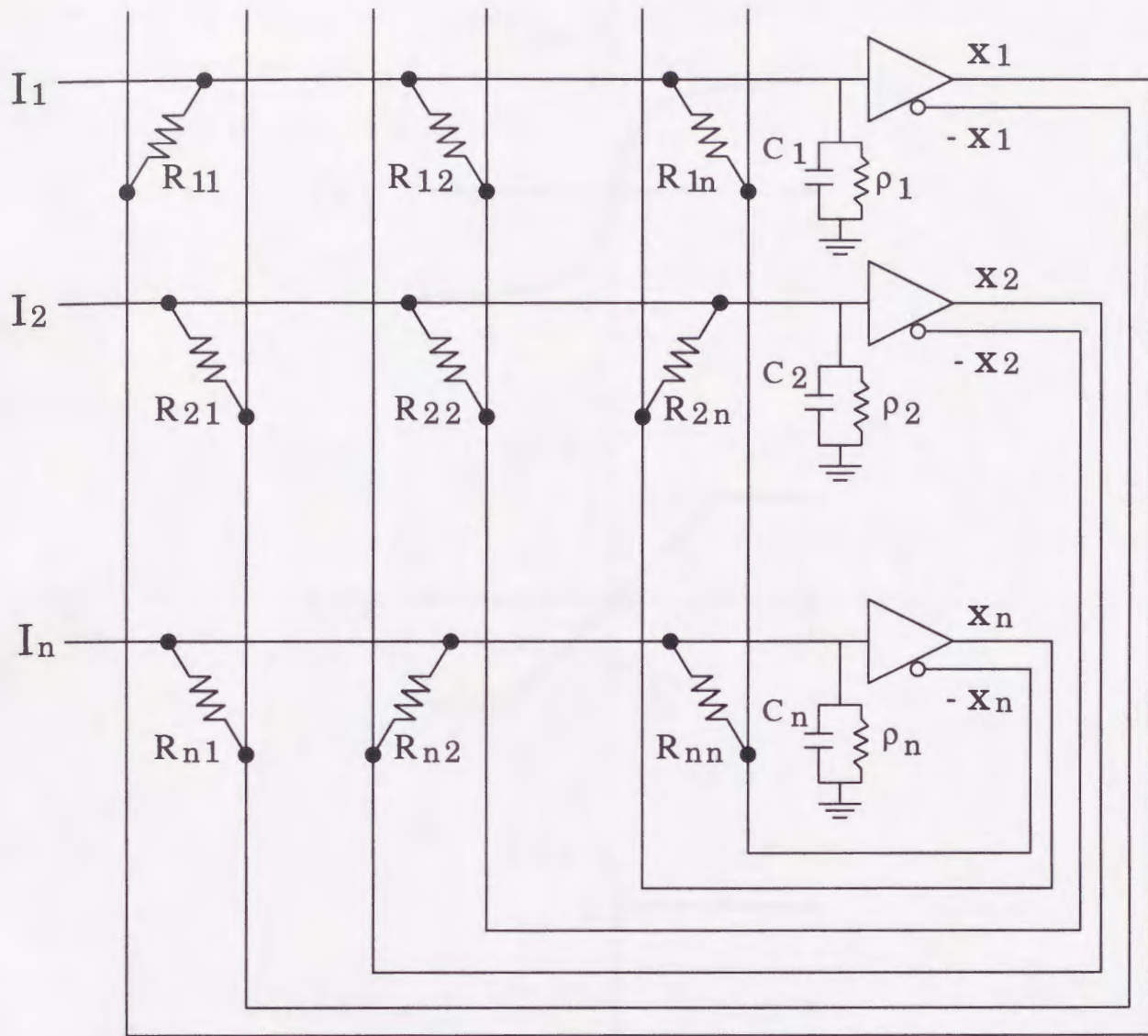


図 2.1: Hopfield モデル

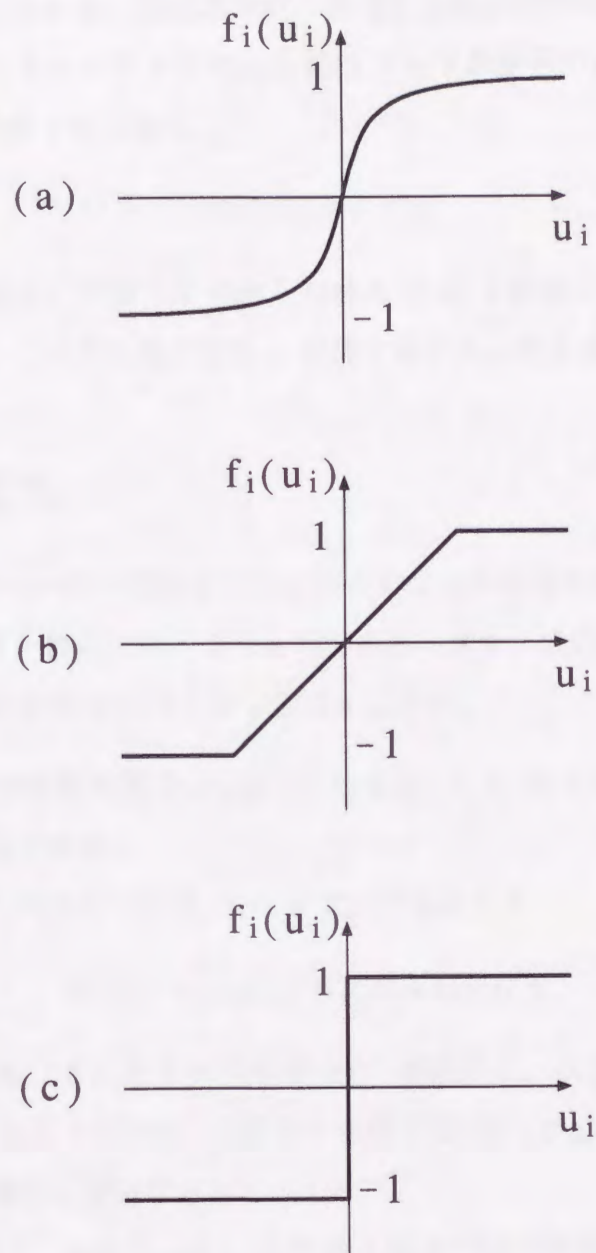


図 2.2: オペアンプの入出力特性. (a) シグモイド関数 (b) 区分線形関数 (c) ステップ関数

を解くことによって求められる。連続系モデルを連想記憶に利用する場合には、平衡点  $u^*$  の値よりも、それに対するオペアンプの出力電圧  $F(u^*)$  が重要である。 $F(u^*)$  は、 $n$  次元ベクトル  $x \in [-1, 1]^n$  に関する方程式：

$$x = F(RTx + RI) \quad (2.10)$$

の解である。これは離散系の平衡点を求める方程式 (2.4) と関数  $F(\cdot)$  が異なる点以外は同じ形である。以下では、この方程式の解を  $x$  に関する平衡点とよぶ。

### 2.3 大域的安定性

ここでは、ネットワークの大域的安定性に関する従来の結果を述べる。以下に示す結果は、回路構成法に依らず一般的に成り立つものである。まず、離散系モデルにおいて  $W$  が対称行列の場合の結果を定理 2.1, 2.2 および 2.3 に示す。

**定理 2.1** 結合行列  $W$  が対称行列で  $w_{ii} \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ならば、離散系非同期式ネットワークは大域的に安定である。

証明：ネットワークのエネルギー関数  $E(t)$  を次式で定義する。

$$E(t) = -\frac{1}{2}(x(t))^T W x(t) + (x(t))^T \theta \quad (2.11)$$

ネットワークの状態が変化するときには必ず  $E(t)$  が減少し、状態が変化しないときには  $E(t)$  も変化しないことを以下で示す。時間が十分経てば  $E(t)$  が必ず極小値に落ち着くことからネットワークは大域的に安定であるといえる。

一般性を失うことなく、 $x(t)$  と  $x(t+1)$  で第 1 要素だけが異なるとする。すなわち、

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, \quad x(t+1) = \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x'(t) \end{bmatrix}$$

とする。ここで、 $x'(t) = [x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$  である。 $x(t)$  の要素の分割に対応して、ベクトル  $\theta$ 、行列  $W$  についても同様に、

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta' \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_1^T \\ w_1 & W' \end{bmatrix}$$

とおく。このとき、時刻  $t$  におけるエネルギー  $E(t)$  は次のように表される。

$$E(t) = -\frac{1}{2} [w_{11}x_1^2(t) + 2x_1(t)w_1^T x'(t) + (x'(t))^T W' x'(t)] + \theta_1 x_1(t) + (x'(t))^T \theta'$$

同様にして  $E(t+1)$  を表し,  $E(t+1) - E(t)$  を計算すると, 次のようになる.

$$E(t+1) - E(t) = -\frac{1}{2}w_{11}\{x_1(t+1) - x_1(t)\}^2 - \{x_1(t+1) - x_1(t)\} \left[ \sum_{j=1}^n w_{1j}x_j(t) - \theta_1 \right]$$

ここで,  $x_1(t+1) \neq x_1(t)$  ならば,  $w_{11} \geq 0$  であるから第1項は0以下であり,  $\sum_{j=1}^n w_{1j}x_j(t) - \theta_1$  は  $x_1(t+1)$  と同符号であるから第2項は負になる.  $x_1(t+1) = x_1(t)$  ならば  $E(t+1) - E(t) = 0$  である. ■

**定理 2.2** 結合行列  $W$  が集合  $\{-1, 0, 1\}^n$  で正值ならば, 離散系同期式モデルは大域的に安定である.

証明: エネルギー関数を (2.11) で定義し, その時間変化を求めると次のようになる.

$$\begin{aligned} E(t+1) - E(t) &= -[x^T(t+1) - x^T(t)] [Wx(t) - \theta] \\ &\quad - \frac{1}{2} [x^T(t+1) - x^T(t)] W [x(t+1) - x(t)] \end{aligned}$$

ここで,  $Wx(t) - \theta$  の各要素は  $x(t+1)$  の対応する要素と符号が等しいので, 第1項は  $x(t+1) = x(t)$  のとき零で, それ以外のとき負である. また,  $W$  の正值性により第2項も  $x(t+1) = x(t)$  のとき零で, それ以外のとき負である. よって,  $x(t+1) = x(t)$  のとき  $E(t+1) = E(t)$ ,  $x(t+1) \neq x(t)$  のとき  $E(t+1) < E(t)$  である. ■

**定理 2.3** 結合行列  $W$  が対称ならば, 離散系同期式モデルは平衡点か周期2の周期解に収束する.

証明: エネルギー関数を次式で定義する.

$$E(t) = -x^T(t)Wx(t-1) + [x^T(t) + x^T(t-1)]\theta \quad (2.12)$$

このとき,  $E(t)$  の時間変化を計算すると,

$$E(t+1) - E(t) = -[x^T(t+1) - x^T(t-1)] [Wx(t) - \theta]$$

となる.  $Wx(t) - \theta$  の各要素の値は  $x(t+1)$  の対応する要素の値と符号が等しいから,  $x(t+1) \neq x(t-1)$  ならば  $E(t+1) < E(t)$  が成り立つ. よって, ネットワークは平衡点か周期2の周期解に収束する. ■

次に, 連続系モデルにおいて  $T$  が対称の場合の結果を示す.



定理 2.4 連続系モデル (2.7) において行列  $T$  が対称ならば、大域的に安定である。

証明：エネルギー関数  $E(t)$  を次式で定義する。

$$E(t) = -\frac{1}{2}x^T(t)Tx(t) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \int_0^{x_i(t)} f_i^{-1}(\eta)d\eta - I^T x(t) \quad (2.13)$$

このとき、 $E(t)$  の時間微分を計算すると、

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\sum_{i=1}^n \frac{dx_i(t)}{dt} \left( \sum_{j=1}^n t_{ij}x_j(t) - \frac{u_i(t)}{R_i} + I_i \right)$$

となる。ここで (2.7) 式を考慮すると、上式は、

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= -\sum_{i=1}^n C_i \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{du_i(t)}{dt} \\ &= -\sum_{i=1}^n C_i f_i^{-1'}(x_i(t)) \left( \frac{dx_i(t)}{dt} \right)^2 \end{aligned}$$

と書き換えられる。 $f_i(\cdot)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) をすべてシグモイド関数とすれば、 $f_i(\cdot)$  は単調増加であるから、 $f_i'(\cdot)$  は正であり、かつ  $C_i$  も正である。よって、 $dE(t)/dt$  はつねに 0 以下、すなわち  $E(t)$  は単調減少関数である。 $dE(t)/dt = 0$  となるのは、 $dx_i(t)/dt = 0$  のときかつそのときだけである。 ■

以上のように、ネットワークの大域的安定性において  $W$  または  $T$  の対称性は重要な役割を演じている。したがって次節で示すように、連想記憶における従来のネットワーク構成法のほとんどが  $W$  または  $T$  を対称行列としている。しかし、最近になって、非対称な結合をもったネットワークの大域的安定性に関する研究を見られ、十分条件がいくつか得られている。

Gilli は、連続系モデル (2.7) において、 $C$ 、 $R$  をともに単位行列とした場合について、ネットワークが大域的に安定であるための条件について考察し、定理 2.5 で示される十分条件を求めた<sup>[35]</sup>。

定理 2.5 連続系モデル (2.7) において、 $C$ 、 $R$  をともに単位行列とした場合ネットワークが大域的に安定であるための十分条件は、 $DT$  が対称行列となるような正値対角行列  $D$  が存在することである。 ■

この定理は、 $T$  が対称でない場合についても成り立つ。しかしながら、上の条件を満足する行列  $T$  は極めて少ないように思われるので、あまり有効な結果とは言えない。より広い十分条件を求めることは今後の課題である。

## 2.4 連想記憶

### 2.4.1 相互結合型ニューラルネットワークによる連想記憶

離散系モデル, 連続系モデルのどちらにおいても, ある初期状態から出発したネットワークは, 各ニューロンの状態変化が繰り返されるうちに, 1) ある平衡点に収束する, 2) リミットサイクルに落ち込む, 3) カオス的な軌道を描く (連続系モデルのみ), などの振舞いをする. 相互結合型ニューラルネットワークによる連想記憶では, 初期状態  $x(0)$  から出発したネットワークが平衡点  $x^*$  に収束するという過程が, 与えられたデータ  $x(0)$  から既に記憶しているデータ  $x^*$  を連想した, ということの意味する. 与えられたデータの組  $\xi^1, \dots, \xi^p$  を記憶することは,  $\xi^1, \dots, \xi^p$  を平衡点とするニューラルネットワークを構成することであり, この問題は本研究の目的と非常に関係深いものである.

連想記憶としては, 自己想起型と相互想起型とがあり, 本来は相互想起型が連想記憶のように感じるが, 非線形回路理論では自己想起型回路について主に検討されており, 連想記憶, 雑音除去, 信号・画像の整形・修復などへの応用を目指しているように見える. よって以下では連想記憶といえば自己想起型連想記憶を指すものとする.

連想記憶においてよく用いられる用語を以下に示す.

**所望記憶ベクトル** 連想記憶回路に記憶させたいベクトル, すなわち, ネットワークの ( $x(t)$  に関する) 平衡点にしたいベクトル. 一般には, 2 値ベクトルの集合である.

**記憶ベクトル** 構成されたネットワークの実際の平衡点.

**偽記憶** 所望記憶ベクトル以外の記憶ベクトル.

**記憶容量** ネットワークに記憶させることのできる記憶ベクトルの最大個数.

連想記憶回路構成の目標は, 常識的には,

- (a) 任意の所望記憶ベクトルの集合を確実に記憶できる.
- (b) 偽記憶が一つも生じない, もしくはできるだけ少ない.
- (c) 記憶容量が大きい.
- (d) 各記憶ベクトルの引き込み領域が広い.
- (e) ネットワークが大域的に安定である.

(f) ニューロン間の結合係数が逐次的に学習できる。

等が考えられる。しかしながら、(a)~(f) を完全に満足することはできず、重点の置き方で結果が異なりうる。

### 2.4.2 従来の構成法とその問題点

本節では、これまでに提案されている構成法のなかで代表的な、外積法<sup>[1]</sup>、射影学習則<sup>[3],[4]</sup>、固有構造法<sup>[6]-[12]</sup>を紹介し、それらの特徴や問題点を明らかにする。以下では、所望記憶ベクトルは2値ベクトルであるとし、 $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  で表す。

### 2.4.3 外積法

本方法は、離散系モデル (2.1) および (2.4) の結合行列  $W$ 、しきい値ベクトル  $\theta$  を次式によって決定する構成方法である。

$$W = \sum_{i=1}^p \xi^i (\xi^i)^T \quad (2.14)$$

$$\theta = 0 \quad (2.15)$$

この構成方法の長所としては、もし

**仮定 2.1**  $\xi^1, \dots, \xi^p$  は互いに直交している (したがって、 $p \leq n$ )。

が満足されているならば、 $\xi^1, \dots, \xi^p$  を完全に記憶できること、逐次学習能力 (今までに記憶したベクトルに加えて、新たなベクトルを追加記憶することができる能力) および逐次忘却能力をもつこと、結合行列が正値対称行列なのでネットワークが大域的に安定であること、などが挙げられる。逆に短所としては、偽記憶が多数発生すること、仮定 2.1 が成り立たない場合には所望記憶ベクトルが記憶される保証がないこと、結合行列が対称行列に限られること、などが挙げられる。

(2.14) によって  $W$  を求めると、一般に対角要素が非対角要素に比べてかなり大きくなる。対角要素が大きくなると偽記憶が多数発生する (とくに  $W$  が優対角行列の場合には  $2^n$  個の2値ベクトルすべてが記憶ベクトルになってしまう) ので、(2.14) の改良版として、

$$W = \sum_{i=1}^p \xi^i (\xi^i)^T - pU_n \quad (U_n \text{ は } n \text{ 次の単位行列を表す}) \quad (2.16)$$

も考えられている。すなわち、(2.14)の $W$ の対角要素をすべて0にしてしまう方法である。この場合にも仮定2.1が満足されているならば、 $\xi^1, \dots, \xi^p$ を完全に記憶できる。しかし、仮定2.1が満足されていない場合には所望記憶ベクトルが記憶される保証がない点は(2.14)の方法と同じである。

Hopfieldらは、 $\xi_j^i$ として1または-1を確率 $\frac{1}{2}$ でランダムに与えたシミュレーションにより、 $p > 0.15n$ では初期状態から記憶ベクトルへ到達する確率が極端に下がることを示し(理論的にもほぼ同様な結果が示されている)、記憶容量 $0.15n$ を与えた。これは $p$ の増加とともに仮定2.1が満足されにくくなること、偽記憶が増加することによると思われる。また、統計力学的立場から記憶容量や記憶容量と引き込み領域の関係などが理論的に解析されている<sup>[14]</sup>。

#### 2.4.4 射影学習則

この方法では、離散系ネットワークの $W$ ,  $\theta$ を、

$$W = \Xi \Xi^I \quad (2.17)$$

$$\theta = 0 \quad (2.18)$$

により定める。ただし、 $\Xi = [\xi^1, \dots, \xi^p]$ である。また、 $\Xi^I$ はMoore-Penroseの一般化逆行列である。この方法が射影学習則とよばれるのは、(2.17)によって求まる $W$ が $n$ 次元空間から $\xi^1, \dots, \xi^p$ によって張られる線形部分空間への直交射影行列になっていることによる。

この方法の最も大きな長所は、所望記憶ベクトルが必ず記憶ベクトルとなることである。もし、

仮定2.2  $\xi^1, \dots, \xi^p$ は一次独立である(したがって、 $p \leq n$ )。

が満足されていれば、 $\Xi^I$ は $\Xi^I = (\Xi^T \Xi)^{-1} \Xi^T$ によって計算できる。さらに仮定2.1が満足されていれば、 $(\Xi^T \Xi)^{-1} = \frac{1}{n} U$  ( $U$ は $p$ 次の単位行列)となり、外積法と一致する。また、一般化逆行列は逐次形計算で求めることができるので、外積法と同様に、逐次的学習・忘却能力をもつようにすることができる。

射影学習則の大域的安定性については、エネルギー関数：

$$E(t) = -\frac{1}{2} (x(t))^T W x(t) \quad (2.19)$$

が単調減少関数であることによって、周期解に落ち込むことなく、常に平衡状態に収束することが保証されている。この証明は、外積法の場合の非同期式ではなく、同期式に対してなされている。

行列  $\Xi$  の階数が  $n$  であるときには  $W$  が単位行列になるので、 $2^n$  個の 2 値ベクトルすべてが記憶ベクトルとなってしまい、連想記憶回路としては意味のないものになってしまう。このように、本方法には、一般に多数の偽記憶が発生するという欠点がある。

記憶ベクトルの引力圏は、仮定 2.1 が満足されているときには評価ができて、ハミング距離  $n/(2p)$  以内の点からは、一度の同期式状態更新で記憶ベクトルへ到達することがわかっている。しかし、所望記憶ベクトルの個数  $p$  が  $n/2$  に近づくとつれて、引力圏は急激に小さくなることから、本学習法の記憶容量は高々  $0.5n$  であることがいえよう。  $\xi^1, \dots, \xi^p$  が仮定 2.1 を満たさないときには、一般的な結果は得られていない。

(2.17) 式は、方程式：

$$W\Xi = \Xi \quad (2.20)$$

を満足する  $W$  を求めるという考えに基づいている。(2.20) が満足されていれば、明らかに、

$$\text{sgn}(W\xi^j) = \xi^j \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (2.21)$$

が成り立つが、関数  $\text{sgn}(\cdot)$  の性質を考えると、(2.20) 式は本来の方程式 (2.21) よりかなり厳しい条件であるように思われる。

#### 2.4.5 固有構造法

Li らは、連続系モデル (2.5) または (2.7) の代わりに、

$$\frac{dx(t)}{dt} = -Ax + Ty + I \quad (2.22)$$

$$y = \text{sat}(x) \quad (2.23)$$

で表されるモデルを対象にした構成法を提案した。ただし、 $A = \text{diag}[a_1, \dots, a_n]$ ,  $T = [T_{ij}] \in R^{n \times n}$ ,  $I = [I_1, \dots, I_n]^T \in R^n$  であり、 $\text{sat}(x_i)$  は次式で表される区分線形関数である。

$$\text{sat}(x_i) = \begin{cases} 1, & x_i > 1 \\ x_i, & -1 \leq x_i \leq 1 \\ -1, & x_i < -1 \end{cases} \quad (2.24)$$

このモデルは、連続系モデル (2.7) を拡張したものであるから、明らかに連続系モデル (2.7) にも適用できる。以下に回路構成 ( $A, T, I$  の定め方) の手順を示す。

- (i) ベクトル  $\beta^i = [\beta_1^i, \dots, \beta_n^i]^T$  ( $i = 1, \dots, p$ ),  $n$  次対角行列  $A$ ,  $n$  次元ベクトル  $I$ , 正数  $\mu$  を,

$$\begin{aligned}\beta_j^i \xi_j^i &> 0 \\ a_j \beta_j^i &= \mu \xi_j^i \\ a_j &> 0 \\ \mu &> \max_{1 \leq i \leq n} \{a_i\}\end{aligned}$$

を満足するように決める。

- (ii) 次式で与えられる  $n \times (p-1)$  行列  $Y$  を計算する。

$$Y = [y^1, \dots, y^{p-1}] = [\xi^1 - \xi^p, \dots, \xi^{p-1} - \xi^p]$$

- (iii) 行列  $Y$  の特異値分解  $Y = U \Sigma V^T$  を実行する。ここで、 $U$  および  $V$  はユニタリ行列で、 $\Sigma$  は  $Y$  の特異値が対角要素に並ぶ対角行列である。 $U = [u^1, \dots, u^n]$ ,  $y^1, \dots, y^{p-1}$  によって張られる部分空間の次元を  $q$  とすれば、特異値分解の性質により、 $q$ ,  $\{u^1, \dots, u^q\}$ ,  $\{u^1, \dots, u^n\}$  はそれぞれ、行列  $Y$  の階数,  $y^1, \dots, y^{p-1}$  によって張られる部分空間の直交基底,  $R^n$  の直交基底となる。

- (iv) 次式によって、行列  $T^+$  および  $T^-$  を計算する。

$$\begin{aligned}T^+ &= \sum_{i=1}^q u^i (u^i)^T \\ T^- &= \sum_{i=q+1}^n u^i (u^i)^T\end{aligned}$$

- (v) パラメータ  $\tau$  を正に選び,

$$\begin{aligned}T &= \mu T^+ - \tau T^- \\ I &= \mu \xi^p - T \xi^p\end{aligned}$$

によって  $T$  および  $I$  を計算する。

上記の手順によって求められた  $A$ ,  $T$ ,  $I$  に対して,  $\xi^1, \dots, \xi^p$  は確実に記憶ベクトルとなる. また,  $\xi^i$  に対応する  $\beta^i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) は漸近安定平衡点である. 大域的安定性についても,

$$E(t) = -\frac{1}{2}y^T(t)Ty(t) + \frac{1}{2}y^T(t)Ay(t) - y^T(t)I$$

によって定義されるエネルギー関数が単調減少することにより, 大域的安定性が保証されている. さらに, 逐次学習能力および逐次忘却能力をもたせることも可能である. しかしながら, 行列  $Y$  の階数  $q$  が  $n$  に等しくなると, 上の手順によって求めた行列  $T$  はすべての対角要素が  $\mu$  ( $> 0$ ) であるような対角行列になってしまい, すべての 2 値ベクトルが記憶ベクトルになってしまう. 数値実験によっても,  $q$  が  $n-1$  に近付くと偽記憶が多数発生してしまうことが確認されている.

## 第3章

# 完全対称相互結合型回路の所望平衡点集合の実現

### 3.1 緒言

所望の平衡点だけを実現する回路を構成することは、相互結合型ニューラルネットワークの応用の一つである連想記憶回路において、最も基本的な問題である。しかしながら、この問題は極めて難しく、これまでに提案されている外積法、射影学習則、固有構造法などの構成法のいずれにおいても、一般に所望の平衡点以外に多数の平衡点が生じてしまうので、実際の平衡点集合は構成してみないとわからない、といった問題点がある。また、連想記憶回路構成に関する従来の研究において、所望の平衡点集合だけを実現する方法についてはほとんど議論されていない。

相互結合型ニューラルネットワークの平衡点は、 $x = F(Wx + I)$  という形の非線形方程式の解である。したがって、与えられたベクトルだけを平衡点とするように回路を構成することは、それらのベクトルだけを解とするように非線形方程式のパラメータを決定することに相当する。また、任意のベクトル集合が方程式の解集合として実現できるわけではないので、与えられたベクトルだけが解となるための何らかの条件を求めることも重要となってくる。これらの問題を、一般の相互結合型ニューラルネットワークについて議論することは極めて難しい。そこで、この問題に対する糸口を得るために、特殊な構造をもった回路、すなわち特殊な性質をもった行列  $W$  について考察することは意義がある。

本章では、連続系ニューラルネットワークの特殊な場合である完全対称相互結合型回路（詳しくは3.2節に述べる）に対して、2値ベクトルの集合が与えられたときに、それらだけを平衡点とするような回路の構成法を与える。取り扱う回路は、キャパシタ、区分線形特性をもつオペアンプ、線形回路網、直流電流源から構成される非線形回路網である。完全対称とは、連続系ニューラルネットワークの  $T$  に相当する行列が、すべての対角項が等しく、



かつすべての非対角項も等しい，という特殊な対称行列であることを意味する。

はじめに，オペアンプがすべて正相の場合，すべて逆相の場合のそれぞれについて，回路の平衡点集合の特徴付けを行い，次にその特徴を基にして，与えられた2値ベクトルだけが平衡点となるための条件を必要十分の形で与える。また，その必要十分条件が成り立つときの，最適な回路パラメータ値の決め方を示す。さらに，正相，逆相のオペアンプが混在する場合について，回路が大域的に安定であることを示し，すべての要素が飽和領域にある平衡点はオペアンプの極性に関わらず漸近安定であることを示す。

## 3.2 問題設定

図 3.1 に示す相互結合型回路について考察する。この回路は  $n$  個のキャパシタ， $n$  個の非線形オペアンプ， $n$  個の独立直流電流源， $2n$  端子対の線形回路網  $N$  から構成される。図 3.1 に示されるように，線形回路網  $N$  の  $k$  番目 ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) の端子対は  $k$  番目のオペアンプを通して  $N$  の  $k+n$  番目の端子対に接続されている。図 3.1 において， $i_{ak}$ ， $v_{ak}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) は線形回路網  $N$  の  $k$  番目の端子電流，電圧を表し， $C_k$  はキャパシタの容量を， $I_k$  は独立直流電流源の電流をそれぞれ表す。

図 3.1 の回路は以下の条件を満足していると仮定する。

仮定 3.1 キャパシタの容量はすべて等しい，すなわち，

$$C_1 = C_2 = \dots = C_n (= C)$$

仮定 3.2  $n$  個のオペアンプの入出力特性は極性を除いてすべて等しく，区分線形関数

$$f(x) = \frac{1}{2} (|\alpha x + 1| - |\alpha x - 1|) \quad (0 < \alpha < \infty)$$

で表されるとする。すなわち， $i$  番目のオペアンプの入出力関数を  $f_i(v_{ai})$  とすれば， $f_i(v_{ai}) = f(v_{ai})$  または  $f_i(v_{ai}) = -f(v_{ai})$  である。

図 3.2 に区分線形関数  $f(x)$  のグラフを示す。以後，区間  $(-\infty, -\frac{1}{\alpha}]$ ， $(-\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha})$ ， $[\frac{1}{\alpha}, \infty)$  をそれぞれ，負の飽和領域，線形領域，正の飽和領域とよぶことにする。

仮定 3.3 線形回路網  $N$  の  $s$  番目， $t$  番目， $n+s$  番目， $n+t$  番目 ( $1 \leq s, t \leq n$ ) の4つの端子対の非接地端子の間の結合は図 3.3 で表され，この結合は  $s, t$  の組合せに依らない。また，一般性を失うことなく  $y_b = y_c = 0$  とする。

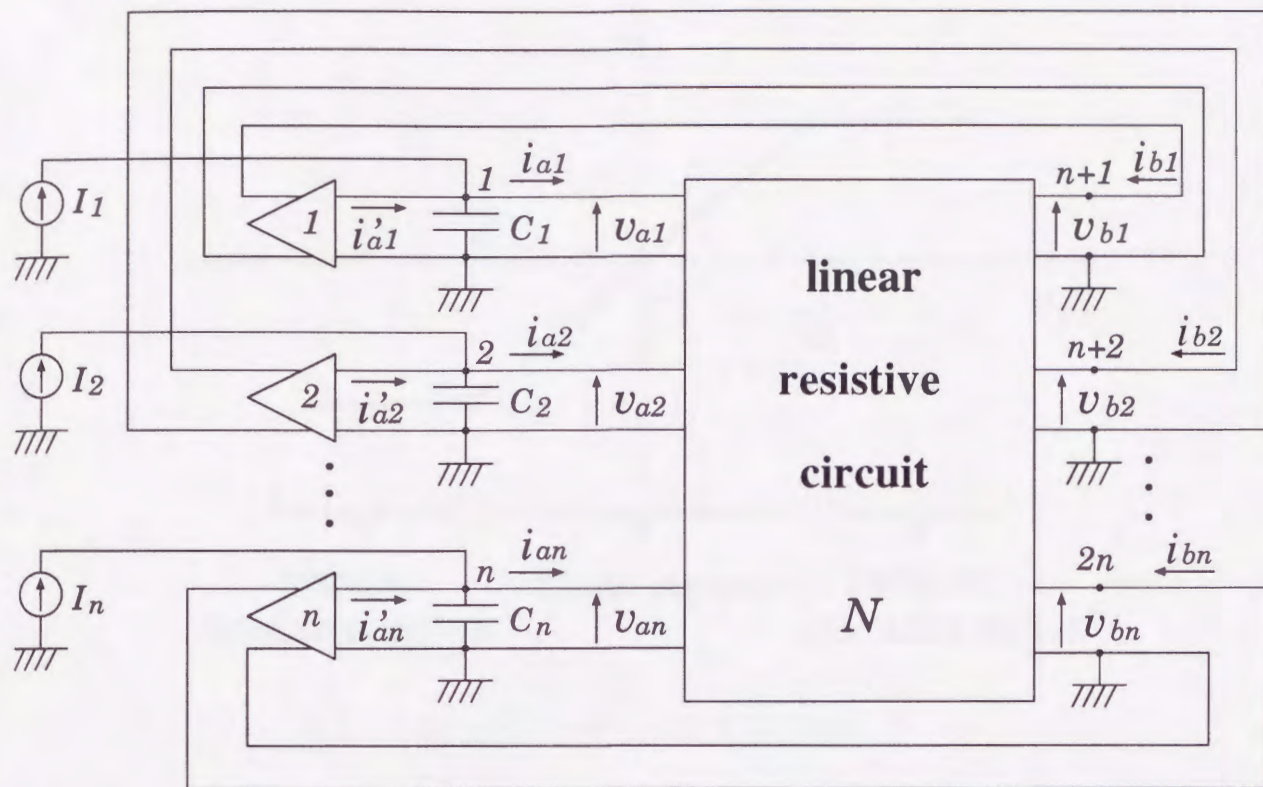


図 3.1: 相互結合型回路

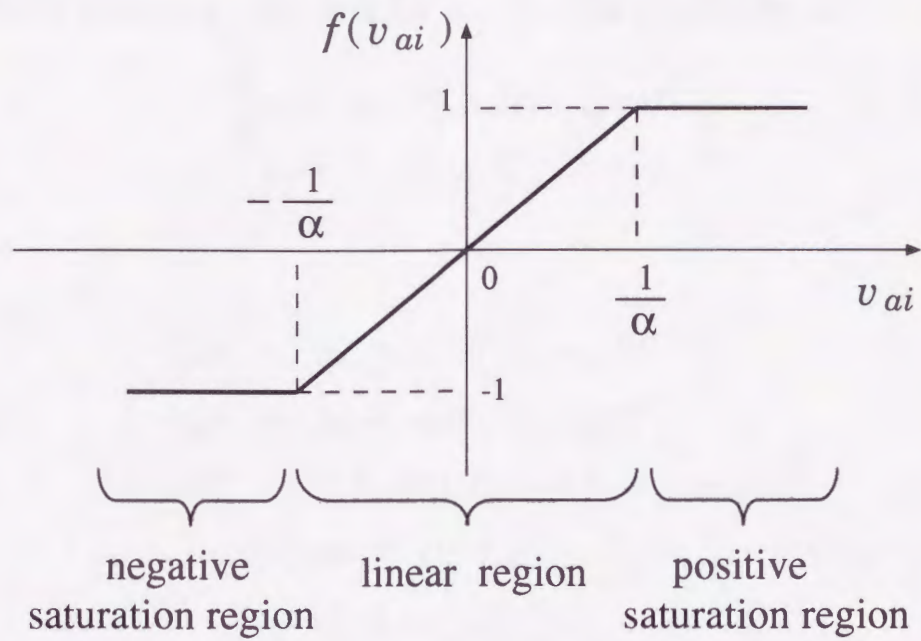


図 3.2: オペアンプの入出力特性

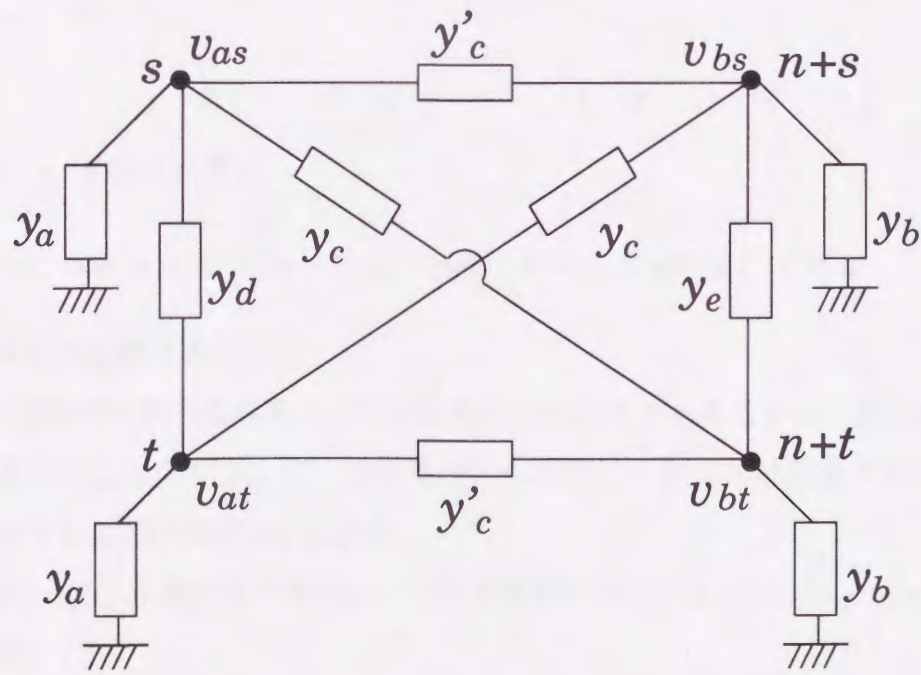


図 3.3: 線形回路網の端子  $s, t, n+s, n+t$  間に接続される抵抗

図 3.1 の回路が仮定 3.1 ~ 3.3 を満足するとき、回路方程式は次のようになる。

$$C \frac{d}{dt} v_a(t) = -Y_{aa} v_a(t) + Y_{ab} v_b(t) + I \quad (3.1)$$

$$v_b(t) = F(v_a(t)) \quad (3.2)$$

ただし、

$$v_a(t) = [v_{a1}(t), v_{a2}(t), \dots, v_{an}(t)]^T$$

$$v_b(t) = [v_{b1}(t), v_{b2}(t), \dots, v_{bn}(t)]^T$$

$$F(v_a(t)) = [f_1(v_{a1}(t)), f_2(v_{a2}(t)), \dots, f_n(v_{an}(t))]^T$$

$$C = \text{diag}[C, C, \dots, C]$$

$$I = [I_1, I_2, \dots, I_n]^T$$

であり、 $Y_{aa}$ ,  $Y_{ab}$  は次式で与えられる  $n$  次の正方行列である。

$$Y_{aa} = \begin{bmatrix} a & -b & \dots & -b \\ -b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b \\ -b & \dots & -b & a \end{bmatrix}, \quad Y_{ab} = \begin{bmatrix} -p & -q & \dots & -q \\ -q & -p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -q \\ -q & \dots & -q & -p \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

ここで  $a$ ,  $b$ ,  $p$ ,  $q$  はそれぞれ、

$$a = y_a + y'_c + (n-1)(y_c + y_d), \quad b = y_d, \quad p = y'_c, \quad q = y_c \quad (3.4)$$

で与えられる正の定数である。

図 3.1 の回路が一種の連続系ニューラルネットワークであることは、式 (3.1) から明らかである。行列  $Y_{aa}$  および  $Y_{ab}$  が、対角項がすべて等しくかつ非対角項がすべて等しいという特殊な形であるのは仮定 3.3 による。

この回路の  $v_a(t)$  に関する平衡点は、 $n$  次元実数ベクトル  $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$  に関する非線形方程式：

$$-Y_{aa}v + Y_{ab}F(v) + I = 0 \quad (0 \text{ は } n \text{ 次元零ベクトル}) \quad (3.5)$$

を解くことによって求められる。(3.5) 式は、両辺に  $Y_{aa}^{-1}$  を掛けることにより、

$$v = WF(v) + \hat{I} \quad (3.6)$$

と書き換えられる。ただし  $Y_{aa}^{-1}Y_{ab}$ ,  $Y_{aa}^{-1}I$  をそれぞれ  $W$ ,  $\hat{I}$  とおいた。(3.3) から  $W$  を計算すると次のようになる。

$$W = Y_{aa}^{-1}Y_{ab} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \cdots & \delta \\ \delta & \gamma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta \\ \delta & \cdots & \delta & \gamma \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

ただし,

$$\Delta = (a+b)\{a - (n-1)b\} \quad (3.8)$$

$$\gamma = \{a - (n-2)b\}p + (n-1)bq \quad (3.9)$$

$$\delta = (a+b)p \quad (3.10)$$

であり, (3.4) より  $\Delta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  はすべて正の定数である。

方程式 (3.6) の両辺に  $F(\cdot)$  を施して,  $x = F(v)$  とおくことにより

$$x = F(Wx + \hat{I}) \quad (3.11)$$

が得られる。 $v_b(t) = F(v_a(t))$  に関する平衡点集合は上の方程式の解集合である。図 3.1 のような相互結合型回路は一般に多数の平衡点を有するが, 連想記憶等への応用においては,  $|v_{bi}^*| = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) である平衡点  $v_b^*$  の集合が重要である。したがって以下では, 非線形方程式 (3.11) の解の中で  $|x_i| = 1$  であるものだけを考察の対象とする。

行列  $W$  の完全対称性により, 一般性を失うことなく,

$$\text{仮定 3.4} \quad \hat{I}_1 \leq \hat{I}_2 \leq \cdots \leq \hat{I}_n$$

と仮定する。また, 以下の議論の便宜上,

$$\text{仮定 3.5} \quad \hat{I}_0 = -\infty, \quad \hat{I}_{n+1} = +\infty$$

とする。

ここで, 本章における問題を以下にまとめる。

- (i)  $v_b(t)$  に関する平衡点集合, すなわち, 方程式 (3.11) の解集合にはどのような特徴があるか。

- (ii) 2値ベクトルの集合  $\Xi = \{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\}$  が与えられたときに, それらだけが  $(v_b(t)$  に関する) 平衡点となるように回路を構成することができるか否か.
- (iii) 回路は大域的に安定であるか.
- (iv)  $v_a(t)$  に関する平衡点はすべて漸近安定であるか.

以下の各節において, 上記の問題を順に考察する.

### 3.3 平衡点集合の特徴付け

本節では, 与えられた  $W$  および  $\hat{I}$  に対して, 方程式 (3.11) を満足する 2 値ベクトルの集合の特徴付けを行なう. 以下では, 方程式 (3.11) を満足する 2 値ベクトルの集合を  $E$  で表し, 次式によって  $E$  の部分集合  $E^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) を定義する.

$$E^{(m)} \equiv \{y \mid y \in E, N(y) = m\}$$

ただし,  $N(y)$  は 2 値ベクトル  $y$  において  $-1$  の値をとる要素の個数を表すとする.

#### 3.3.1 オペアンプがすべて正相の場合

ここではオペアンプがすべて正相の場合について考察する.

仮定 3.6  $f_1(\cdot) = f_2(\cdot) = \dots = f_n(\cdot) = f(\cdot)$

このとき, ある 2 値ベクトル  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は次式で与えられる.

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \gamma x_i + \delta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right\} + \hat{I}_i \begin{cases} \geq \frac{1}{\alpha} & (x_i = +1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\alpha} & (x_i = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.12)$$

上式を  $\hat{I}_i$  に関する不等式の形に書き直すと次のようになる.

$$\hat{I}_i \begin{cases} \geq -\frac{1}{\Delta} \left\{ \gamma x_i + \delta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right\} + \frac{1}{\alpha} & (x_i = +1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\Delta} \left\{ \gamma x_i + \delta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \right\} - \frac{1}{\alpha} & (x_i = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.13)$$

いま,  $x$  における  $-1$  の個数が  $m$  ( $N(x) = m$ ) であるとする. このとき, ある  $i$  に対して  $x_i = +1$  ならば,  $x_i$  以外の  $n-1$  個の要素には,  $+1$  の値をとるものが  $n-m-1$  個存在し,  $-1$  の値をとるものが  $m$  個存在するので,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j = n - 2m - 1$$

となる. また, ある  $i$  に対して  $x_i = -1$  ならば,  $x_i$  以外の  $n-1$  個の要素には  $+1$  の値をとるものが  $n-m$  個存在し,  $-1$  の値をとるものが  $m-1$  個存在するので,

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j = n - 2m + 1$$

となる. 以上のことから,  $x$  を  $N(x) = m$  であるような 2 値ベクトルに限定すれば, 不等式 (3.13) は次のように書き換えられる.

$$\hat{I}_i \begin{cases} \geq -\frac{1}{\Delta}\{+\gamma + (n-2m-1)\delta\} + \frac{1}{\alpha} & (x_i = +1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\Delta}\{-\gamma + (n-2m+1)\delta\} - \frac{1}{\alpha} & (x_i = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.14)$$

上式において,  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha, n$  はすべて定数であるので, 右辺は  $m$  の関数とみなすことができる. 以下では, (3.14) の右辺を次のように  $P(m)$  および  $Q(m)$  とおく.

$$P(m) \equiv -\frac{1}{\Delta}\{+\gamma + (n-2m-1)\delta\} + \frac{1}{\alpha} \quad (3.15)$$

$$Q(m) \equiv -\frac{1}{\Delta}\{-\gamma + (n-2m+1)\delta\} - \frac{1}{\alpha} \quad (3.16)$$

これらの定義式よりただちに以下の関係式が得られる.

$$P(m+1) - P(m) = \frac{2\delta}{\Delta} > 0 \quad (3.17)$$

$$Q(m+1) - Q(m) = \frac{2\delta}{\Delta} > 0 \quad (3.18)$$

不等式 (3.14) を  $P(m)$ ,  $Q(m)$  を用いて書き直すことにより次の補題を得る.

**補題 3.1** 与えられた 2 値ベクトル  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は, 次式が成り立つことである.

$$\hat{I}_i \begin{cases} \geq P(m) & (x_i = +1 \text{ のとき}) \\ \leq Q(m) & (x_i = -1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.19)$$

補題 3.1 と仮定 3.4 から次の補題を得る.

補題 3.2 2 値ベクトル  $x$  (ただし,  $N(x) = m$ ) が与えられたとき,  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は, 次の 2 つの不等式が成立することである.

$$\hat{I}_{\min\{i \mid x_i = +1\}} \geq P(m) \quad (3.20)$$

$$\hat{I}_{\max\{i \mid x_i = -1\}} \leq Q(m) \quad (3.21)$$

証明: 仮定 3.4 より,  $\hat{I}_{i_1} \geq P(m)$  ならば,  $i > i_1$  であるすべての  $i$  に対して  $\hat{I}_i \geq P(m)$  が自動的に成り立ち,  $\hat{I}_{i_2} \leq Q(m)$  ならば,  $i < i_2$  であるすべての  $i$  に対して  $\hat{I}_i \leq Q(m)$  が自動的に成り立つ. したがって, (3.19) の  $n$  個の不等式すべてが成り立つための必要十分条件は,  $\hat{I}_i \geq P(m)$  の形の不等式の中で  $i$  が最小であるものと,  $\hat{I}_i \leq Q(m)$  の形の不等式の中で  $i$  が最大のもので成り立つことである. これらの 2 つの不等式はそれぞれ (3.20), (3.21) の形で表される. ■

ここで, 条件 (3.20) および (3.21) をより簡潔に表すために, 次式によって整数  $i_p(m)$ ,  $i_q(m)$  を定義する.

$$i_p(m) \equiv \min\{i \mid \hat{I}_i \geq P(m)\} \quad (3.22)$$

$$i_q(m) \equiv \max\{i \mid \hat{I}_i \leq Q(m)\} \quad (3.23)$$

仮定 3.5 に注意すれば,  $i_p(m)$  は 1 から  $n+1$  までのいずれかの値をとり,  $i_q(m)$  は 0 から  $n$  までのいずれかの値をとる.

上の定義と仮定 3.4 から,  $\hat{I}_i \geq P(m)$  が成立するのは  $i \geq i_p(m)$  のときかつそのときに限られ,  $\hat{I}_i \leq Q(m)$  が成立するのは  $i \leq i_q(m)$  のときかつそのときに限られる. このことより補題 3.2 は次のように書き換えられる.

補題 3.3 2 値ベクトル  $x$  (ただし,  $N(x) = m$ ) が与えられたとき,  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は, 次の 2 つの不等式がともに成立することである.

$$\min\{i \mid x_i = +1\} \geq i_p(m) \quad (3.24)$$

$$\max\{i \mid x_i = -1\} \leq i_q(m) \quad (3.25)$$

ただし,  $i_p(m)$ ,  $i_q(m)$  はそれぞれ (3.22), (3.23) で求まる整数である. ■

補題 3.3 より,  $E^{(m)}$  は  $N(x) = m$  であり, かつ条件 (3.24), (3.25) を満足する 2 値ベクトル  $x$  の集合であるといえる. 以下に示すいくつかの例において, 補題 3.3 を利用して  $E^{(m)}$  を求めてみる.



例 3.1 方程式パラメータが次のように与えられているとする。

$$n = 6, \Delta = 1.0, \gamma = 3.0, \delta = 1.0, \alpha = 1.0$$

$$\hat{I} = [-2.0, -1.5, -0.5, 0.0, 0.5, 3.0]^T$$

このとき,  $E^{(3)}$  を求める. 上記のパラメータと  $m = 3$  を (3.15) および (3.16) に代入して,  $P(3) = -1.0, Q(3) = 1.0$  を得るので,  $P(3), Q(3)$  と  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係は図 3.4 のようになる.

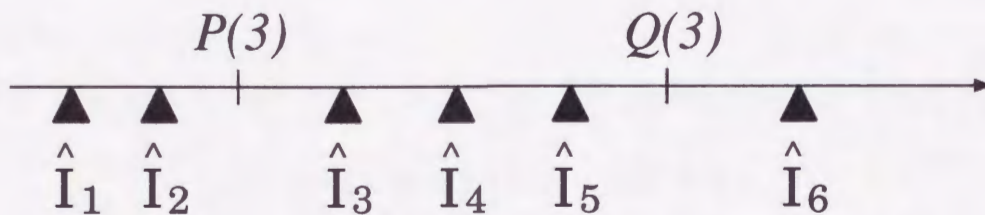


図 3.4:  $P(3), Q(3), \hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係 (例 3.1)

図 3.4 から  $i_p(3) = 3, i_q(3) = 5$  であるので, 条件 (3.24), (3.25) はそれぞれ,

$$\min\{i \mid x_i = +1\} \geq i_p(3) = 3 \tag{3.26}$$

$$\max\{i \mid x_i = -1\} \leq i_q(3) = 5 \tag{3.27}$$

となる. 条件 (3.26) は  $x_1 = x_2 = -1$  でなければならないことを意味し, 条件 (3.27) は  $x_6 = +1$  でなければならないことを意味している. すべての 6 次元 2 値ベクトルのなかで,  $-1$  の個数が 3 であり, かつ条件 (3.26), (3.27) を満たすものは次の 3 つである.

$$[-1, -1, -1, +1, +1, +1]^T$$

$$[-1, -1, +1, -1, +1, +1]^T$$

$$[-1, -1, +1, +1, -1, +1]^T$$

したがって,  $E^{(3)}$  はこれらの 3 個の 2 値ベクトルからなる集合である.

例 3.2 方程式パラメータ  $n, \Delta, \gamma, \delta, \alpha$  の値は例 3.1 の場合と同じであるとし,  $\hat{I}$  が

$$\hat{I} = [-3.0, -2.0, -1.5, -0.5, 0.5, 0.8]^T$$

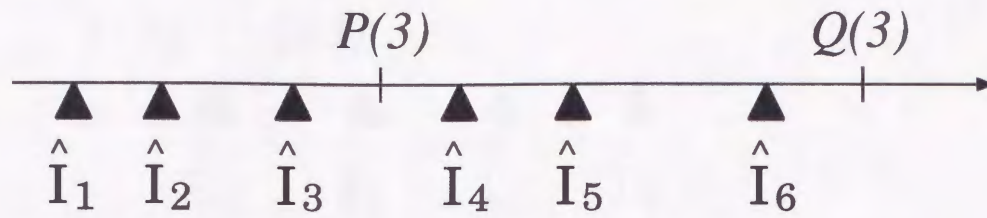


図 3.5:  $P(3), Q(3), \hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係 (例 3.2)

で与えられるときの  $E^{(3)}$  を求める.  $P(3), Q(3)$  と  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係は図 3.5 のようになる.

図 3.5 から  $i_p(3) = 4, i_q(3) = 6$  であるので, 条件 (3.24), (3.25) はそれぞれ,

$$\min\{i \mid x_i = +1\} \geq i_p(3) = 4 \quad (3.28)$$

$$\max\{i \mid x_i = -1\} \leq i_q(3) = 6 \quad (3.29)$$

となる. 条件 (3.28) は  $x_1 = x_2 = x_3 = -1$  でなければならないことを意味する.  $-1$  の個数が 3 であるすべての 2 値ベクトルのなかで,  $x_1 = x_2 = x_3 = -1$  を満足するものは

$$-1, -1, -1, +1, +1, +1]^T$$

だけである. また, このベクトルは条件 (3.29) を満足する. したがって,  $E^{(3)}$  は上記のベクトルだけからなる集合である.

例 3.3 方程式パラメータ  $n, \Delta, \gamma, \delta, \alpha$  の値は例 3.1 の場合と同じであるとし,  $\hat{I}$  が

$$\hat{I} = [-2.0, -0.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0]^T$$

で与えられるときの  $E^{(3)}$  を求める.  $P(3), Q(3)$  と  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係は図 3.6 のようになる.

図 3.6 から  $i_p(3) = 2, i_q(3) = 2$  であるので, 条件 (3.24), (3.25) はそれぞれ,

$$\min\{i \mid x_i = +1\} \geq i_p(3) = 2 \quad (3.30)$$

$$\max\{i \mid x_i = -1\} \leq i_q(3) = 2 \quad (3.31)$$

となる. 条件 (3.31) は  $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = +1$  でなければならないことを意味する.  $-1$  の個数が 3 である (すなわち  $+1$  の個数が 3 である) すべての 6 次元 2 値ベクトル  $x$  のなかで, (3.31) を満足するものは存在しない. したがって,  $E^{(3)}$  は空集合である.

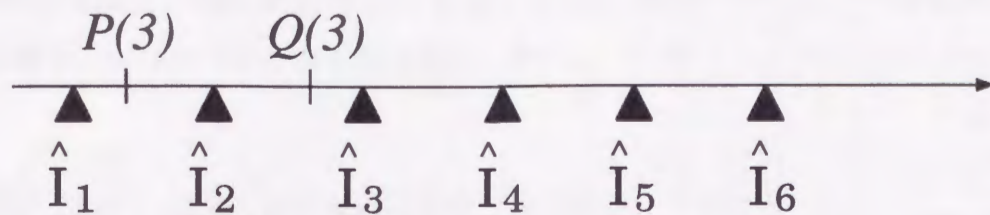


図 3.6:  $P(3), Q(3), \hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  の大小関係 (例 3.3)

例 3.1 ~ 3.3 に示したように,  $E^{(m)}$  は  $P(m), Q(m)$  と  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  の大小関係によって (i) 複数個のベクトルからなる, (ii) ただ 1 つのベクトルからなる, (iii) 空集合, の 3 つの場合に分けられる. 以下では, (i) の場合には, “ $E^{(m)}$  は複数型である” といい, (ii) の場合には “ $E^{(m)}$  は単数型である” という. 次に示す定理 3.1 によって,  $E^{(m)}$  が複数型, 単数型, 空集合であるための条件を明らかにする.

定理 3.1 集合  $E^{(m)}$  は,  $i_p(m)$  および  $i_q(m)$  の値によって次のように分類される.

$$i_p(m) \leq m + 1 \tag{3.32}$$

$$i_q(m) \geq m \tag{3.33}$$

(i) 不等式 (3.32), (3.33) がともに不等号で成り立つとき, 集合  $E^{(m)}$  は複数型であり, 次のように表される.

$$E^{(m)} = \left\{ \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて } -1}, \underbrace{[\pm 1, \dots, \pm 1]}_{\text{すべて } \pm 1}, \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて } +1} \right\}^T \tag{3.34}$$

ただし,  $\pm 1, \dots, \pm 1$  は  $-1$  の個数が全部で  $m$  になるあらゆる組合せをとることを意味する.

(ii) 不等式 (3.32), (3.33) がともに成り立ち, かつ少なくとも 1 つは等号で成り立つとき,  $E^{(m)}$  は単数型であり,

$$E^{(m)} = \left\{ \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて } -1}, \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて } +1} \right\}^T \tag{3.35}$$

と表される.

- (iii) 不等式 (3.32), (3.33) の少なくとも 1 つが成立しないとき,  $E^{(m)}$  は空集合である.  
すなわち,  $N(x) = m$  となる解は存在しない. ■

証明:

- (i) 不等式 (3.32), (3.33) がともに不等号で成り立つ, すなわち

$$i_p(m) \leq m \quad (3.36)$$

$$i_q(m) \geq m+1 \quad (3.37)$$

とする. このとき, 2 値ベクトル

$$x^{(1)} = \underbrace{[-1, \dots, -1, \overset{i_p(m)}{-1}, \dots, \overset{m}{-1}, \overset{m+1}{+1}, \dots, \overset{i_q(m)}{+1}, \dots, +1]}_{\text{すべて } -1} \underbrace{+1, \dots, +1, \dots, +1}_{\text{すべて } +1}^T$$

は,

$$N(x^{(1)}) = m \quad (3.38)$$

$$\min\{i \mid x_i^{(1)} = +1\} \geq i_p(m) \quad (3.39)$$

$$\max\{i \mid x_i^{(1)} = -1\} \leq i_q(m) \quad (3.40)$$

を満足するので, 補題 3.3 より  $x^{(1)} \in E^{(m)}$  である. また  $x^{(1)}$  において, 第  $i_p(m)$  要素から第  $i_q(m)$  要素までにある  $+1$  と  $-1$  ( $+1$ ,  $-1$  は少なくとも 1 つずつは存在する) をどのように並び変えても, やはり (3.38), (3.39), (3.40) が成り立つ. したがって,  $E^{(m)}$  は (3.34) で表される.

- (ii) 不等式 (3.32) が等号で成り立つ, すなわち,

$$i_p(m) = m+1$$

とする. このとき,  $N(x) = m$  である  $x$  のなかで, 補題 3.3 の条件 (3.24) を満足するものは

$$x^{(1)} = \underbrace{[-1, \dots, \overset{m}{-1}, \overset{m+1}{+1}, \dots, +1]}_{\text{すべて } -1} \underbrace{+1, \dots, +1}_{\text{すべて } +1}^T$$

ただ 1 つである. また (3.33) が成り立っているならば,

$$\max\{i \mid x_i^{(1)} = -1\} \leq i_q(m)$$

が成り立つので,  $x^{(1)}$  は補題 3.3 の条件 (3.25) を満足する. したがって,  $E^{(m)}$  は  $x^{(1)}$  のみからなる集合である. 不等式 (3.33) が等号で成り立つ場合にも同様に証明できる.

(iii) 不等式 (3.32) が成立しない, すなわち

$$i_p(m) \geq m + 2$$

とする. このとき,  $N(x) = m$  である  $x$  が補題 3.3 の条件 (3.24) を満足するためには, 少なくとも

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{m+1} = -1$$

でなければならない. しかし, これは  $N(x) = m$  と矛盾する. したがって,  $E^{(m)}$  は空集合である. 不等式 (3.33) が成立しない場合にも同様に証明できる.

例 3.4 方程式 (3.11) のパラメータが,

$$n = 5, \Delta = 1.0, \gamma = 2.5, \delta = 1.0, \alpha = 1.0$$

$$\hat{I} = [-3.0, 1.0, 1.0, 1.0, 5.0]^T$$

で与えられたときの  $E^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) を求める. このとき, (3.15) および (3.16) より

$$P(m) = 2m - 5.5 \quad (m = 0, 1, \dots, 5)$$

$$Q(m) = 2m - 4.5 \quad (m = 0, 1, \dots, 5)$$

である.  $P(m), Q(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, 5$ ) と  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) の大小関係は図 3.7 のようになる.

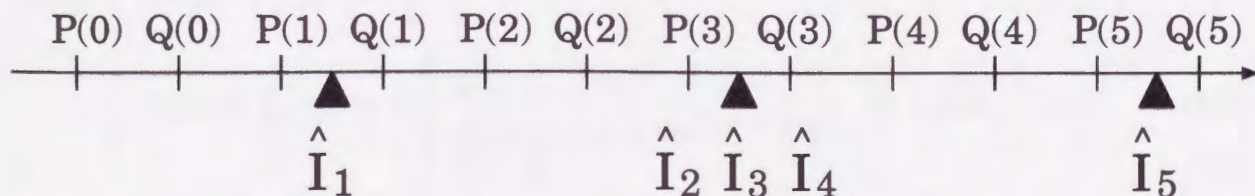


図 3.7:  $P(m), Q(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, 5$ ) と  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) の大小関係 (例 3.4)

図 3.7 から  $i_p(m), i_q(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, 5$ ) を求めると, 表 3.1 が得られる. 表 3.1 および定理 3.1 より,  $E^{(3)}$  は複数型,  $E^{(0)}, E^{(1)}, E^{(4)}, E^{(5)}$  は単数型,  $E^{(2)}$  は空集合であることが簡単に分かる. 具体的には,

$$E^{(0)} = \{ [+1, +1, +1, +1, +1]^T \}$$

$m$	0	1	2	3	4	5
$i_p(m)$	1	1	2	2	5	5
$i_q(m)$	0	1	1	4	4	5

表 3.1: 例 3.4 の方程式パラメータに対する  $i_p(m)$ ,  $i_q(m)$  の値.

$$E^{(1)} = \{ [-1, +1, +1, +1, +1]^T \}$$

$$E^{(2)} = \emptyset$$

$$E^{(3)} = \{ [-1, +1, -1, -1, +1]^T, [-1, -1, +1, -1, +1]^T, [-1, -1, -1, +1, +1]^T \}$$

$$E^{(4)} = \{ [-1, -1, -1, -1, +1]^T \}$$

$$E^{(5)} = \{ [-1, -1, -1, -1, -1]^T \}$$

である.

### 3.3.2 オペアンプがすべて逆相の場合

ここでは, オペアンプがすべて逆相, すなわち,

$$\text{仮定 3.7} \quad f_1(\cdot) = f_2(\cdot) = \cdots = f_n(\cdot) = -f(\cdot)$$

の場合について考察する. このとき, ある 2 値ベクトル  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は,

$$\frac{1}{\Delta} \left\{ \begin{array}{l} \geq \frac{1}{\alpha} \quad (x_i = -1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\alpha} \quad (x_i = +1 \text{ のとき}) \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.41)$$

が成り立つことである. これを  $\hat{I}_i$  に関する不等式の形に書き直すと次のようになる.

$$\hat{I}_i \left\{ \begin{array}{l} \geq -\frac{1}{\Delta} \{ \gamma x_i + \delta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \} + \frac{1}{\alpha} \quad (x_i = -1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\Delta} \{ \gamma x_i + \delta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j \} - \frac{1}{\alpha} \quad (x_i = +1 \text{ のとき}) \end{array} \right. \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.42)$$

2 値ベクトル  $x$  における  $-1$  の個数を  $m$  とする. このとき,  $x_i = -1$  ならば

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j = n - 2m + 1$$

となり,  $x_i = +1$  ならば

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_j = n - 2m - 1$$

となる. したがって,  $x$  を  $N(x) = m$  であるような 2 値ベクトルに限定すれば, 不等式 (3.42) は次のように書き換えられる.

$$\hat{I}_i \begin{cases} \geq -\frac{1}{\Delta}\{-\gamma + (n - 2m + 1)\delta\} + \frac{1}{\alpha} & (x_i = -1 \text{ のとき}) \\ \leq -\frac{1}{\Delta}\{+\gamma + (n - 2m - 1)\delta\} - \frac{1}{\alpha} & (x_i = +1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.43)$$

オペアンプがすべて正相の場合と同様に, 上式の右辺を  $m$  の関数とみなし, 次のように  $R(m)$  および  $S(m)$  とおく.

$$R(m) \equiv -\frac{1}{\Delta}\{-\gamma + (n - 2m + 1)\delta\} + \frac{1}{\alpha} \quad (3.44)$$

$$S(m) \equiv -\frac{1}{\Delta}\{+\gamma + (n - 2m - 1)\delta\} - \frac{1}{\alpha} \quad (3.45)$$

これらの定義式よりただちに以下の関係式が得られる.

$$R(m+1) - R(m) = \frac{2\delta}{\Delta} > 0 \quad (3.46)$$

$$S(m+1) - S(m) = \frac{2\delta}{\Delta} > 0 \quad (3.47)$$

$$R(m+1) - S(m) = \frac{2\gamma}{\Delta} + \frac{2}{\alpha} > 0 \quad (3.48)$$

オペアンプがすべて正相の場合と同様にして, 次の補題 3.4 および定理 3.2 を得る.

**補題 3.4** 2 値ベクトル  $x$  (ただし,  $N(x) = m$ ) が与えられたとき,  $x$  が方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は, 次の 2 つの不等式がともに成立することである.

$$\min\{i \mid x_i = -1\} \geq i_r(m) \quad (3.49)$$

$$\max\{i \mid x_i = +1\} \leq i_s(m) \quad (3.50)$$

ただし,  $i_r(m)$ ,  $i_s(m)$  はそれぞれ,

$$i_r(m) \equiv \min\{i \mid \hat{I}_i \geq R(m)\} \quad (3.51)$$

$$i_s(m) \equiv \max\{i \mid \hat{I}_i \leq S(m)\} \quad (3.52)$$

で定義される整数である. ■

定理 3.2 集合  $E^{(m)}$  は  $i_r(m)$  および  $i_s(m)$  の値によって次のように分類される.

$$i_r(m) \leq n - m + 1 \quad (3.53)$$

$$i_s(m) \geq n - m \quad (3.54)$$

- (i) 不等式 (3.53), (3.54) がともに不等式で成り立つとき, 集合  $E^{(m)}$  は複数型であり, 次のように表される.

$$E^{(m)} = \left\{ \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて} +1}, \underbrace{[\pm 1, \dots, \pm 1]}_{\text{すべて} \pm 1}, \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて} -1} \right\}^T \quad (3.55)$$

ただし,  $\pm 1, \dots, \pm 1$  は  $-1$  の個数が全部で  $m$  になるあらゆる組合せをとることを意味する.

- (ii) 不等式 (3.53), (3.54) がともに成り立ち, かつ少なくとも一つは等号で成り立つとき,  $E^{(m)}$  は単数型であり,

$$E^{(m)} = \left\{ \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて} +1}, \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて} -1} \right\}^T \quad (3.56)$$

と表される.

- (iii) 不等式 (3.53), (3.54) の少なくとも一つが成立しないとき,  $E^{(m)}$  は空集合である. すなわち,  $N(x) = m$  となる解は存在しない. ■

定理 3.2 により,  $E^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) のそれぞれは,  $+1$  と  $-1$  が入れ替わっていることを除けば, オペアンプがすべて正相の場合とほとんど同じ特徴をもつといえる. ところが, 次の補題で示すように, 方程式 (3.11) の解集合全体 ( $E = \bigcup_{m=0}^n E^{(m)}$ ) については, オペアンプがすべて正相の場合とは全く異なる特徴をもつ.

補題 3.5 集合  $E^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) のうちの1つが空集合でないならば, 残りはすべて空集合である.

証明: いま  $E^{(m^*)} \neq \emptyset$  であるとすれば, 定理 3.2 より,

$$i_r(m^*) \leq n - m^* + 1 \quad (3.57)$$

$$i_s(m^*) \geq n - m^* \quad (3.58)$$



がともに成り立つ。このとき、 $m \geq m^* + 1$  であるすべての  $m$  に対して (3.53) が成り立たず、 $m \leq m^* - 1$  であるすべての  $m$  に対して (3.54) が成り立たないことを示す。

(3.48) および  $i_r(m)$ ,  $i_s(m)$  の定義より、いかなる方程式パラメータに対しても

$$i_r(m+1) > i_s(m) \quad (m = 0, 1, \dots, n-1) \quad (3.59)$$

が成り立つことに注意すると、 $m \geq m^* + 1$  であるすべての  $m$  について

$$\begin{aligned} i_r(m) &> i_s(m-1) && (\Leftarrow (3.59)) \\ &\geq i_s(m^*) && (\Leftarrow m \geq m^* + 1) \\ &\geq n - m^* && (\Leftarrow (3.58)) \\ &\geq n - m + 1 && (\Leftarrow m \geq m^* + 1) \end{aligned}$$

が成り立ち、 $m \leq m^* - 1$  であるすべての  $m$  について

$$\begin{aligned} i_s(m) &< i_r(m+1) && (\Leftarrow (3.59)) \\ &\leq i_r(m^*) && (\Leftarrow m \leq m^* - 1) \\ &\leq n - m^* + 1 && (\Leftarrow (3.57)) \\ &\leq n - m && (\Leftarrow m \leq m^* - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって定理 3.2 より  $m^*$  以外のすべての  $m$  に対して  $E^{(m)} = \emptyset$  である。 ■

例 3.5 方程式 (3.11) のパラメータが、

$$n = 5, \Delta = 1.0, \gamma = 0.5, \delta = 2.0, \alpha = 2.0$$

$$\hat{I} = [-6.0, -2.0, -2.0, -2.0, 6.0]^T$$

で与えられたとする。このとき、(3.44) および (3.45) より、

$$R(m) = 4m - 11 \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

$$S(m) = 4m - 9 \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

である。  $R(m)$ ,  $S(m)$  と  $\hat{I}_i$  の大小関係は図 3.8 のようになる。図 3.8 から  $i_r(m)$ ,  $i_s(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, 5$ ) を求めると、表 3.2 のようになる。表 3.2 および定理 3.2 より、

$$\begin{aligned} E^{(2)} &= \{ [+1, +1, +1, -1, -1]^T, [+1, +1, -1, +1, -1]^T, [+1, -1, +1, +1, -1]^T \} \\ &= \{ [+1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, -1]^T \} \end{aligned}$$

であり、残りの  $E^{(0)}$ ,  $E^{(1)}$ ,  $E^{(3)}$ ,  $E^{(4)}$ ,  $E^{(5)}$  はすべて空集合である。

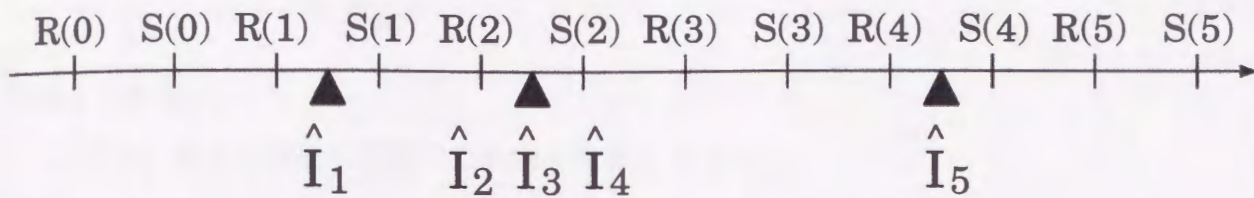


図 3.8:  $R(m), S(m)$  と  $\hat{I}_i$  の大小関係 (例 3.5)

$m$	0	1	2	3	4	5
$i_r(m)$	1	1	2	5	5	6
$i_s(m)$	0	1	4	4	5	5

表 3.2: 例 3.5 の方程式パラメータに対する  $i_r(m), i_s(m)$  の値.

### 3.4 所望平衡点集合の実現条件

本節では、オペアンプがすべて正相の場合とすべて逆相の場合のそれぞれについて、2値ベクトル  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  が与えられたときに、それらだけが  $(v_b(t))$  に関する平衡点となるように回路を構成することができるか否かを判定する問題を扱う。この問題は、 $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  だけが方程式：

$$x = F(Wx + \hat{I})$$

ただし、

$$W = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma & \delta & \dots & \delta \\ \delta & \gamma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \delta \\ \delta & \dots & \delta & \gamma \end{bmatrix}$$

の解となるような正の実数  $y_a, y_c, y'_c, y_d, \alpha$  および実数  $I_i (i = 1, 2, \dots, n)$  が存在するか否かの判定に帰着される。方程式 (3.11) のパラメータ  $\Delta, \gamma, \delta, \hat{I}$  と回路パラメータ  $y_a, y_c, y'_c, y_d, I$  の関係は、(3.3), (3.4) および (3.8)~(3.10) より、

$$\Delta = \{y_a + (n-1)y_c + y'_c + ny_d\} \{y_a + (n-1)y_c + y'_c\} \quad (3.60)$$

$$\gamma = y'_c \{y_a + (n-1)y_c + y'_c + y_d\} + (n-1)y'_c y_d \quad (3.61)$$

$$\delta = y'_c \{y_a + (n-1)y_c + y'_c + ny_d\} \quad (3.62)$$

$$\hat{I} = Y_{aa}^{-1}I \quad (3.63)$$

で与えられる。

ここで、以下の議論の準備のため次の定義を与える。

**定義 3.1** 方程式 (3.11) のパラメータ  $\Delta, \gamma, \delta$  を独立変数とみなし、与えられた 2 値ベクトル  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  だけを方程式 (3.11) の解とする正数  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha$  および実数ベクトル  $\hat{I}$  (ただし  $\hat{I}_1 \leq \hat{I}_2 \leq \dots \leq \hat{I}_n$ ) が存在するとき、 $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  は“代数的に実現可能である”という。

**定義 3.2** 与えられた  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  だけを方程式 (3.11) の解とする正数  $y_a, y_c, y'_c, y_d$  および実数ベクトル  $I$  が存在するとき、 $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  は“物理的に実現可能である”という。

$\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  が物理的に実現可能であることは、 $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  だけを ( $v_b(t)$  に関する) 平衡点にするように回路を構成することができることを意味する。また、上の定義より、与えられた 2 値ベクトル  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  が物理的に実現可能であれば明らかに代数的に実現可能であるが、その逆は一般には成り立たない。以下では、オペアンプがすべて正相の場合とすべて逆相の場合のそれぞれについて、まず  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p$  が代数的に実現可能であるための必要十分条件を求め、次に代数的に実現可能ならば物理的にも実現可能であることを示す。

以下では、所望の平衡点集合  $\{\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\}$  を  $\Xi$  で表し、さらに

$$\Xi^{(m)} \equiv \{\xi \mid \xi \in \Xi, N(\xi) = m\} \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

と定義する。

### 3.4.1 オペアンプがすべて正相の場合

定理 3.1 より、 $\Xi$  が代数的に実現可能であるためには、 $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) はすべて、

$$\Xi^{(m)} = \left\{ \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて } -1}^{l_1(m)}, \underbrace{[\pm 1, \dots, \pm 1]}_{\text{すべて } \pm 1}, \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて } +1}^{l_2(m)} \right\}^T \quad (3.64)$$

$$\Xi^{(m)} = \left\{ \underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて } -1}^m, \underbrace{[+1, \dots, +1]}_{\text{すべて } +1}^{m+1} \right\}^T \quad (3.65)$$

$$\Xi^{(m)} = \emptyset \quad (3.66)$$

のいずれかでなければならない。ただし、(3.64) の  $l_1(m)$  および  $l_2(m)$  は

$$0 \leq l_1(m) \leq m-1 \quad (3.67)$$

$$m+2 \leq l_2(m) \leq n+1 \quad (3.68)$$

を満足する。以下では  $\Xi^{(m)}$  ( $m=0,1,\dots,n$ ) はすべて (3.64), (3.65), (3.66) のいずれかでないと仮定する。 $\Xi^{(m)}$  が (3.64) で与えられるとき、“ $\Xi^{(m)}$  は複数型である” といい、(3.65) で与えられるとき、“ $\Xi^{(m)}$  は単数型である” という。明らかに  $\Xi^{(0)}$  および  $\Xi^{(n)}$  が複数型であることはない。

$\Xi^{(m)}$  が複数型であるときには、 $\Xi^{(m)}$  は  $l_1(m)$ ,  $l_2(m)$  によって完全に決定されるが、以下では  $\Xi^{(m)}$  が単数型、空集合のときにも、

$$\begin{cases} l_1(m) = m \\ l_2(m) = m+1 \end{cases} \quad (\Xi^{(m)} \text{ が単数型のとき})$$

$$\begin{cases} l_1(m) = m+1 \\ l_2(m) = m \end{cases} \quad (\Xi^{(m)} \text{ が空集合のとき})$$

と定義して、 $\Xi^{(m)}$  ( $m=0,1,\dots,n$ ) を  $l_1(m)$  および  $l_2(m)$  ( $m=0,1,\dots,n$ ) によって表現する。

例 3.6  $n=8$  とし、所望平衡点集合  $\Xi$  が次のように与えられたとする。

$$\Xi^{(0)} = \{ [+1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(1)} = \emptyset$$

$$\Xi^{(2)} = \{ [-1, -1, +1, +1, +1, +1, +1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(3)} = \{ [-1, -1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, +1, +1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(4)} = \{ [-1, -1, -1, \pm 1, \pm 1, +1, +1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(5)} = \{ [-1, -1, -1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(6)} = \{ [-1, -1, -1, -1, -1, -1, +1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(7)} = \{ [-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, +1]^T \}$$

$$\Xi^{(8)} = \{ [-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1]^T \}$$

$\Xi^{(3)}$ ,  $\Xi^{(4)}$ ,  $\Xi^{(5)}$  は複数型であり、 $\Xi^{(0)}$ ,  $\Xi^{(2)}$ ,  $\Xi^{(6)}$ ,  $\Xi^{(7)}$ ,  $\Xi^{(8)}$  は単数型である。この  $\Xi$  は、表 3.3 に示す  $l_1(m)$ ,  $l_2(m)$  ( $m=0,1,\dots,8$ ) によって完全に特徴付けられる。

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$l_1(m)$	0	2	2	2	3	3	6	7	8
$l_2(m)$	1	1	3	6	6	8	7	8	9

表 3.3:  $\Xi$  から得られる  $l_1(m)$  および  $l_2(m)$  の値 (例 3.6)

定理 3.1 から次の補題を得る.

補題 3.6  $\Xi$  が代数的に実現可能であるための必要十分条件は, すべての  $m (= 0, 1, \dots, n)$  に対して以下の条件を満足するような正の実数  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha$  および実数  $\hat{I}_i$  (ただし,  $\hat{I}_1 \leq \hat{I}_2 \leq \dots \leq \hat{I}_n$ ) が存在することである.

- (i)  $\Xi^{(m)}$  が複数量ならば (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  のすべてが成り立つ.
- (ii)  $\Xi^{(m)}$  が単数量ならば (A), (B) がともに成り立ち, かつ  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  の少なくとも 1 つが成り立つ.
- (iii)  $\Xi^{(m)}$  が空集合ならば  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  の少なくとも 1 つが成り立つ.

$$(A) \quad \hat{I}_{l_1(m)+1} \geq P(m)$$

$$(B) \quad \hat{I}_{l_2(m)-1} \leq Q(m)$$

$$(\Gamma_1) \quad \hat{I}_{l_1(m)} < P(m)$$

$$(\Gamma_2) \quad \hat{I}_{l_2(m)} > Q(m)$$

証明: 定理 3.1 の条件 (3.32), (3.33) を利用する.

- (i)  $N(x) = m$  であるすべての  $x$  のうち,

$$\underbrace{[-1, \dots, -1]}_{\text{すべて } -1}^{\quad l_1(m)} \underbrace{, \pm 1, \dots, \pm 1}_{\text{すべて } \pm 1}^{\quad l_2(m)} \underbrace{, +1, \dots, +1}_{\text{すべて } +1}^T$$

( $\pm 1, \dots, \pm 1$  は  $-1$  の個数が全部で  $m$  になるあらゆる組合せをとる)

だけが方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は,

$$i_p(m) = l_1(m) + 1$$

$$i_q(m) = l_2(m) - 1$$

がともに成り立つことである。  $i_p(m)$ ,  $i_q(m)$  の定義よりこれらの条件はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \hat{I}_{l_1(m)} < P(m) &\leq \hat{I}_{l_1(m)+1} \\ \hat{I}_{l_2(m)-1} &\leq Q(m) < \hat{I}_{l_2(m)} \end{aligned}$$

と等価である。

(ii)  $N(x) = m$  であるすべての  $x$  のうち,

$$\underbrace{[-1, \dots, -1]_{m}}_{\text{すべて } -1}, \underbrace{[+1, \dots, +1]_{m+1}}_{\text{すべて } +1}]^T$$

だけが方程式 (3.11) の解であるための必要十分条件は, 定理 3.1 の条件 (3.32), (3.33) がともに成り立ち, かつ少なくとも 1 つは等号で成り立つことである。条件 (3.32), (3.33) はそれぞれ,

$$\hat{I}_{m+1} \geq P(m) \quad (3.69)$$

$$\hat{I}_m \leq Q(m) \quad (3.70)$$

と等価である。また, これらが成り立っているとすれば, 条件  $i_p(m) = m + 1$ ,  $i_q(m) = m$  はそれぞれ,

$$\hat{I}_m < P(m) \quad (3.71)$$

$$\hat{I}_{m+1} > Q(m) \quad (3.72)$$

と等価である。単数型の  $\Xi^{(m)}$  に対しては  $l_1(m) = m$ ,  $l_2(m) = m + 1$  であるから, (3.69), (3.70), (3.71), (3.72) はそれぞれ条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_1)$  に書き換えられる。

(iii)  $N(x) = m$  である  $x$  の中に方程式 (3.11) の解が存在しないための必要十分条件は, 定理 3.1 の条件 (3.32), (3.33) の少なくとも 1 つが成立しないことである。条件式 (3.32) が成り立たないことは,

$$\hat{I}_{m+1} < P(m) \quad (3.73)$$

と等価であり, 条件式 (3.33) が成り立たないことは,

$$\hat{I}_m > Q(m) \quad (3.74)$$

と等価である。空集合である  $\Xi^{(m)}$  に対しては  $l_1(m) = m + 1$ ,  $l_2(m)$  であるから, (3.73), (3.74) はそれぞれ条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_1)$  に書き換えられる。 ■

例 3.7 例 3.6 の  $\Xi$  に対して, 補題 3.6 の条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  をすべて書くと次のようになる.

	条件 (A)	条件 (B)	条件 $(\Gamma_1)$	条件 $(\Gamma_2)$
$m = 0$	$\hat{I}_1 \geq P(0)$	$\hat{I}_0 \leq Q(0)$	$\hat{I}_0 < P(0)$	$\hat{I}_1 > Q(0)$
$m = 1$			$\hat{I}_2 < P(1)$	$\hat{I}_1 > Q(1)$
$m = 2$	$\hat{I}_3 \geq P(2)$	$\hat{I}_2 \leq Q(2)$	$\hat{I}_2 < P(2)$	$\hat{I}_3 > Q(2)$
$m = 3$	$\hat{I}_3 \geq P(3)$	$\hat{I}_5 \leq Q(3)$	$\hat{I}_2 < P(3)$	$\hat{I}_6 > Q(3)$
$m = 4$	$\hat{I}_4 \geq P(4)$	$\hat{I}_5 \leq Q(4)$	$\hat{I}_3 < P(4)$	$\hat{I}_6 > Q(4)$
$m = 5$	$\hat{I}_4 \geq P(5)$	$\hat{I}_7 \leq Q(5)$	$\hat{I}_3 < P(5)$	$\hat{I}_8 > Q(5)$
$m = 6$	$\hat{I}_7 \geq P(6)$	$\hat{I}_6 \leq Q(6)$	$\hat{I}_6 < P(6)$	$\hat{I}_7 > Q(6)$
$m = 7$	$\hat{I}_8 \geq P(7)$	$\hat{I}_7 \leq Q(7)$	$\hat{I}_7 < P(7)$	$\hat{I}_8 > Q(7)$
$m = 8$	$\hat{I}_9 \geq P(8)$	$\hat{I}_8 \leq Q(8)$	$\hat{I}_8 < P(8)$	$\hat{I}_9 > Q(8)$

$\Xi^{(3)}$ ,  $\Xi^{(4)}$ ,  $\Xi^{(5)}$  は複数型であり, それ以外はすべて単数型または空集合であるので,  $\Xi$  が代数的に実現可能であるための必要十分条件は, (a) 条件 (A) および (B) がすべて成り立つ, (b)  $m = 3, 4, 5$  の条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  がともに成り立つ, (c)  $m = 1, 2, 6, 7, 8$  のそれぞれについて, 条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  の少なくとも 1 つが成り立つ, をすべて満足する  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha, \hat{I}$  が存在することである.

例 3.7 に示したように, 補題 3.6 の条件は一般に極めて複雑である. 特に条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  に関しては, 両方が成り立たねばならないのか, 少なくとも 1 つでよいのかが  $\Xi^{(m)}$  が複数型であるか否かによって決まるので取り扱いが難しい. そこでまずはじめに, 最も簡単な場合として,  $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) のうち 1 つだけが単数型であり, 残りはすべて空集合である場合を考える.

補題 3.7  $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) のうち 1 つだけが単数型であり, 残りがすべて空集合ならば,  $\Xi$  は代数的に実現可能である.

証明:  $\Xi^{(m^*)}$  だけが単数型であるとする. このとき,  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha$  を任意の正の値に選び,  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を,

$$\hat{I}_{m^*} < \min\{P(0), Q(0)\} \tag{3.75}$$

$$\hat{I}_{m^*+1} > \max\{P(n), Q(n)\} \tag{3.76}$$

を満足するように選ぶならば,  $m = m^*$  に対する条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  はすべて成り

立つ。また、仮定 3.4 および  $P(0) < P(1) < \dots < P(n)$ ,  $Q(0) < Q(1) < \dots < Q(n)$  より,

$$\begin{aligned} \hat{I}_{m+1} &< P(m) \quad (m = 0, 1, \dots, m^* - 1) \\ \hat{I}_m &> Q(m) \quad (m = m^* + 1, m^* + 2, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つので,  $m = 0, 1, \dots, m^* - 1$  に対する条件  $(\Gamma_1)$  と  $m = m^* + 1, m^* + 2, \dots, n$  に対する条件  $(\Gamma_2)$  が成り立つ。 ■

補題 3.7 よりただちに次の補題が得られる。

**補題 3.8**  $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) のうち 1 つだけが単数型であり, 残りがすべて空集合ならば,  $\Xi$  は物理的に実現可能である。 ■

次に  $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) において, 空集合でないものが 2 つ以上存在する, もしくは複数型であるものが 1 つ以上存在する場合を考える。所望平衡点集合  $\Xi$  が代数的に実現可能であるための必要条件は, 補題 3.6 の条件 (A), (B) を満足する  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha, \hat{I}_i$  が存在することであるが, 条件 (A) および (B) に関しては次の補題が成り立つ。

**補題 3.9**  $\Xi^{(m)}$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) において, 空集合でないものが 2 つ以上存在するか, もしくは複数型であるものが 1 つ以上存在するとする。このとき, 補題 3.6 の条件 (A), (B) をすべて満足する  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が存在するための必要十分条件は,

$$P(d) \leq Q(0) \quad (3.77)$$

ただし,

$$d = \max\{m_1 - m_2 \mid l_1(m_1) + 1 \leq l_2(m_2) - 1, \Xi^{(m_1)} \neq \emptyset, \Xi^{(m_2)} \neq \emptyset\} \quad (3.78)$$

が成り立つことである。

**証明:** 仮定 3.4 より,  $i \leq j$  ならば  $\hat{I}_i \leq \hat{I}_j$  でなければならないから, 条件 (A) および (B) を満足する  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が存在するための必要十分条件は,

$$l_1(m_1) + 1 < l_2(m_2) - 1$$

を満足するすべての  $(m_1, m_2)$  に対して  $P(m_1) \leq Q(m_2)$ , すなわち

$$P(m_1 - m_2) \leq Q(0) \quad (3.79)$$



が成り立つことである。また、

$$P(k) \leq Q(0) \quad (3.80)$$

$$P(l) \leq Q(0) \quad (3.81)$$

という2つの条件式があり  $k \leq l$  であるとき、(3.81) が成り立てば自動的に (3.80) も成り立つので、(3.80) と (3.81) の2つの不等式がともに成り立つことは (3.81) が成り立つことと等価である。したがって、(3.79) で表されるすべての条件が成り立つことは (3.77) が成り立つことと等価である。 ■

補題 3.6 の条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  が満足されるためには、 $P(0), P(1), \dots, P(n)$  に比べて  $Q(0), Q(1), \dots, Q(n)$  が小さいほどよい。このことと補題 3.9 より  $P(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) および  $Q(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) の最適な関係の1つは、

$$P(d) + \frac{\Delta}{\delta} = Q(0) \quad (3.82)$$

である。ただし、 $\Delta/\delta$  は、

$$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{1}{2} \{P(m+1) - P(m)\} = \frac{1}{2} \{Q(m+1) - Q(m)\}$$

である。(3.82) に  $P(m)$ ,  $Q(m)$  の定義式を代入して整理すると、

$$\alpha = \Delta / \left\{ \gamma - \frac{(2d+3)\delta}{2} \right\} \quad (3.83)$$

が得られる。これを満足する  $\alpha (> 0)$  が存在するためには、右辺が正、すなわち

$$\gamma > \frac{(2d+3)\delta}{2} \quad (3.84)$$

であればよい。したがって、 $\Delta, \delta$  を適当な正の値に選び、 $\gamma$  の値を (3.84) を満たすように定め、最後に (3.83) によって  $\alpha$  を与えれば (3.82) 式は満足される。

以上により、補題 3.6 の条件 (A) および (B) をすべて満足する  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) の存在を保証し、かつ条件  $(\Gamma_1)$  および  $(\Gamma_2)$  が最も満足されやすい  $P(m)$  と  $Q(m)$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ) の関係が求まったので、残る問題は条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  を満足する  $\hat{I}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が実際に存在するか否かの判定である。いくつかの所望平衡点集合を例にとり、この問題を検討する。

例 3.6 の所望平衡点集合に対する条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  は例 3.7 に示される通りであるが, 仮定 3.4 を考慮すると, 条件 (A) および (B) は次のようになる.

$$\hat{I}_0 \leq Q(0) \quad (3.85)$$

$$P(0) \leq \hat{I}_1 \leq Q(2) \quad (3.86)$$

$$P(0) \leq \hat{I}_2 \leq Q(2) \quad (3.87)$$

$$P(3) \leq \hat{I}_3 \leq Q(3) \quad (3.88)$$

$$P(5) \leq \hat{I}_4 \leq Q(3) \quad (3.89)$$

$$P(5) \leq \hat{I}_5 \leq Q(3) \quad (3.90)$$

$$P(5) \leq \hat{I}_6 \leq Q(5) \quad (3.91)$$

$$P(6) \leq \hat{I}_7 \leq Q(5) \quad (3.92)$$

$$P(7) \leq \hat{I}_8 \leq Q(8) \quad (3.93)$$

$$P(8) \leq \hat{I}_9 \quad (3.94)$$

ただし,  $\hat{I}_0 = -\infty$  および  $\hat{I}_9 = +\infty$  であるから, (3.85) および (3.94) は自動的に満足される. 表 3.3 と (3.78) 式によって整数  $d$  を求めると  $d = 2$  となる. 補題 3.9 より  $P(2) + \frac{\delta}{\Delta} = Q(0)$  となるように  $\Delta, \gamma, \delta, \alpha$  を選べば (3.86) ~ (3.93) の条件を満足する  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  の存在が保証される. 条件 (3.85) ~ (3.94) と例 3.7 に示した条件  $(\Gamma_1)$  および  $(\Gamma_2)$  を図示すると図 3.9 のようになる. 図 3.9 において, 実線で示した範囲は (3.86) ~ (3.93) の条件である. 左向き, 右向きの矢印で示した範囲はそれぞれ条件  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$  である. 矢印の上の数字  $m$  はその矢印が  $\Xi^{(m)}$  に関する条件  $(\Gamma_1)$  または条件  $(\Gamma_2)$  であることを示しており, 丸印の付いたものはその条件が複数型の  $\Xi^{(m)}$  に関する条件  $(\Gamma_1)$  または  $(\Gamma_2)$  であることを示している. すなわち, 丸印の付いた条件は必ず満足されなければならないものである.

ここで以下の手順に従って, 条件  $(\Gamma_1)$  および  $(\Gamma_2)$  に印を付けていく.

#### 所望平衡点集合の実現可能性を判定するアルゴリズム 1

1. (3.85) ~ (3.94) の条件と同時に満足することのできない条件  $(\Gamma_1)$  に×印を付け, 同じ数字の条件  $(\Gamma_2)$  に丸印を付ける. 同様に, (3.85) ~ (3.94) の条件と同時に満足することのできない条件  $(\Gamma_2)$  に×印を付け, 同じ数字の条件  $(\Gamma_1)$  に丸印を付ける.

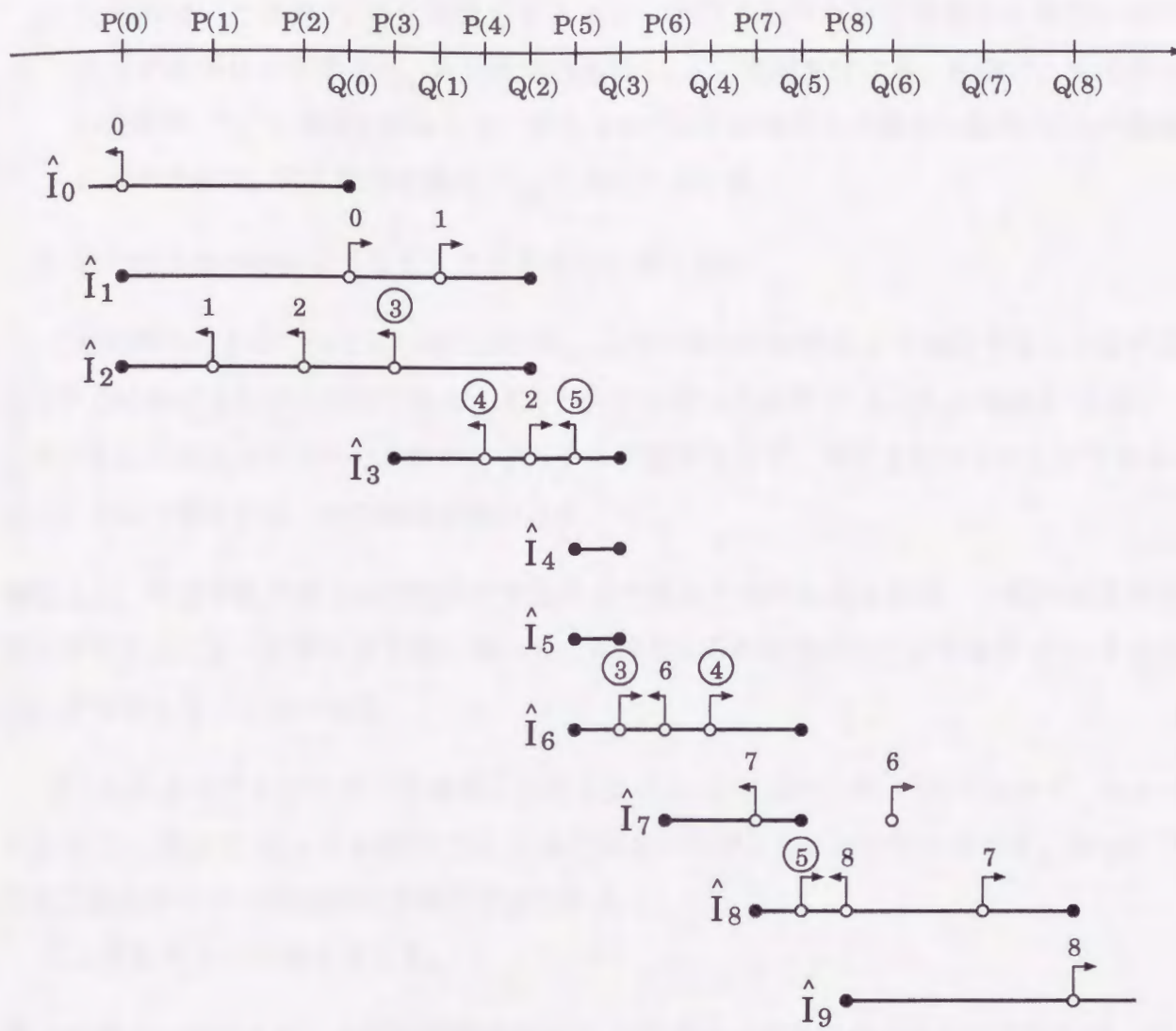


図 3.9: 例 3.6 の所望平衡点集合に対する条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$

2. 丸印のついた条件 ( $\Gamma_1$ ) を満足させるとき, 仮定 3.4 のために満足され得ない条件 ( $\Gamma_2$ ) の数字に  $\times$  印を付け, 同じ数字の条件 ( $\Gamma_1$ ) に丸印を付ける. 同様に, 丸印のついた条件 ( $\Gamma_2$ ) を満足させるとき, 仮定 3.4 のために満足され得ない条件 ( $\Gamma_1$ ) の数字に  $\times$  印を付け, 同じ数字の条件 ( $\Gamma_2$ ) に丸印を付ける.
3. 新たに  $\times$  印が付かなくなるまで 2 の操作を繰り返す.

上記の操作によって得られた図において, 丸印の付いた条件は  $\Xi$  を実現する上で必ず満足されなければならない条件である. また,  $\times$  印の付いた条件 ( $\Gamma_1$ ), ( $\Gamma_2$ ) は条件 (3.85) ~ (3.94) もしくは丸印のついた条件のいずれかと矛盾するので, 満足され得ないものである. このことに注意すれば, 次の補題が得られる.

**補題 3.10** 所望平衡点集合が代数的に実現可能であるための必要条件は, 上記の図的判定アルゴリズムによって得られた図において, 丸印と  $\times$  印が両方付いている条件 ( $\Gamma_1$ ) または ( $\Gamma_2$ ) が存在しないことである. ■

図 3.9 に上のアルゴリズムを適用した結果を図 3.10 に示す. 図 3.10 において,  $m = 4$  の条件 ( $\Gamma_1$ ) および  $m = 6$  の条件 ( $\Gamma_2$ ) には丸印と  $\times$  印がともに付いているので, 例 3.6 の所望平衡点集合  $\Xi$  は代数的に実現不可能である.

ここでもう 1 つの例を考える.

**例 3.8** 表 3.4 で与えられる所望平衡点集合  $\Xi$  が代数的に実現可能であるか否かを調べる. 表 3.4 より  $\Xi^{(4)}$ ,  $\Xi^{(5)}$  は複数量型,  $\Xi^{(1)}$ ,  $\Xi^{(7)}$  は空集合, 残りはすべて単数量型である.

$m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$l_1(m)$	0	2	2	1	3	5	6	8	8
$l_2(m)$	1	1	3	6	7	6	7	7	9

表 3.4: 所望平衡点集合の例

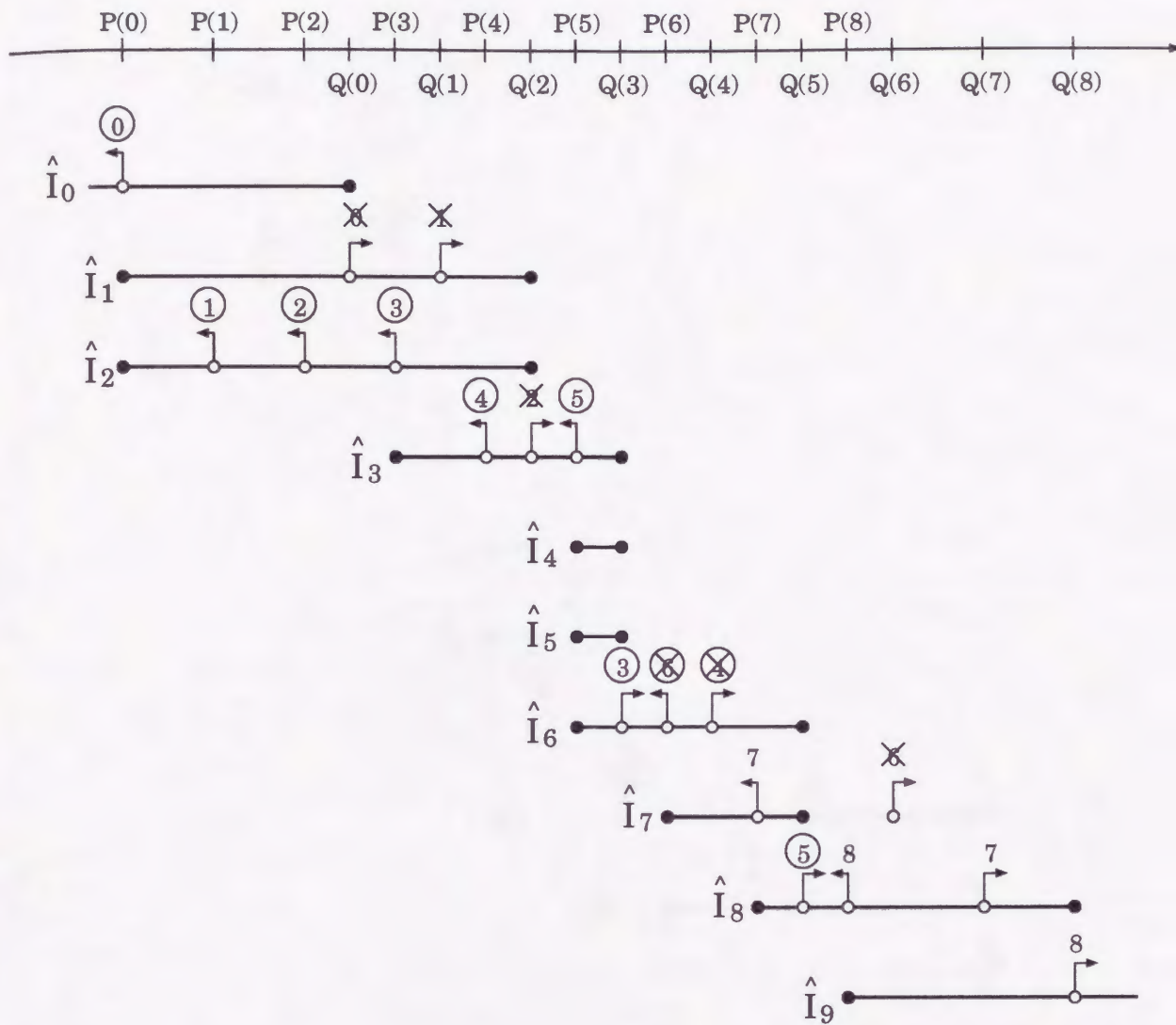


図 3.10: 例 3.6 の所望平衡点集合の実現可能性の判定

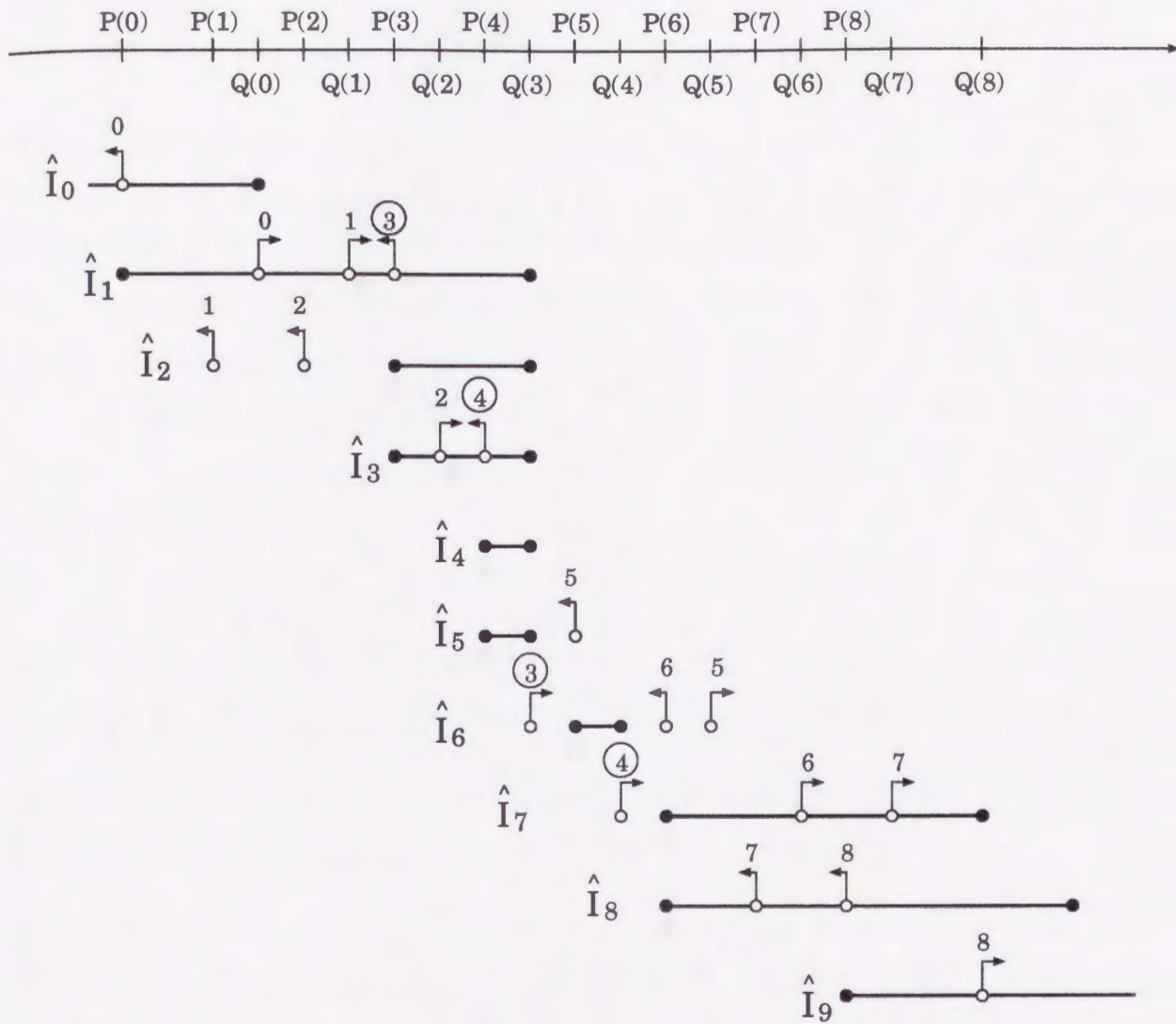


図 3.11: 例 3.7 の所望平衡点集合に対する条件 (A), (B),  $(\Gamma_1)$ ,  $(\Gamma_2)$

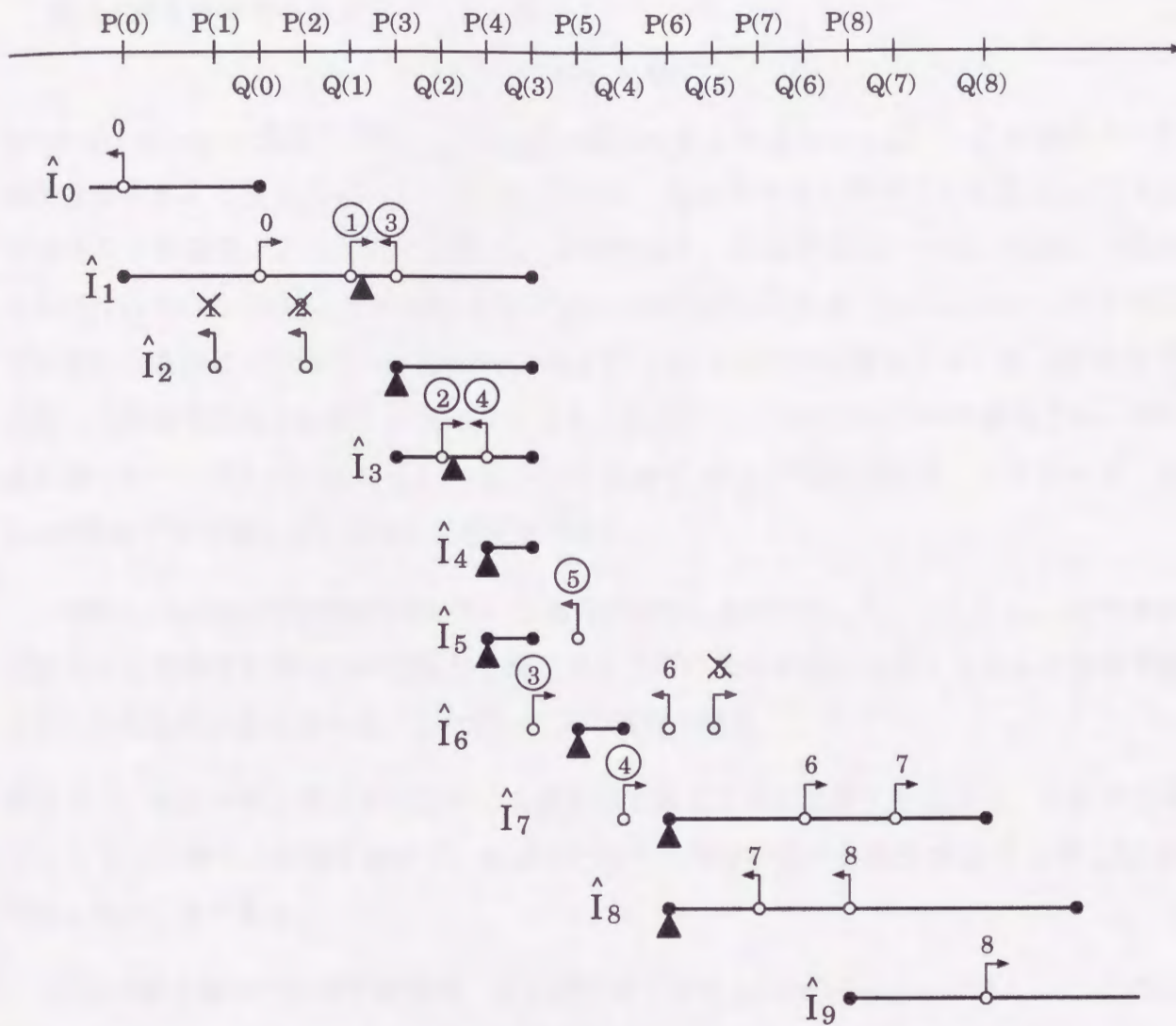


図 3.12: 例 3.7 の所望平衡点集合の実現可能性の判定

表 3.4 および補題 3.9 より,

$$P(1) + \frac{\delta}{\Delta} = Q(0)$$

が  $P(m)$ ,  $Q(m)$  の最適な関係である. この関係のもとで  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  の満たすべき条件を図示すると図 3.11 のようになる. さらに, 先ほどの例と同様にして図 3.11 にアルゴリズム 1 を適用することにより図 3.12 が得られる. 図 3.12 においては, 丸印と×印がともに付いている条件 ( $\Gamma_1$ ) または条件 ( $\Gamma_2$ ) は存在しない. いま  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, 8)$  を実線で示される条件と丸印の付いた条件 ( $\Gamma_1$ ) および ( $\Gamma_2$ ) を満足する最も小さい値 (図 3.12 では黒い三角形で示している) に選ぶ. すると, 丸印のついた条件はすべて満足され, かつ丸印のついていない  $m (= 0, 6, 7, 8)$  については条件 ( $\Gamma_1$ ) が満足される. したがって, 表 3.4 の所望平衡点集合は代数的に実現可能である.

一般に, 丸印と×印が両方付いている条件が存在しなければ,  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を実線で示される条件と丸印のついた条件を満足する区間の最小の値に選ぶことにより所望平衡点集合は代数的に実現される. したがって次の補題を得る.

**補題 3.11** 所望平衡点集合が代数的に実現可能であるための必要十分条件は, アルゴリズム 1 によって得られた図において, 丸印と×印が両方付いている条件 ( $\Gamma_1$ ) または ( $\Gamma_2$ ) が存在しないことである. ■

所望平衡点集合の実現可能性は, 図を用いなくても  $l_1(m)$ ,  $l_2(m) (m = 0, 1, \dots, n)$  の値のみから判定することができる. 以下にその判定のためのアルゴリズムおよび定理を示す.

#### 所望平衡点集合の実現可能性を判定するアルゴリズム 2

**Step 0.** 集合  $S_1, S_2, T_1, T_2 \subset \{0, 1, \dots, n\}$  を初期化する.

$$S_1 = S_2 = \emptyset, \quad T_1 = T_2 = \{k \mid \Xi^{(k)} \text{は複数量}\}$$

**Step 1.**  $m = 0, 1, \dots, n$  のそれぞれについて,

$$j > m \quad \text{かつ} \quad l_1(j) < l_1(m) \quad (3.95)$$

を満足する  $j$  が存在するならば  $m$  を  $S_1, T_2$  に加える. ただし,  $m$  がすでに  $T_2$  と  $S_2$  のうちの少なくとも 1 つに含まれているならば,  $T_2$  はそのままにしておく. また,

$$k < m \quad \text{かつ} \quad l_2(k) > l_2(m) \quad (3.96)$$



を満足する  $k$  が存在するならば  $m$  を  $S_2, T_1$  に加える. ただし,  $m$  がすでに  $T_1$  と  $S_1$  のうちの少なくとも 1 つに含まれているならば,  $T_1$  はそのままにしておく.

Step 2.  $S_1$  に含まれない  $m$  のそれぞれについて,

$$j \in T_2 \text{ かつ } j \geq m - d \text{ かつ } l_2(j) \leq l_1(m) \quad (3.97)$$

を満足する  $j$  が存在するならば  $m$  を  $S_1, T_2$  に加える. ただし,  $m$  が  $T_2$  と  $S_2$  のうちの少なくとも 1 つに含まれているならば,  $T_2$  はそのままにしておく. また,  $S_2$  に含まれない  $m$  のそれぞれについて,

$$k \in T_1 \text{ かつ } k \leq m + d \text{ かつ } l_1(k) \geq l_2(m) \quad (3.98)$$

を満足する  $k$  が存在するならば  $m$  を  $S_2, T_1$  に加える. ただし,  $m$  がすでに  $T_1$  と  $S_1$  のうちの少なくとも 1 つに含まれているならば,  $T_1$  はそのままにしておく.

Step 3.  $S_1, S_2$  に新たに加わる要素が無くなるまで Step 2 の操作を繰り返す.

定理 3.3  $\Xi$  が代数的に実現可能であるための必要十分条件は, アルゴリズム 2 によって得られた集合  $S_1, S_2, T_1, T_2$  が,

$$S_1 \cap T_1 = \emptyset \quad (3.99)$$

$$S_2 \cap T_2 = \emptyset \quad (3.100)$$

をともに満足することである.

証明: アルゴリズム 2 はアルゴリズム 1 を書き換えたものであり,  $S_1, S_2$  はそれぞれ,  $\times$  印の付いた条件  $(\Gamma_1)$ , 条件  $(\Gamma_2)$  の番号に対応し,  $T_1, T_2$  はそれぞれ, 丸印の付いた条件  $(\Gamma_1)$ , 条件  $(\Gamma_2)$  の番号に対応する. したがって, 補題 3.11 から本定理が得られる. ■

定理 3.3 は所望平衡点集合  $\Xi$  が代数的に実現可能であるための必要十分条件を与えているが, 実際には, その条件は  $\Xi$  が物理的に実現可能であるための必要十分条件でもある.

補題 3.12 代数的に実現可能である所望平衡点集合は物理的に実現可能である.

証明: 条件式 (3.84) を満足する回路パラメータ  $y_a, y_c, y'_c, y_d$  が常に正で求まることを示せばよい. 条件式 (3.81) を  $\gamma, \delta$  の定義式 (3.61), (3.62) を用いて書き直すと次のようになる.

$$y_a > -y'_c - (n-1)(y_c + y_d) + \frac{y_d}{y'_c - \frac{(2d+3)y_c}{2}} \left\{ \frac{2n+2d-1}{2} y'_c - (n-1)y_c \right\}$$

この条件は  $y_a$  を十分大きく選ぶことにより, いつでも満足される. ■

## 3.4.2 オペアンプがすべて逆相の場合

定理 3.2 および補題 3.5 より, 所望平衡点集合  $\Xi$  が物理的に実現可能であるための必要条件は,  $\Xi^{(m)} (m = 0, 1, \dots, n)$  が次のいずれかを満足することである.

(i)  $\Xi^{(m)} (m = 0, 1, \dots, n)$  のうち 1 つだけが

$$\Xi^{(m^*)} = \left\{ \underbrace{[+1, \dots, +1]^{l_3}}_{\text{すべて} +1}, \underbrace{[\pm 1, \dots, \pm 1]^{l_4}}_{\text{すべて} \pm 1}, \underbrace{[-1, \dots, -1]^{n-l_3-l_4}}_{\text{すべて} -1} \right\}^T \quad (3.101)$$

$$(l_3 \leq n - m - 1, \quad l_4 \geq n - m + 2)$$

であり, 残りはすべて空集合である.

(ii)  $\Xi^{(m)} (m = 0, 1, \dots, n)$  のうち 1 つだけが

$$\Xi^{(m^*)} = \left\{ \underbrace{[+1, \dots, +1]^{n-m^*}}_{\text{すべて} +1}, \underbrace{[-1, \dots, -1]^{n-m^*+1}}_{\text{すべて} -1} \right\}^T \quad (3.102)$$

であり, 残りがすべて空集合である.

したがって, 以下では (i), (ii) の場合のみを考えればよい.

**補題 3.13** 所望平衡点集合  $\Xi$  が (i) または (ii) で与えられるならば,  $\Xi$  が物理的に実現可能であるための十分条件は,

$$R(0) \leq S(0) \quad (3.103)$$

を満足する回路パラメータ  $y_a, y_c, y'_c, y_d, \alpha$  が存在することである.

**証明:** (3.103) を満足する回路パラメータが存在するとする.  $\Xi$  が (i) で与えられるならば,

$$\hat{I}_{l_3} < R(m^*) \leq \hat{I}_{l_3+1} \leq \hat{I}_{l_4-1} < S(m^*) < \hat{I}_{l_4}$$

を満足するように  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を選ぶと,

$$i_r(m^*) = l_3 + 1$$

$$i_s(m^*) = l_4 - 1$$

となるので, 定理 3.2 および補題 3.5 より  $\Xi^{(m^*)}$  に含まれる 2 値ベクトルだけが方程式 (3.11) の解となる. また,  $\Xi$  が (ii) で与えられるならば,

$$\hat{I}_{n-m^*} \leq R(m^*) \leq S(m^*) < \hat{I}_{n-m^*+1}$$

を満足するように  $\hat{I}_i (i = 1, 2, \dots, n)$  を選ぶと,

$$i_r(m^*) = n - m^* + 1$$

$$i_s(m^*) = n - m^*$$

となるので, 定理 3.2 および補題 3.5 より  $\Xi(m^*)$  に含まれる 2 値ベクトルだけが方程式 (3.11) の解となる. ■

条件式 (3.103) に  $R(m)$ ,  $S(m)$  の定義式 (3.44), (3.45) を代入して整理すると,

$$\frac{1}{\alpha} \leq \frac{\delta - \gamma}{\Delta} \quad (3.104)$$

となる. ここで,

$$\delta - \gamma > 0 \quad (3.105)$$

となるような回路パラメータが存在すれば,  $\alpha$  を十分大きく選ぶことにより (3.104) を満足させることができる. (3.105) に  $\gamma, \delta$  の定義式 (3.61), (3.62) を代入して整理すると,

$$(n-1)(y'_c - y_c)y_d > 0$$

となる. この条件は  $y'_c$  と  $y_c$  を

$$y'_c > y_c$$

となるように選ぶことにより満足される. このことより, 次の定理が得られる.

**定理 3.4** オペアンプがすべて逆相のとき, 所望平衡点集合  $\Xi$  が (i) または (ii) で与えられるならば,  $\Xi$  は物理的に実現可能である. ■

### 3.5 回路の安定性

本節では, 回路の大域的な安定性と  $v_a(t)$  に関する平衡点の漸近安定性について議論する. まず, 回路が大域的に安定であることを, 時間とともに単調減少するエネルギー関数を用いて証明する. 次に, 飽和領域にあるすべての平衡点が漸近安定であることを示す.

以下では, 正相のオペアンプと逆相のオペアンプが混在している場合を考える. 一般性を失うことなく,

$$f_1(\cdot) = \dots = f_h(\cdot) = f(\cdot), \quad f_{h+1}(\cdot) = \dots = f_n(\cdot) = -f(\cdot)$$

と仮定する.  $h = n$  はオペアンプがすべて正相の場合に相当し,  $h = 0$  はオペアンプがすべて逆相の場合に相当する.

## 3.5.1 回路の大域的安定性

関数  $E(t)$  を次式で定義する.

$$\begin{aligned}
 E(t) = & \frac{1}{2} \left\{ a \sum_{i=1}^n v_{ai}(t)^2 - b \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n v_{ai}(t)v_{aj}(t) \right\} \\
 & - \frac{p}{2\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^h f_i(v_{ai}(t))^2 - \sum_{i=h+1}^n f_i(v_{ai}(t))^2 \right\} \\
 & - \frac{q}{2\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_i(v_{ai}(t))f_j(v_{aj}(t)) - \sum_{i=h+1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_i(v_{ai}(t))f_j(v_{aj}(t)) \right\} \\
 & - \sum_{i=1}^n v_{ai}(t)I_i
 \end{aligned} \tag{3.106}$$

以下に示す補題 3.14, 3.15 において,  $E(t)$  が次の性質を満足することを示す.

1.  $E(t)$  は有界である.
2.  $E(t)$  は単調減少関数である.
3.  $v_a(t)$  が平衡点にあるとき, かつそのときに限り  $\frac{dE(t)}{dt} = 0$  が成り立つ.

$E(t)$  が上記の3つの性質を有するとき,  $E(t)$  はリアプノフ関数とよばれ, リアプノフの定理により, 回路は大域的に安定である.

はじめに,  $E(t)$  が有界であることを示すために, 次の補題を与える.

**補題 3.14** 各オペアンプの入力電圧は有界である.

証明: 行列  $Y_{aa}$  は対称であるから, 直行行列  $T$  によって次のように対角化できる.

$$Y_{aa} = T^T \Lambda T \tag{3.107}$$

ただし,  $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$  である. (3.107) をもとの微分方程式 (3.1) に代入して, 両辺に  $T$  を掛けることによって

$$\frac{d}{dt} Cy = -\Lambda y - TY_{ab}f(v_a) + TI \tag{3.108}$$

を得る. ただし,  $y \equiv Tv_a$  とおいた. 行列  $Y_{ab}$  は (3.2) で与えられるので, (3.108) は次のように書き換えられる.

$$\frac{d}{dt} Cy_i(t) = -\Lambda_i y_i(t) + \sum_j T_{ij} \left( pf_j(v_{aj}(t)) + q \sum_{k \neq j} f_k(v_{ak}(t)) \right) + \sum_j T_{ij} I_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{3.109}$$

いま,

$$U_i(t) = \frac{1}{C} \left\{ \sum_j T_{ij} \left( p f_j(v_{aj}(t)) + q \sum_{k \neq j} f_k(v_{ak}(t)) \right) + \sum_j T_{ij} I_j \right\}$$

とおけば, (3.109) は

$$\frac{d}{dt} y_i(t) = -\frac{\Lambda_i}{C} y_i(t) + U_i(t)$$

と書ける. この微分方程式の解は

$$y_i(t) = y_i(0) e^{-\frac{\Lambda_i t}{C}} + \int_0^t e^{-\frac{\Lambda_i(t-\tau)}{C}} U_i(\tau) d\tau \quad (3.110)$$

で与えられる.

すべての  $i (= 1, \dots, n)$  において,  $-1 \leq f_i(v_{ai}(t)) \leq 1$  であるから,  $U_i(t)$  は有界であり,

$$|U_i(t)| \leq U_{i \max} \quad (t \geq 0) \quad (3.111)$$

を満足する正の定数  $U_{i \max}$  が存在する. (3.110) および (3.111) より,

$$\begin{aligned} y_i(t) &\leq |y_i(0)| + \int_0^t e^{-\Lambda_i(t-\tau)/C} |U_i(\tau)| d\tau \\ &\leq |y_i(0)| + U_{i \max} \int_0^t e^{-\Lambda_i(t-\tau)/C} d\tau \\ &\leq |y_i(0)| + \frac{C}{\Lambda_i} U_{i \max} \end{aligned} \quad (3.112)$$

となるので,  $y_i(t)$  は有界である. したがって,  $v_a = T^T y$  も有界である. ■

補題 3.14 より次の補題を得る.

**補題 3.15**  $E(t)$  は有界である.

**証明:** 補題 3.14 より,  $v_{ai}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) は有界であるから, すべての  $i (= 1, 2, \dots, n)$  に対して,

$$|v_{ai}(t)| \leq v_{\max} \quad (t \geq 0)$$

を満足する正の定数  $v_{\max}$  が存在する. これより,

$$\begin{aligned} |E(t)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ a \sum_{i=1}^n |v_{ai}^2| + b \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |v_{ai}| |v_{aj}| \right\} - \frac{p}{2\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^h 0^2 - \sum_{i=h+1}^n 1^2 \right\} \\ &\quad - \frac{q}{2\alpha} \left\{ - \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |f_i(v_{ai})| |f_j(v_{aj})| + \sum_{i=h+1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |f_i(v_{ai})| |f_j(v_{aj})| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n v_{\max} I_i \\
\leq & \frac{1}{2} (a n v_{\max}^2 + b n (n-1) v_{\max}^2) \\
& + \frac{p}{2\alpha} (n-h) + \frac{q}{2\alpha} \{h n + (n-h)n\} + v_{\max} \sum_{i=1}^n |I_i| \\
\leq & \frac{1}{2} n v_{\max}^2 \{a + (n-1)b\} + \frac{1}{2\alpha} \{p(n-h) + q n^2\} + v_{\max} \sum_{i=1}^n |I_i| \quad (3.113)
\end{aligned}$$

を得る。上式の右辺は有限な定数である。したがって、 $E(t)$  は有界である。 ■

さらに、次の補題を与える。

**補題 3.16**  $E(t)$  は単調減少関数である。また、 $\frac{dE(t)}{dt} = 0$  になるのは、 $v_a$  が平衡点にあるとき、かつそのときに限る。

**証明：**  $E(t)$  の時間微分を計算すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(t) = & \frac{1}{2} \left\{ a \sum_{i=1}^n 2v_{ai} \frac{dv_{ai}}{dt} - b \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 2 \frac{dv_{ai}}{dt} v_{aj} \right\} \\
& - \frac{p}{2\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^h 2f_i(v_{ai}(t)) \frac{df_i(v_{ai})}{dv_{ai}} \frac{dv_{ai}}{dt} - \sum_{i=h+1}^n 2f_i(v_{ai}) \frac{df_i(v_{ai})}{dv_{ai}} \frac{dv_{ai}}{dt} \right\} \\
& - \frac{q}{2\alpha} \left\{ \sum_{i=1}^h \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 2 \frac{df_i(v_{ai})}{dv_{ai}} \frac{dv_{ai}}{dt} f_j(v_{aj}) - \sum_{i=h+1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n 2 \frac{df_i(v_{ai})}{dv_{ai}} \frac{dv_{ai}}{dt} f_j(v_{aj}) \right\} \\
& - \sum_{i=1}^n \frac{dv_{ai}}{dt} I_i \quad (3.114)
\end{aligned}$$

ここで、簡単のため、区分線形関数  $f(\cdot)$  の微分を次のように定義する。

$$\frac{df(x)}{dx} = \begin{cases} \alpha & |x| < 1/\alpha \\ 0 & |x| \geq 1/\alpha \end{cases} \quad (3.115)$$

すると、(3.114) は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(t) = & a \sum_{i=1}^n v_{ai} \frac{dv_{ai}}{dt} - b \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{dv_{ai}}{dt} v_{aj} \\
& - p \sum_{i=1}^n f_i(v_{ai}) \frac{dv_{ai}}{dt} - q \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{dv_{ai}}{dt} f_j(v_{aj}) \\
= & - \sum_{i=1}^n \frac{dv_{ai}}{dt} \left[ -a v_{ai} + b \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n v_{aj} + p f_i(v_{ai}) + q \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n f_j(v_{aj}) \right] \quad (3.116)
\end{aligned}$$

回路方程式 (3.1) より,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -C \sum_{i=1}^n \left( \frac{dv_{ai}(t)}{dt} \right)^2 \leq 0 \quad (3.117)$$

を得るから,  $E(t)$  は単調減少関数であり, その時間微分は,

$$\frac{dv_{ai}(t)}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

のとき, かつそのときに限り 0 になる. ■

以上より次の定理を得る.

**定理 3.5** オペアンプの極性によらず回路は大域的に安定である. ■

### 3.5.2 平衡点の漸近安定性

ここでは, すべての要素が正または負の飽和領域にある平衡点の安定性について考察する. いま,  $v_a^*$  を

$$|v_{ai}^*| > \frac{1}{\alpha} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を満足する平衡点とする. この平衡点の近傍における回路の振舞いを調べるために,  $v_a = v_a^* + \varepsilon$  (ただし,  $\varepsilon$  はすべての要素の絶対値が十分小さい  $n$  次元ベクトル) を回路方程式 (3.1) に代入すると,

$$\frac{d}{dt}C(v_a^* + \varepsilon) = -Y_{aa}(v_a^* + \varepsilon) - Y_{ab}F(v_a^* + \varepsilon) + I. \quad (3.118)$$

となる.  $v_a^*$  は回路の平衡点であるから,

$$\frac{d}{dt}Cv_a^* = -Y_{aa}v_a^* - Y_{ab}F(v_a^*) + I = 0 \quad (3.119)$$

が成り立つ. また,  $v_a^*$  のすべての要素が, 正または負の飽和領域にあることから,

$$F(v_a^* + p\varepsilon) \approx F(v_a^*)$$

とおくことができる. すると, (3.118) は

$$\frac{d}{dt}C\varepsilon = -Y_{aa}\varepsilon$$

となる. ここで,  $Y_{aa}$  は正値行列であるから,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon = 0$$

となり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_a^* + \varepsilon) = v_a^*$$

が成り立つ。したがって、平衡点  $v_a^*$  は漸近的に安定である。また、上の議論において、オペアンプの極性についてまったく言及していないので、平衡点の漸近安定性はオペアンプの極性に関わらず保証される。

**定理 3.6** すべての要素が正または負の飽和領域にある平衡点は、オペアンプの極性によらず、すべて漸近的に安定である。 ■

### 3.6 結言

本章では、特殊な構造を持った相互結合型回路について、所望の平衡点集合を実現する問題について考察した。この回路は、飽和特性をもつオペアンプ、キャパシタ、線形抵抗、直流電流源から構成される一種の相互結合型ニューラルネットワークの連続系モデルである。一般の連続系ニューラルネットワークモデルでは、ニューロン間の結合を表す行列  $T$  が対称行列であるのに対し、本章で用いた回路は、行列  $T$  の対角項がすべて等しく、かつ非対角項がすべて等しい、という特殊な場合に相当する。

はじめに、回路の平衡点集合の特徴付けを行った。その際、平衡点集合を、各ベクトルに含まれる  $-1$  の個数によって  $n+1$  個 ( $n$  はベクトルの次数) に分類し、それぞれの集合がある特徴的な形で表現されることを明らかにした。

次に平衡点集合の特徴を利用することにより、与えられた 2 値ベクトルだけを平衡点として実現できるための必要十分条件、およびそれを簡単に判定するアルゴリズムを与えた。さらに、その必要十分条件が満足される場合の回路パラメータの決定方法について示した。

所望の平衡点集合の実現という問題は、連想記憶回路構成という観点から、盛んに研究されているが、これまでに提案されている回路構成法のいずれにおいても、所望の平衡点集合以外に多数の平衡点集合が発生するという問題があった。これに対し、本章では、極めて特殊な構造をもった回路についてではあるが、所望平衡点集合を、それら以外に一つも平衡点を生じることなく実現する方法を与えることができた。

最後に、回路に正相のオペアンプと逆相のオペアンプが混在する場合について、リアプノフ関数を定義することによって回路が大域的に安定であることを示し、平衡点近傍の線形近似によって飽和領域にあるすべての平衡点が漸近安定であることを示した。従来の連



続系ニューラルネットワークではオペアンプはすべて正相で用いられており、ニューロン間の結合が対称であれば大域的に安定であることが知られていた。本章では、正相のオペアンプと逆相のオペアンプが混在する場合でも、ニューロン間の結合が対称であれば、回路が大域的に安定であること、および飽和領域にある平衡点が漸近安定であることを明らかにした。

## 第4章

# テイパー結合行列をもつニューラルネットワークの平衡点の個数について

### 4.1 緒言

本章では、離散系ニューラルネットワークにおいて、結合行列  $W$  がある特殊な条件を満足するときの、平衡点の最大個数を厳密に評価する。平衡点の最大個数は、相互結合型ニューラルネットワークを用いた連想記憶における、記憶容量と密接な関係を持っている。従来の研究では、外積法、射影学習則、固有構造法などの構成法を用いることによって、任意に選ばれた  $0.15n \sim n$  個 ( $n$  はニューロンの個数) のベクトルをネットワークに記憶させることができることが知られている。一方で、Abu-Mostafa らは、 $n$  個のニューロンをもつニューラルネットワークが  $m$  個の任意のベクトルを記憶できるためには、構成法に依らず  $m$  が  $n$  以下でなければならないことを示した<sup>[17]</sup>。しかしながら、これらの文献においては、偽記憶の個数については議論されていない。最近、Bruck らによって偽記憶の個数が評価され、所望記憶ベクトルの個数に関して指数関数的に増加することが示された<sup>[18]</sup>。しかし、彼らの評価は記憶ベクトルの個数の最大値も上限も与えていない。また、従来の構成法では結合行列が対称行列に限られるために、非対称な結合行列をもつネットワークの平衡点の個数に関する議論はほとんど見当たらない。

相互結合型ニューラルネットワークの平衡点はある非線形方程式の解であるが、一般に、非線形方程式の解の個数を評価することは極めて難しい。これまでにも、方程式が一意解をもつための条件に関しては優れた結果が得られている<sup>[38]-[45]</sup>が、解の個数に関する結果は非常に少ない。非線形回路理論の分野においては、西が、能動素子と理想ダイオード、飽和特性をもつ非線形オペアンプ、1次および2次の微係数が正である非線形抵抗などによって

構成される非線形抵抗回路の解の個数に関する結果をいくつか発表している<sup>[46]-[48]</sup>。また、Chua と Wang は degree theory に基づいて方程式の解の個数に関する多くの定理を与えている<sup>[49]</sup>が、解の最大個数の評価に利用するのは難しい。このように、多くの研究にも関わらず、簡単な非線形方程式でさえ解の正確な個数を知る一般的な方法は得られていない。

本章では、 $x = \text{sgn}(Wx)$  ( $x$  は  $n$  次元ベクトル) で表される非線形方程式の解の個数について議論する。この方程式は、相互結合型ニューラルネットワークの離散系モデルの平衡点を与えるものである。 $n$  次の正方行列  $W$  は、テイパー行列 (詳しくは 4.2 節で述べる) という、特殊な条件を満足すると仮定する。この条件は、ニューロンが環状に配置され、各ニューロンはそれ自身よりすぐ前方の  $k$  個からのみ結合されており、その結合の強さはニューロン間の距離とともに小さくなる、という条件に相当する。また、この仮定により、 $W$  は一般に非対称な行列である。

はじめに、 $k \leq 4$  の場合に、解の最大個数が極めて少ないことを示す。その最大個数は、 $n$  の値に依らず、また  $W$  が上記の仮定を満足する限り  $W$  の値にも依らない。このことから、 $k$  が大きくなっても解の個数は  $2^n$  ( $n$  次元 2 値ベクトルの総数) に比べて常に極めて少ないのではないかと思われたので、次に、 $k = n - 1$  の場合 (すなわち、各ニューロンが自分自身以外のすべてのニューロンと結合している) について考察した。その結果、ある場合には解が  $O(2^{n/2})$  個存在することがわかり、解の最大個数はニューロン数に依らず極めて少ないという性質が一般には成り立たないことを示した。また、この結果は文献 [18] の結果とも一致する。

本章では、引き込み領域を含めた平衡点の安定性や、ネットワークの大域的収束性などに関しては議論していない。上記の非線形連立方程式の解の個数にのみ着目する。

## 4.2 問題設定

次式で表される非線形連立方程式の解の個数について考察する。

$$x = \text{sgn}(Wx) \quad (4.1)$$

ただし、 $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  は  $n$  次の 2 値ベクトルであり、 $x_i$  は 1 または  $-1$  の値をとる。また、 $W = [w_{ij}]$  は  $n \times n$  定数行列である。

この方程式は、相互結合型ニューラルネットワークの離散系モデル

$$x_i(t+1) = \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} x_j(t) - \theta_i \right) \quad (4.2)$$

において,  $\theta_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) としたときの平衡点が満たすべき方程式である.

以下では, 簡単のため, 次の仮定を行なう.

仮定 4.1 複号のいかなる組合せに対しても,

$$w_{i1} \pm w_{i2} \pm \dots \pm w_{in} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.3)$$

が成り立つ.

本章で扱う行列のクラスを次で定義する.

定義 4.1  $n$  次の正方行列  $A = [a_{ij}]$  が以下の条件をすべて満足するとき,  $A$  は  $k$  重テイパー行列であるという.

(i)  $A$  の対角要素はすべて 0 である. すなわち,

$$a_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(ii) すべての  $i$  ( $= 1, 2, \dots, n$ ) に対して,

$$|a_{i,i+1}| \geq |a_{i,i+2}| \geq \dots \geq |a_{i,i+k}| > 0 \quad (4.4)$$

および

$$a_{i,i+k+1} = a_{i,i+k+2} = \dots = a_{i,i+n-1} = 0 \quad (4.5)$$

が成り立つ.

(iii) 複号のいかなる組合せに対し,

$$a_{i,i+1} \pm a_{i,i+2} \pm \dots \pm a_{i,i+k} \neq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

が成り立つ.

上の定義において, 添字  $i$  は  $n$  よりも大きければ  $i - n$  を表し, 0 よりも小さければ  $i + n$  を表すものとする. また, 本章を通して添字はこの意味で用いる.

以下では, 行列  $W$  は  $k$  重テイパー行列とし,  $k \leq 4$  のそれぞれの場合について, 方程式 (4.1) を満足する 2 値ベクトル  $x$  の最大個数を調べる. 上の定義において, 零対角の条件 (i) は, 相互結合型ニューラルネットワークにおいてよく仮定されるものである. 条件 (ii) は, 取り扱うニューラルネットワークが 1 次元の  $k$  近傍のセルラーニューラルネット

ワークの特殊な場合であることを意味する。条件 (iii) は、仮定 (4.3) に相当する。結合行列  $W$  が  $k$  重テイパー行列であるニューラルネットワークにおいては、ニューロンが環状に配置され、各ニューロンはそれ自身よりもすぐ前方の  $k$  個のニューロンからのみ結合されており、それらの  $k$  個の結合の強さ（結合係数の絶対値）はニューロン間の距離が大きくなるとともに小さくなる、といった特徴をもつ。

結合行列  $W$  が  $k$  重テイパー行列であるならば、 $k = n - 1$  かつ (4.4) が等号で成り立つ場合を除き、 $W$  は必ず非対称になる。

例 4.1 次式で与えられる結合行列  $W$  は 2 重テイパー行列である。

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

この結合行列をもつネットワークは図 4.1 のように有向グラフによって表現される。図 4.1 において、黒丸はニューロンを表し、有向枝の横に書かれた数字は結合係数を表す。

本章の問題は、結合行列  $W$  が  $k$  重テイパー行列であるときの、方程式 (4.1) の解の最大個数を調べることである。まず、最も簡単な場合として、 $k = 1$  および  $k = 2$  の場合を考える。次に、 $k = 3$  および  $k = 4$  の場合について考察し、最後に  $k = n - 1$  として、その特殊な場合を考える。

### 4.3 $k \leq 4$ の場合の解の最大個数

結合行列  $W$  が  $k$  重テイパー行列であるとする、方程式 (4.1) は、

$$x_i = \operatorname{sgn} \left( \sum_{j=i+1}^{i+k} w_{ij} x_j \right) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

もしくは、

$$\sum_{j=i+1}^{i+k} w_{ij} x_i x_j > 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.9)$$

と書き換えられる。もし  $x$  が方程式 (4.1) の解であるならば、 $-x$  も解である。よって、本章の目的のためには  $x_1 = +1$  であるような解の個数を求めれば十分である。

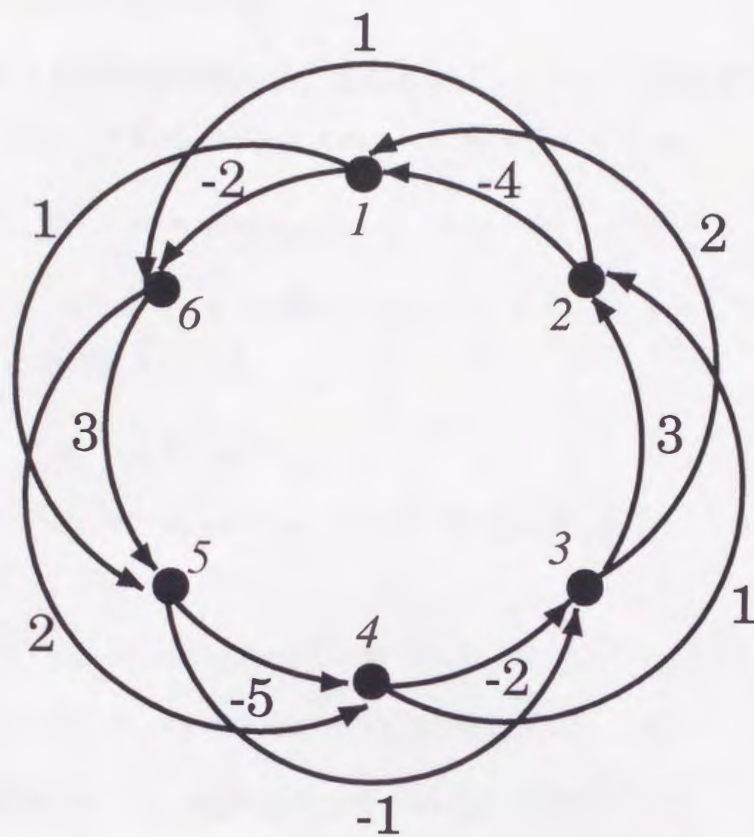


図 4.1: 例 4.1 の結合行列  $W$  をもつニューラルネットワーク

### 4.3.1 $k = 1$ および $2$ の場合

はじめに,  $k = 1$  の場合を考察する. このとき,  $j \neq i + 1$  であるすべての  $(i, j)$  に対して  $w_{ij} = 0$  であるから, 方程式 (4.8) は次のように書き換えられる.

$$x_i = \text{sgn}(w_{i,i+1}x_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.10)$$

さらに, すべての  $i (= 1, 2, \dots, n)$  において  $x_i = +1$  または  $x_i = -1$  であるから, 方程式 (4.10) は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 \text{sgn}(w_{n1}) \\ x_{n-1} &= x_n \text{sgn}(w_{n-1,n}) = x_1 \text{sgn}(w_{n1}w_{n-1,n}) \\ &\vdots \\ x_2 &= x_3 \text{sgn}(w_{23}) = x_1 \text{sgn}(w_{n1}w_{n-1,n} \cdots w_{34}w_{23}) \\ x_1 &= x_2 \text{sgn}(w_{12}) = x_1 \text{sgn}(w_{n1}w_{n-1,n} \cdots w_{12}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

方程式 (4.11) の最後の式より, 解が存在するための必要条件として,

$$w_{n1} w_{n-1,n} \cdots w_{12} > 0 \quad (4.12)$$

を得る. 逆に, 1重テイパー行列  $W$  が条件 (4.12) を満足すれば, 方程式 (4.10) は  $x_1 = +1$  である解をただ1つもつ ( $x_1 = +1$  とすれば (4.11) より,  $x_2, x_3, \dots, x_n$  が一意的に決まる). したがって, 次の定理を得る.

**定理 4.1** 結合行列  $W$  が1重テイパー行列であるとき,  $x_1 = +1$  である解の個数は0または1である. ■

次に,  $k = 2$  の場合について考察する. このとき,  $j \neq i + 1, i + 2$  であるすべての  $(i, j)$  に対して,  $w_{ij} = 0$  であるから, 方程式 (4.8) は次のように書き換えられる.

$$x_i = \text{sgn}(w_{i,i+1}x_{i+1} + w_{i,i+2}x_{i+2}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

この式の右辺は, 条件 (4.4) により  $w_{i,i+1}x_{i+1}$  の値によってのみ決まるので,  $k = 2$  のときの解集合は,  $w_{i,i+2} = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) とおいても変わらない. したがって, 次の定理を得る.

**定理 4.2** 結合行列  $W$  が2重テイパー行列であるとき,  $x_1 = +1$  である解の個数は0または1である. ■

### 4.3.2 $k = 3$ の場合

結合行列  $W$  が 3 重テイパー行列のとき, 方程式 (4.8) は,

$$x_i = \text{sgn}(w_{i,i+1}x_{i+1} + w_{i,i+2}x_{i+2} + w_{i,i+3}x_{i+3}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となり, (4.9) は,

$$w_{i,i+1}x_i x_{i+1} + w_{i,i+2}x_i x_{i+2} + w_{i,i+3}x_i x_{i+3} > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

となる. ここで, 与えられた行列  $W$  に対して, 3次元2値ベクトルの集合  $S_i(W)$  を,

$$S_i(W) \equiv \{ [y_1, y_2, y_3]^T \mid \sum_{j=1}^3 w_{i,i+j} y_j > 0, y_j = \pm 1 \} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.13)$$

によって定義し, 2値ベクトル  $x$  に対して, 3次元2値ベクトル  $C_i(x)$  を

$$C_i(x) \equiv [x_i x_{i+1}, x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3}]^T \quad (4.14)$$

によって定義すると,  $x$  が方程式 (4.8) の解であるための必要十分条件は次のようになる.

$$C_i(x) \in S_i(W) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.15)$$

解の最大個数を調べるために, まず  $S_i(W)$  や 3次元2値ベクトルの列  $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$  の性質を明らかにする. 以下では, すべての3次元2値ベクトルを, 以下の  $b^p$  ( $p = 0, 1, 2, 3$ ) を用いて,  $+b^j$  または  $-b^j$  と表現する.

$$b^0 \equiv [+1, +1, +1]^T$$

$$b^1 \equiv [+1, +1, -1]^T$$

$$b^2 \equiv [+1, -1, +1]^T$$

$$b^3 \equiv [+1, -1, -1]^T$$

いま,  $w_{i,i+j} > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) として,  $S_i(W)$  を求めてみる. 式 (4.4) より明らかに,  $+b^0, +b^1, +b^2$  は  $S_i(W)$  に含まれる. さらに,  $w_{i,i+1} - w_{i,i+2} - w_{i,i+3}$  が正 (負) ならば,  $+b^3$  ( $-b^3$ ) が  $S_i(W)$  に含まれるので, 結局,  $w_{i,i+j} > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) である  $W$  に対しては,

$$S_i(W) = \{ +b^0, +b^1, +b^2, +b^3 \}$$

または

$$S_i(W) = \{ +b^0, +b^1, +b^2, -b^3 \}$$



であることがわかる。同様にして,  $w_{i,i+j}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) の符号のあらゆる組合せについて  $S_i(W)$  を求めた結果を表 4.1 に示す。

ここで,  $S_i(W)$  に関する性質を以下の補題 4.1 と 4.2 に示す。補題 4.1 は  $S_i(W)$  の定義から直ちに得られ, 補題 4.2 は表 4.1 から直ちに得られる。

**補題 4.1**  $S_i(W)$  は各  $p$  ( $= 0, 1, 2, 3$ ) について  $+b^p$  と  $-b^p$  のどちらか一方だけを含む。

**補題 4.2** いかなる  $W$  および  $i$  に対しても, 次の4つのうち少なくとも1つは真である。

- (i)  $+b^0$  と  $+b^1$  がともに  $S_i(W)$  に含まれる。
- (ii)  $+b^2$  と  $+b^3$  がともに  $S_i(W)$  に含まれる。
- (iii)  $-b^0$  と  $-b^1$  がともに  $S_i(W)$  に含まれる。
- (iv)  $-b^2$  と  $-b^3$  がともに  $S_i(W)$  に含まれる。

補題 4.1, 4.2 より次の補題が得られる。

**補題 4.3**  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  を異なる2つの2値ベクトルとする。このとき,  $C_i(x^{(1)}) = -C_i(x^{(2)})$  となる  $i$  が存在するならば,  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の少なくとも1つは解ではない。

**証明:**  $C_{i_0}(x^{(1)}) = -C_{i_0}(x^{(2)})$  であるとする。  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の両方が解であるためには,  $C_{i_0}(x^{(1)})$  と  $C_{i_0}(x^{(2)}) (= -C_{i_0}(x))$  がともに  $S_{i_0}$  に含まれなければならないが, 補題 4.1 より, これは不可能である。 ■

また,  $C_i(x)$  の定義より次の補題が得られる。

**補題 4.4**  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  を異なる2つの2値ベクトルとする。このとき,  $C_i(x^{(1)}) = C_i(x^{(2)})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が成り立つのは,  $x^{(1)} = -x^{(2)}$  のときかつそのときに限られる。

**証明:** もし  $x^{(1)} = -x^{(2)}$  ならば,

$$\begin{aligned} C_i(x^{(1)}) &= [x_i^{(1)}x_{i+1}^{(1)}, x_i^{(1)}x_{i+2}^{(1)}, x_i^{(1)}x_{i+3}^{(1)}]^T \\ &= [(-x_i^{(2)})(-x_{i+1}^{(2)}), (-x_i^{(2)})(-x_{i+2}^{(2)}), (-x_i^{(2)})(-x_{i+3}^{(2)})] \\ &= [x_i^{(2)}x_{i+1}^{(2)}, x_i^{(2)}x_{i+2}^{(2)}, x_i^{(2)}x_{i+3}^{(2)}]^T \\ &= C_i(x^{(2)}) \end{aligned}$$

がすべての  $i$  について成り立つ。また,  $x^{(1)} \neq -x^{(2)}$  ならば,  $x_{i_0}^{(1)} = x_{i_0}^{(2)}$  かつ  $x_{i_0+1}^{(1)} = -x_{i_0+1}^{(2)}$  であるような  $i_0$  が必ず存在する。この  $i_0$  に対して,  $x_{i_0}^{(1)}x_{i_0+1}^{(1)} = -x_{i_0}^{(2)}x_{i_0+1}^{(2)}$  が成り立つので,  $C_{i_0}(x^{(1)}) \neq C_{i_0}(x^{(2)})$  となる。 ■

$w_{i,i+1}$	$w_{i,i+2}$	$w_{i,i+3}$	$ w_{i,i+1}  -  w_{i,i+2}  -  w_{i,i+3} $	$S_i(W)$
+	+	+	+	$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3\}$
			-	$\{+b^0, +b^1, +b^2, -b^3\}$
+	+	-	+	$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3\}$
			-	$\{+b^0, +b^1, -b^2, +b^3\}$
+	-	+	+	$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3\}$
			-	$\{+b^0, -b^1, +b^2, +b^3\}$
+	-	-	+	$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3\}$
			-	$\{-b^0, +b^1, +b^2, +b^3\}$
-	+	+	+	$\{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3\}$
			-	$\{+b^0, -b^1, -b^2, -b^3\}$
-	+	-	+	$\{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3\}$
			-	$\{-b^0, +b^1, -b^2, -b^3\}$
-	-	+	+	$\{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3\}$
			-	$\{-b^0, -b^1, +b^2, -b^3\}$
-	-	-	+	$\{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3\}$
			-	$\{-b^0, -b^1, -b^2, +b^3\}$

表 4.1:  $w_{i,i+1}, w_{i,i+2}, w_{i,i+3}$  と  $S_i(W)$  の関係

ここで、ある2値ベクトル  $x$  に対する  $C_i(x)$  と  $C_{i+1}(x)$  の関係について調べる。例えば、 $C_i(x) = +b^0$  としよう。すると、 $x_i x_{i+1} = x_i x_{i+2} = x_i x_{i+3} = +1$  であるから、

$$x_{i+1} x_{i+2} = x_i x_{i+1} \cdot x_i x_{i+2} = +1$$

$$x_{i+1} x_{i+3} = x_i x_{i+1} \cdot x_i x_{i+3} = +1$$

が成り立つ。これより、 $C_{i+1}(x)$  は、

$$\begin{aligned} C_{i+1}(x) &= [1, 1, x_{i+1} x_{i+4}]^T \\ &= \begin{cases} [+1, +1, +1]^T & (x_{i+4} = x_{i+1} \text{ のとき}) \\ [+1, +1, -1]^T & (x_{i+4} = -x_{i+1} \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

となる。すなわち、 $C_i(x) = +b^0$  ならば  $C_{i+1}(x)$  は  $+b^0$  または  $+b^1$  であることがわかる。同様にして、 $C_i(x)$  のあらゆる値に対して、 $C_{i+1}(x)$  のとりうる値を調べることができる。その結果を表4.2に示す。一方、 $C_i(x)$  の各値に対して、 $C_{i-1}(x)$  のとり得る値が表4.2から直ちに求まる。この関係を表4.3に示す。

2つの3次元2値ベクトル  $y^{(1)}$ ,  $y^{(2)}$  に対して、 $y^{(1)}$  が表4.2の左側の列に存在し、かつ  $y^{(2)}$  が  $y^{(1)}$  と同じ行の右側の列に存在するとき、“ $y^{(2)}$  は  $y^{(1)}$  に続く”という。 $n$ 個の3次元2値ベクトルの列  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$  において、 $y^{(i+1)}$  が  $y^{(i)}$  に続く ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ということは、 $C_i(x) = y^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) を満足する  $x$  が存在することを意味する。また、補題4.4より、そのような  $x$  は符号だけが異なる2つのベクトルに限られる。

**補題 4.5** 行列  $W$  が与えられたときに、以下の (i), (ii) の条件を満足する  $n$  個の3次元ベクトルの列  $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$  が存在するならば、このベクトル列に対応する解  $x$  (ただし、 $x_i = +1$ ) が1つ存在する。

(i)  $y^{(i)} \in S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

(ii)  $y^{(i+1)}$  は  $y^{(i)}$  に続く. ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$C_i(x)$	$C_{i+1}(x)$
$+b^0$	$+b^0$ または $+b^1$
$+b^1$	$+b^2$ または $+b^3$
$+b^2$	$-b^3$ または $-b^2$
$+b^3$	$-b^1$ または $-b^0$
$-b^0$	$+b^0$ または $+b^1$
$-b^1$	$+b^2$ または $+b^3$
$-b^2$	$-b^3$ または $-b^2$
$-b^3$	$-b^1$ または $-b^0$

表 4.2:  $C_i(x)$  に対する  $C_{i+1}(x)$  の可能性

$C_i(x)$	$C_{i-1}(x)$
$+b^0$	$+b^0$ または $-b^0$
$+b^1$	$+b^0$ または $-b^0$
$+b^2$	$+b^1$ または $-b^1$
$+b^3$	$+b^1$ または $-b^1$
$-b^0$	$+b^2$ または $-b^2$
$-b^1$	$+b^2$ または $-b^2$
$-b^2$	$+b^3$ または $-b^3$
$-b^3$	$+b^3$ または $-b^3$

表 4.3:  $C_i(x)$  に対する  $C_{i-1}(x)$  の可能性

補題 4.5 を利用してすべての解を求めるのであるが、簡単のために有向グラフを利用する。与えられた行列  $W$  から以下の手順に従って有向グラフ  $G(W)$  を構成する。

1.  $4n$  個の節点  $N_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3, 4$ ) を  $n$  行 4 列の格子状に配置する。ただし、節点  $N_{ij}$  は集合  $S_i(W)$  の  $j$  番目の要素に対応する。
2.  $i = 1, 2, \dots, n$  について、 $S_{i+1}(W)$  の  $k$  番目の要素が  $S_i(W)$  の  $j$  番目の要素に続くならば、節点  $N_{ij}$  から節点  $N_{i+1,k}$  に有向枝を描く。

補題 4.5 は、グラフ  $G(W)$  に閉路が存在すれば、その閉路に対応する解  $x$  (ただし、 $x_1 = +1$ ) が 1 つ存在することを意味しているので、方程式の解の個数を調べるためには、グラフ中に存在する閉路の個数を調べればよい。

例 4.2 次の 3 重テイパー行列  $W$  に対する解を、グラフ  $G(W)$  を利用してすべて求める。

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 4.0 & 3.0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5.0 & -4.0 & -3.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.0 & -2.5 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.0 & -5.0 & -3.0 \\ -1.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.0 & 2.0 \\ 3.0 & -2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0 \\ -4.5 & 3.5 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

表 4.1 をもとに、上の  $W$  に対する  $S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, 7$ ) を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_1(W) &= \{+b^0, +b^1, +b^2, -b^3\} \\ S_2(W) &= \{-b^0, -b^1, -b^2, +b^3\} \\ S_3(W) &= \{-b^0, -b^1, +b^2, -b^3\} \\ S_4(W) &= \{-b^0, -b^1, -b^2, +b^3\} \\ S_5(W) &= \{-b^0, +b^1, -b^2, -b^3\} \\ S_6(W) &= \{+b^0, +b^1, -b^2, +b^3\} \\ S_7(W) &= \{+b^0, -b^1, -b^2, -b^3\} \end{aligned}$$

先に示した手順に従い，グラフ  $G(W)$  を描くと図 4.2(a) のようになる．グラフ  $G(W)$  において 3 つの閉路が存在するから，3 つの解が存在する．その 3 つの解は，

$$x^{(1)} = [+1, +1, +1, -1, -1, +1, +1]^T$$

$$x^{(2)} = [+1, +1, -1, +1, -1, -1, -1]^T$$

$$x^{(3)} = [+1, -1, +1, +1, -1, +1, -1]^T$$

である．

次に，解の最大個数に関わる重要な補題を与える．

**補題 4.6**  $x^{(1)}, x^{(2)}$  (ただし,  $x_1^{(1)} = 1, x_1^{(2)} = 1$ ) が 2 つの異なる解であるならば，すべての  $i (= 1, 2, \dots, n)$  について  $C_i(x^{(1)}) \neq C_i(x^{(2)})$  である．

**証明**：背理法で証明する．いま，ある  $i$  で  $C_i(x^{(1)}) = C_i(x^{(2)})$  が成り立つとする．一般性を失うことなく， $C_n(x^{(1)}) = C_n(x^{(2)})$  とする．このとき， $x^{(1)}, x^{(2)}$  はどちらも解であるから， $C_{n-1}(x^{(1)}) = C_{n-1}(x^{(2)})$  でなければならない (もし  $C_{n-1}(x^{(1)}) \neq C_{n-1}(x^{(2)})$  ならば，表 4.3 より， $C_{n-1}(x^{(1)}) = -C_{n-1}(x^{(2)})$  であるが，このとき補題 4.3 より， $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の少なくとも 1 つは解ではないので，仮定と矛盾する)．同様の理由から， $C_{n-2}(x^{(1)}) = C_{n-2}(x^{(2)})$ ， $C_{n-3}(x^{(1)}) = C_{n-3}(x^{(2)})$ ， $\dots$ ， $C_1(x^{(1)}) = C_1(x^{(2)})$  でなければならない．すなわち，補題 4.4 より， $x^{(1)} = x^{(2)}$  でなければならないことになる．これは， $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  が異なるという仮定と矛盾する． ■

補題 4.6 は，有向グラフ  $G(W)$  においては次の補題に相当する．

**補題 4.7** グラフ  $G(W)$  に 2 つの異なるループが存在するとすれば，その 2 つのループは同じ節点を通らない． ■

補題 4.6 または補題 4.7 より直ちに次の補題を得る．

**補題 4.8**  $x_1 = +1$  である解の個数はたかだか 4 である． ■

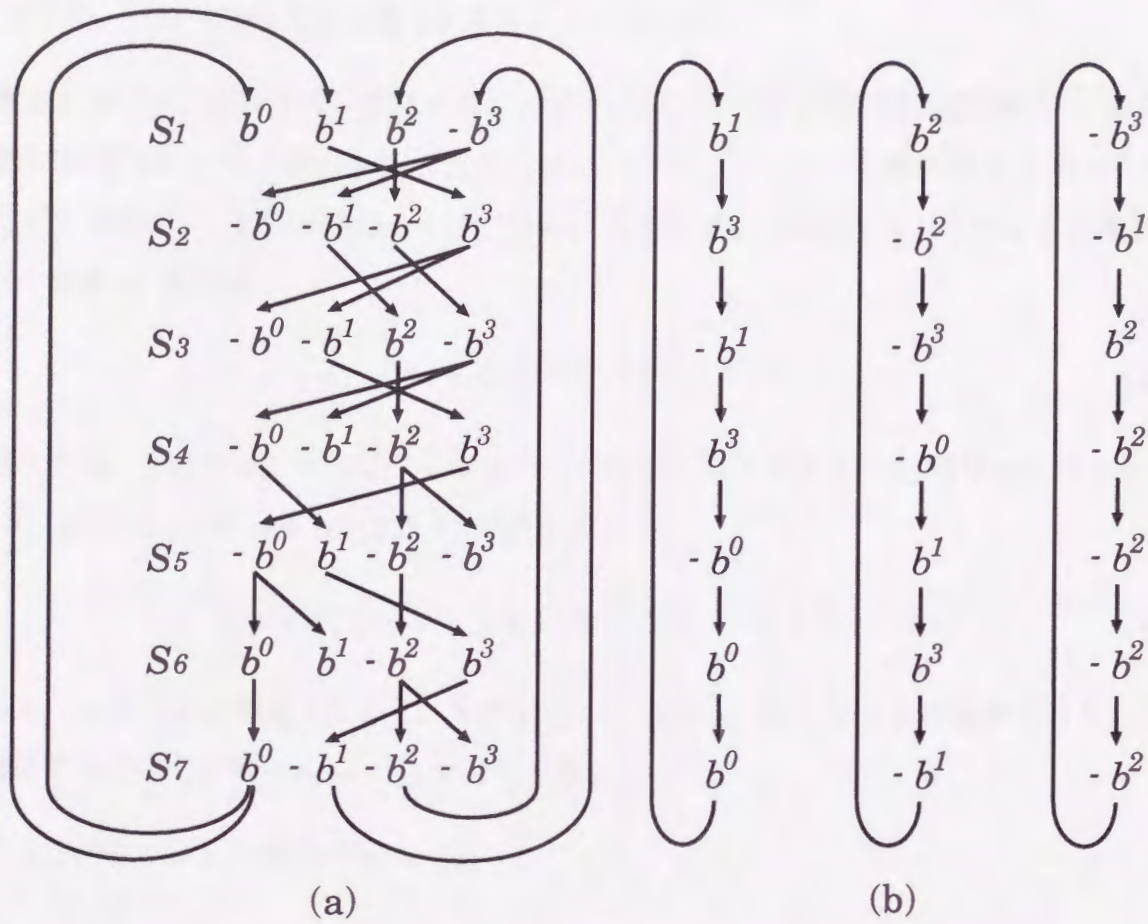


図 4.2: (a) 有向グラフ  $G(W)$  (b) 有向グラフ  $G(W)$  に存在する 3 つの閉路

さらに、補題 4.2 および補題 4.8 より次の定理を得る。

**定理 4.3**  $W$  が 3 重テイパー行列であるとき、 $x_1 = +1$  である解の最大個数は 3 である。

**証明：** 補題 4.8 より、解の個数はたかだか 4 である。よって、4 個の異なる解  $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  (ただし、 $x_1^{(m)} = 1 (m = 1, 2, 3, 4)$ ) が存在すると仮定する。このとき、補題 4.6 より、 $m \neq m'$  ならば、

$$C_i(x^{(m)}) \neq C_i(x^{(m')}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.17)$$

が成り立つ。すなわち、すべての  $i$  について、 $C_i(x^{(m)}) (m = 1, 2, 3, 4)$  は互いに異なる。また、 $C_i(x^{(m)}) \in S_i(W) (m = 1, 2, 3, 4)$  であるから、

$$\{C_i(x^{(m)}) \mid m = 1, 2, 3, 4\} = S_i(W) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.18)$$

である。このことと補題 4.2 より、すべての  $i$  について、以下の 4 つの条件のうちの 1 つを満足する  $x^{(m_1)}, x^{(m_2)} (m_1 \neq m_2)$  が存在する。

(i)  $C_i(x^{(m_1)}) = +b^0, C_i(x^{(m_2)}) = +b^1$

(ii)  $C_i(x^{(m_1)}) = +b^2, C_i(x^{(m_2)}) = +b^3$

(iii)  $C_i(x^{(m_1)}) = -b^0, C_i(x^{(m_2)}) = -b^1$

(iv)  $C_i(x^{(m_1)}) = -b^2, C_i(x^{(m_2)}) = -b^3$

(i) を満足する  $x^{(m_1)}, x^{(m_2)}$  が存在する場合について考える。このとき、表 4.3 より、 $C_{i-1}(x^{(m_1)}), C_{i-1}(x^{(m_2)})$  はともに  $+b^0$  または  $-b^0$  でなければならない。(4.17) によって  $C_{i-1}(x^{(m_1)})$  と  $C_{i-1}(x^{(m_2)})$  は異なるので、 $C_{i-1}(x^{(m_1)}) = +b^0 (-b^0)$  ならば  $C_{i-1}(x^{(m_2)}) = -b^0 (+b^0)$  でなければならない。すなわち、 $C_{i-1}(x^{(m_1)}) = -C_{i-1}(x^{(m_2)})$  が必ず成立する。このとき、補題 4.3 より、 $x^{(m_1)}$  と  $x^{(m_2)}$  の少なくとも 1 つは解ではない。

同様にして、(ii), (iii), (iv) の場合にも、 $x^{(m)}$  と  $x^{(m')}$  の少なくとも 1 つは解でないことが導かれる。

以上より、解の個数がたかだか 3 であることがわかった。3 個の解をもつ  $W$  の存在がすでに例 4.2 によって示されているので、解の最大個数は 3 である。 ■

これまでの議論から明らかであるように、解の最大個数が  $n$  に依存していないことに注意する。



4.3.3  $k = 4$  の場合

この場合にも、 $k = 3$  のときと同様の議論を行うことによって解の最大個数を厳密に評価することができる。

$W$  を 4 重テイパー行列とすると、4 次元 2 値ベクトルの集合  $S_i(W)$  を次式によって定義する。

$$S_i(W) = \{ [y_1, y_2, y_3, y_4]^T \mid \sum_{j=1}^4 w_{i,i+j} y_j > 0, y_j = \pm 1 \} \quad (4.19)$$

また、2 値ベクトル  $x$  が与えられたとき、4 次元 2 値ベクトル  $C_i(x)$  を次式で定義する。

$$C_i(x) = [x_i x_{i+1}, x_i x_{i+2}, x_i x_{i+3}, x_i x_{i+4}]^T \quad (4.20)$$

これらの定義を用いると、2 値ベクトル  $x$  が方程式 (4.8) の解であるための必要十分条件は、

$$C_i(x) \in S_i(W) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

と表される。本来ならば、4.3.2 節で定義した  $S_i(W)$ ,  $C_i(x)$  と上で定義した  $S_i(W)$ ,  $C_i(x)$  は異なるものであるから記号を変えるべきであるが、混同のおそれがないので、簡単のため同じ記号を用いる。

以下では、すべての 4 次元 2 値ベクトルを、以下の  $b^j$  ( $j = 0, 1, \dots, 7$ ) を用いて、 $+b^j$  または  $-b^j$  の形で表現する。

$$b^0 \equiv [+1, +1, +1, +1]^T$$

$$b^1 \equiv [+1, +1, +1, -1]^T$$

$$b^2 \equiv [+1, +1, -1, +1]^T$$

$$b^3 \equiv [+1, +1, -1, -1]^T$$

$$b^4 \equiv [+1, -1, +1, +1]^T$$

$$b^5 \equiv [+1, -1, +1, -1]^T$$

$$b^6 \equiv [+1, -1, -1, +1]^T$$

$$b^7 \equiv [+1, -1, -1, -1]^T$$

$S_i(W)$  の定義 (4.19) より明らかに次の補題が成立する。

**補題 4.9** 各  $p (= 0, 1, 2, \dots, 7)$  に対して、 $S_i(W)$  は  $b^p$  と  $-b^p$  のどちらか一方を必ず含み、かつ両方を含むことはない。 ■

補題 4.9 より  $S_i(W)$  はつねに 8 個のベクトルを含み, その肩符はすべて異なることができる. さらに,  $w_{i,i+1}, w_{i,i+2}, w_{i,i+3}, w_{i,i+4}$  のあらゆる値に対する  $S_i(W)$  を調べることでより次の補題を得る.

補題 4.10 集合  $S_i(W)$  は次の (i), (ii), (iii) のいずれかの性質を必ず満足する.

- (i) すべてのベクトルの符号が同じである. この性質を満足する  $S_i(W)$  は以下に示す 2 種類だけである.

$$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, +b^6, +b^7\}$$

$$\{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3, -b^4, -b^5, -b^6, -b^7\}$$

- (ii) 8 個のベクトルのうち, 7 つの符号が同じである. この性質を満足する  $S_i(W)$  は,

$$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, +b^6, -b^7\}$$

$$\{-b^0, +b^1, -b^2, -b^3, -b^4, -b^5, -b^6, -b^7\}$$

などであり, 全部で 16 種類存在する.

- (iii) 8 個のベクトルは,  $-b^j$  と  $-b^{j+1}$  ( $j$  は偶数) を除き符号がすべて + であるか, または,  $+b^j$  と  $+b^{j+1}$  ( $j$  は偶数) を除き符号がすべて - である. この性質を満足する  $S_i(W)$  は,

$$\{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, -b^6, -b^7\}$$

$$\{-b^0, -b^1, +b^2, +b^3, -b^4, -b^5, -b^6, -b^7\}$$

などであり, このような  $S_i(W)$  は全部で 8 種類存在する. ■

$C_i(x)$  に関しては, 補題 4.3, 4.4 が  $k=4$  の場合にもそのまま適用できる.

補題 4.11  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  を異なる 2 つのベクトルとする. このとき,  $C_i(x^{(1)}) = -C_i(x^{(2)})$  となる  $i$  が存在するならば,  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の少なくとも 1 つは解ではない. ■

補題 4.12  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  を異なる 2 つのベクトルとする. このとき,  $C_i(x^{(1)}) = C_i(x^{(2)})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が成り立つのは,  $x^{(1)} = -x^{(2)}$  のときかつそのときに限られる. ■

また,  $C_i(x)$  と  $C_{i+1}(x)$  の関係を調べると表 4.4 のようになり, 表 4.4 から  $C_i(x)$  と  $C_{i-1}(x)$  の関係が直ちに得られるので, その関係を表 4.5 に示す.

$C_i(x)$	$C_{i+1}(x)$	$C_i(x)$	$C_{i+1}(x)$
$+b^0$	$+b^0$ or $+b^1$	$-b^0$	$+b^0$ or $+b^1$
$+b^1$	$+b^2$ or $+b^3$	$-b^1$	$+b^2$ or $+b^3$
$+b^2$	$+b^4$ or $+b^5$	$-b^2$	$+b^4$ or $+b^5$
$+b^3$	$+b^6$ or $+b^7$	$-b^3$	$+b^6$ or $+b^7$
$+b^4$	$-b^6$ or $-b^7$	$-b^4$	$-b^6$ or $-b^7$
$+b^5$	$-b^4$ or $-b^5$	$-b^5$	$-b^4$ or $-b^5$
$+b^6$	$-b^2$ or $-b^3$	$-b^6$	$-b^2$ or $-b^3$
$+b^7$	$-b^0$ or $-b^1$	$-b^7$	$-b^0$ or $-b^1$

表 4.4:  $C_i(x)$  に対する  $C_{i+1}(x)$  の可能性

$C_i(x)$	$C_{i-1}(x)$	$C_i(x)$	$C_{i-1}(x)$
$+b^0$	$+b^0$ or $-b^0$	$-b^0$	$+b^7$ or $-b^7$
$+b^1$	$+b^0$ or $-b^0$	$-b^1$	$+b^7$ or $-b^7$
$+b^2$	$+b^1$ or $-b^1$	$-b^2$	$+b^6$ or $-b^6$
$+b^3$	$+b^1$ or $-b^1$	$-b^3$	$+b^6$ or $-b^6$
$+b^4$	$+b^2$ or $-b^2$	$-b^4$	$+b^5$ or $-b^5$
$+b^5$	$+b^2$ or $-b^2$	$-b^5$	$+b^5$ or $-b^5$
$+b^6$	$+b^3$ or $-b^3$	$-b^6$	$+b^4$ or $-b^4$
$+b^7$	$+b^3$ or $-b^3$	$-b^7$	$+b^4$ or $-b^4$

表 4.5:  $C_i(x)$  に対する  $C_{i-1}(x)$  の可能性

表 4.5 から次の補題が得られる。証明は補題 4.6 と同様にできるので省略する。

補題 4.13  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  (ただし,  $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = 1$ ) が 2 つの異なる解であるならば,

$$C_i(x^{(1)}) \neq C_i(x^{(2)}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.21)$$

が成り立つ。 ■

補題 4.9 より,  $S_i(W)$  は 8 個の異なる 4 次元 2 値ベクトルからなる集合であるので, 補題 4.13 は  $x_1 = +1$  である解の個数がたかだか 8 個であることを示している。

表 4.5 および補題 4.11, 4.13 より次の補題を得る。

補題 4.14  $p$  を 0 から 6 までの任意の偶数であるとする。2 つの 2 値ベクトル  $x^{(1)}$  (ただし  $x_1^{(1)} = +1$ ),  $x^{(2)}$  (ただし,  $x_1^{(2)} = +1$ ) に対し, ある  $i$  で,

$$C_i(x^{(1)}) = +b^p, \quad C_i(x^{(2)}) = +b^{p+1}$$

または,

$$C_i(x^{(1)}) = -b^p, \quad C_i(x^{(2)}) = -b^{p+1}$$

となるならば,  $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  が同時に解になることはない。

証明: 2 つの 2 値ベクトル  $x^{(1)}$ ,  $x^{(2)}$  に対し,

$$C_n(x^{(1)}) = +b^p, \quad C_n(x^{(2)}) = +b^{p+1}$$

または,

$$C_n(x^{(1)}) = -b^p, \quad C_n(x^{(2)}) = -b^{p+1}$$

となるならば, 表 4.5 より,

$$C_{n-1}(x^{(1)}) = +b^q \quad \text{または} \quad -b^q$$

$$C_{n-1}(x^{(2)}) = +b^q \quad \text{または} \quad -b^q$$

である ( $q$  は  $p$  の値によって決まる) ので,  $C_{n-1}(x^{(1)})$  の値と  $C_{n-1}(x^{(2)})$  の値の組合せとしては, 以下の 4 つの場合が考えられる。

(a)  $C_{n-1}(x^{(1)}) = +b^q, \quad C_{n-1}(x^{(2)}) = +b^q$

(b)  $C_{n-1}(x^{(1)}) = +b^q, \quad C_{n-1}(x^{(2)}) = -b^q$

---

$$(c) C_{n-1}(x^{(1)}) = -b^q, \quad C_{n-1}(x^{(2)}) = +b^q$$

$$(d) C_{n-1}(x^{(1)}) = -b^q, \quad C_{n-1}(x^{(2)}) = -b^q$$

(a) または (b) の場合には、補題 4.13 より、 $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の少なくとも 1 つは解でなく、(c) または (d) の場合には、補題 4.11 より、 $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  の少なくとも 1 つは解でない。したがって、いずれの場合においても、 $x^{(1)}$  と  $x^{(2)}$  が異なる 2 つの解であるという仮定に矛盾する。 ■

補題 4.14 および補題 4.10 より次の定理を得る。

**定理 4.4**  $W$  が 4 重テイパー行列であるとき、方程式 (4.8) の解  $x$  ( $x_1 = 1$ ) の最大個数は 4 である。

**証明:**  $S_i(W)$  は補題 4.10 の (i), (ii), (iii) のいずれかの性質を満足する。 $S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) のなかに (i) または (ii) の性質を満足するものが存在すれば、補題 4.14 より  $x_1 = +1$  である解の個数はたかだか 4 であることがいえる。また、 $S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) がすべて (ii) を満足するならば  $x_1 = +1$  である解の個数はたかだか 5 であることが直ちにわかる。以下では、 $S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) がすべて (ii) を満足するときにも、 $x_1 = 1$  である解の個数がたかだか 4 個であることを示す。

いま、ある  $i$  で

$$S_i(W) = \{-b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, +b^6, +b^7\}$$

であるとし、この  $W$  に対して方程式 (4.8) が 5 つの異なる解  $x^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) をもつとする。ただし、 $x_1^{(j)} = 1$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) である。このとき、すべての  $i$  ( $= 1, 2, \dots, n$ ) について、

$$\{C_i(x^{(1)}), C_i(x^{(2)}), C_i(x^{(3)}), C_i(x^{(4)}), C_i(x^{(5)})\} \subset S_i(W) \quad (4.22)$$

が成り立つ。一般性を失うことなく、

$$C_i(x^{(1)}) = -b^0$$

$$C_i(x^{(2)}) = +b^1$$

$$C_i(x^{(3)}) = +b^2 \quad \text{または} \quad +b^3$$

$$C_i(x^{(4)}) = +b^4 \quad \text{または} \quad +b^5$$

$$C_i(x^{(5)}) = +b^6 \quad \text{または} \quad +b^7$$

とすれば, 表 4.5 より,

$$C_{i-1}(x^{(1)}) = +b^7 \quad \text{または} \quad -b^7$$

$$C_{i-1}(x^{(2)}) = +b^0 \quad \text{または} \quad -b^0$$

$$C_{i-1}(x^{(3)}) = +b^1 \quad \text{または} \quad -b^1$$

$$C_{i-1}(x^{(4)}) = +b^2 \quad \text{または} \quad -b^2$$

$$C_{i-1}(x^{(5)}) = +b^3 \quad \text{または} \quad -b^3$$

が得られる. もし,

$$C_{i-1}(x^{(2)}) = +b^0, \quad C_{i-1}(x^{(3)}) = +b^1$$

または,

$$C_{i-1}(x^{(2)}) = -b^0, \quad C_{i-1}(x^{(3)}) = -b^1$$

であれば補題 4.14 により  $x^{(2)}$  と  $x^{(3)}$  のどちらか一方は解ではないので,  $C_{i-1}(x^{(2)})$  と  $C_{i-1}(x^{(3)})$  の組合せは, 次のいずれかである.

$$C_{i-1}(x^{(2)}) = +b^0, \quad C_{i-1}(x^{(3)}) = -b^1$$

$$C_{i-1}(x^{(2)}) = -b^0, \quad C_{i-1}(x^{(3)}) = +b^1$$

同様にして,  $C_{i-1}(x^{(4)})$  と  $C_{i-1}(x^{(5)})$  の組合せは, 次のいずれかである.

$$C_{i-1}(x^{(4)}) = +b^2, \quad C_{i-1}(x^{(5)}) = -b^3$$

$$C_{i-1}(x^{(4)}) = -b^2, \quad C_{i-1}(x^{(5)}) = +b^3$$

以上より,  $\{C_{i-1}(x^{(2)}), \dots, C_{i-1}(x^{(5)})\}$  は

$$\{+b^0, -b^1, +b^2, -b^3\}$$

$$\{+b^0, -b^1, -b^2, +b^3\}$$

$$\{-b^0, +b^1, +b^2, -b^3\}$$

$$\{-b^0, +b^1, -b^2, +b^3\}$$

のいずれかである. ところが, それぞれの場合において, 補題 4.10 の (ii) を満足する  $S_{i-1}(W)$  をどのように選んでも (4.22) を満足させることはできない. よって, 5 個の異なる解が存在するという仮定が間違っていたことになる.

補題 4.10 の性質 (ii) を満足するその他の  $S_i(W)$  についても,  $x_1 = 1$  である解の個数がたかだか 4 であることが同様にして証明できる. また, 実際に 4 個の解が存在することが次の例 4.3 によって示されるので, 解の最大個数は 4 である. ■

例 4.3 次の 4 重テイパー行列  $W$  に対する方程式 (4.1) の解を調べる.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 6 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & -6 & -4 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 0 & -6 \\ 6 & -4 & -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この行列から得られる  $S_i(W)$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) を調べると次のようになる.

$$S_1(W) = \{-b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, +b^6, +b^7\}$$

$$S_2(W) = \{+b^0, +b^1, +b^2, -b^3, +b^4, +b^5, +b^6, +b^7\}$$

$$S_3(W) = \{+b^0, +b^1, +b^2, +b^3, +b^4, -b^5, +b^6, +b^7\}$$

$$S_4(W) = \{-b^0, -b^1, -b^2, -b^3, -b^4, -b^5, +b^6, -b^7\}$$

$$S_5(W) = \{-b^0, +b^1, -b^2, -b^3, -b^4, -b^5, -b^6, -b^7\}$$

$$S_6(W) = \{+b^0, -b^1, +b^2, +b^3, +b^4, +b^5, +b^6, +b^7\}$$

このとき,

$$x^{(1)} = [+1, -1, -1, -1, -1, +1]^T$$

$$x^{(2)} = [+1, +1, +1, -1, +1, -1]^T$$

$$x^{(3)} = [+1, +1, +1, +1, -1, +1]^T$$

$$x^{(4)} = [+1, +1, -1, -1, +1, +1]^T$$

の 4 つのベクトルは方程式 (4.8) の解になる. これらのベクトルに対して,  $C_i(x^{(j)})$  ( $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3, 4$ ) を調べた結果を表 4.6 に示す. 表 4.6 より, すべての  $i$  ( $= 1, 2, \dots, n$ ) において,

$$\{C_i(x^{(1)}), C_i(x^{(2)}), C_i(x^{(3)}), C_i(x^{(4)})\} \subset S_i(W)$$

が成り立っていることが確認できる.

以上の結果を表 4.7 にまとめる.

	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$
$C_1(x^{(j)})$	$-b^0$	$+b^2$	$+b^1$	$+b^6$
$C_2(x^{(j)})$	$+b^1$	$+b^5$	$+b^2$	$-b^3$
$C_3(x^{(j)})$	$+b^3$	$-b^5$	$+b^4$	$+b^7$
$C_4(x^{(j)})$	$+b^6$	$-b^4$	$-b^7$	$-b^0$
$C_5(x^{(j)})$	$-b^3$	$-b^7$	$-b^0$	$+b^1$
$C_6(x^{(j)})$	$+b^7$	$-b^1$	$+b^0$	$+b^3$

表 4.6: 例 4.2 の  $W$  に対する解  $x^{(j)}$  に対する  $C_j(x^{(j)})$  の値

$k$	1	2	3	4
第 1 要素が +1 である解の最大個数	1	1	3	4

表 4.7:  $k \leq 4$  の場合の解の最大個数



#### 4.4 $W$ が $n-1$ 重テイパー行列の場合

前節では、 $k \leq 4$  の場合における解の最大個数が、2 値ベクトルの総数  $2^n$  に比べて極めて少なく、 $n$  に依らないことを示した。このことは、任意の  $k$  に対しても解の個数が少ないことを示しているように思われる。 $k$  が大きくなるにしたがって解の最大個数が増えることは明らかであるので、問題はそれがどのようにして増加するかである。 $k$  が大きくなると、前節と同様な議論をそのまま適用することは非常に難しい。よって、本節では、 $k = n-1$  の特殊な場合を取り扱い、その場合の解の最大個数を調べることにより、 $k = n-1$  の場合の解の最大個数の下限を与える。

本節で取り扱う  $W$  のクラスの定義を下に示す。

**定義 4.2**  $n$  次の正方行列  $A$  が、

$$(i) \ a_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$(ii) \ |a_{ij}| = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$$

の 2 つの条件を満足するとき、 $A$  は零対角 2 値行列であるという。特に、零対角 2 値行列  $A$  が巡回行列であるならば、 $A$  は巡回形零対角 2 値行列であるという。

明らかに、零対角 2 値行列は  $n-1$  重テイパー行列の特殊な場合である。以下では、結合行列  $W$  として巡回形零対角 2 値行列を用いるので、 $W$  を次のように表す。

$$W = \begin{bmatrix} 0 & w_2 & w_3 & \cdots & w_n \\ w_n & 0 & w_2 & \cdots & w_{n-1} \\ & & \ddots & & \\ w_3 & \cdots & w_n & 0 & w_2 \\ w_2 & w_3 & \cdots & w_n & 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

巡回形零対角 2 値行列である  $W$  は、第 1 行が決まれば行列全体が決まるので、 $w_2, w_3, \dots, w_n$  の  $n-1$  個のパラメータをもつ。

テイパー行列の定義 4.1 の (iii) を満足するために、以下では  $n$  を偶数と仮定する。

**補題 4.15** 巡回形零対角 2 値行列 (4.23) が、

$$\begin{cases} w_{\frac{n}{2}+1} = 1 \\ w_{\frac{n}{2}+i} = -w_i \quad (i = 2, 3, \dots, \frac{n}{2}) \end{cases} \quad (4.24)$$

を満足するならば,

$$x_{\frac{n}{2}+i} = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}) \quad (4.25)$$

を満足するすべてのベクトル  $x$  は方程式 (4.1) の解である.

証明: 簡単のため,  $m = \frac{n}{2}$  とおく. (4.24) を満足する巡回形零対角 2 値行列  $W$  は次のように表現される.

$$W = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ただし,  $A$  および  $B$  は,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & w_2 & \cdots & w_{m-1} & w_m \\ -w_m & 0 & w_2 & \cdots & w_{m-1} \\ & & \ddots & & \\ -w_3 & \cdots & -w_m & 0 & w_2 \\ -w_2 & -w_3 & \cdots & -w_m & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -w_2 & \cdots & -w_{m-1} & -w_m \\ w_m & 1 & -w_2 & \cdots & -w_{m-1} \\ & & \ddots & & \\ w_3 & \cdots & w_m & 1 & -w_2 \\ w_2 & w_3 & \cdots & w_m & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる  $m$  次の正方行列であり,  $A$  と  $B$  には  $A+B=E$  ( $E$  は  $m$  次の単位行列を表す) という関係があることに注意する. また, (4.25) を満足する 2 値ベクトル  $x$  は次のように表される.

$$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$$

ただし,  $\alpha$  は任意の  $m$  次元 2 値ベクトルである. このとき,  $Wx$  を計算すると,

$$Wx = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A+B)\alpha \\ (B+A)\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = x$$

となる.  $Wx = x$  ならば明らかに  $\text{sgn}(Wx) = x$  であるから, (4.25) を満足するあらゆる 2 値ベクトルは方程式 (4.1) の解である. ■

(4.25) を満足する 2 値ベクトルは全部で  $2^{\frac{n}{2}}$  個存在するので, 次の補題を得る.

補題 4.16  $W$  が  $n-1$  重テイパー行列である場合の解の最大個数は少なくとも  $2^{\frac{n}{2}}$  である。

■

## 4.5 結論

ニューラルネットワークの平衡点を求める際の基本的な方程式  $x = \text{sgn}(Wx)$  について、 $W$  が  $k$  重テイパー行列である場合の解の最大個数を調べた。  $k$  が 4 以下の場合には、解の最大個数は、 $n$  次元 2 値ベクトルの総数  $2^n$  に比べて極めて少なく、 $n$  に依らないことを示した。

$k$  が増加するにつれて、解の最大個数が増加することは明らかであるが、 $k$  が 4 以下の場合と同様の方法で  $k = 5, 6, \dots$  の場合を調べることは難しいので、 $k = n-1$  の特殊な場合を扱うことにより、 $k$  が増加しても解の最大個数はやはり少ないのか、それとも急激に増加するのかを調べた。その結果、 $k = n-1$  の場合には、解の最大個数が  $n$  に関して指数関数的に増加する例が存在することを示した。このことから、零対角の結合行列をもつニューラルネットワークは一般に多数の平衡点を持つと結論づけられる。

本節では、専ら、解すなわち平衡点の個数に関する議論を行っており、平衡点の安定性や引き込み領域、ネットワークの大域的な収束性については全く言及していない。非対称な結合行列をもつ相互結合型ニューラルネットワークの大域的安定性に関する議論は今後の課題である。

## 第5章

# 巡回形零対角2値結合行列をもつネットワークの平衡点の個数と引き込み領域

### 5.1 緒言

第2章で述べたように、相互結合型ニューラルネットワークを連想記憶へ応用する際の重要な問題に、平衡点の個数やその引き込み領域の広さがある。前者は連想記憶の記憶容量に、後者は汎化能力に深くかかわる問題である。これらの問題を一般的に議論することは極めて難しく、従来の結果のほとんどは、所望記憶ベクトルの集合から外積法等によって構成される、特殊な対称結合ネットワークを対象としている<sup>[1], [4], [5], [14], [17], [18]</sup>。対称結合ネットワークを用いる理由の一つは、大域的な安定性が保証されていることである。

上記の問題に対するアプローチとしては、確率論的手法<sup>[14]</sup>と決定論的手法<sup>[4], [17], [18]</sup>に大別される。確率論的手法においては、所望の平衡点を表すベクトルに1, -1が等確率で現れ、ニューロンの個数は十分大きいという仮定がよく用いられる。その仮定のもとで、記憶容量として $0.15n$  ( $n$ はニューロンの個数を表す)等の値が算出されたり<sup>[1]</sup>、記憶容量と引き込み領域との関係が与えられたりしている<sup>[14]</sup>。しかしながら、従来の構成法によって実際にネットワークを構成すると、所望記憶ベクトル以外の記憶ベクトル(偽記憶)が多数発生し、そのためにネットワークの状態がある記憶ベクトルの近傍にあるにも関わらず、偽記憶や別の記憶ベクトルに収束してしまう、といったことがしばしば生じる。また、偽記憶の数がニューロンの個数に関して指数関数的に増加する場合が存在することは、決定論的立場からも指摘されている<sup>[18]</sup>。

一方、最近では、結合が非対称なネットワークの動的特性に関する研究も盛んに行われており<sup>[19], [20], [34]–[37]</sup>、ネットワークが大域的に安定であるための十分条件などが得られて

いる<sup>[35]</sup>。しかし、結合が非対称なネットワークの平衡点の個数や引き込み領域に関する議論は見当たらない。

本章では、結合行列としてある特殊な巡回行列（一般に非対称である）を用いることにより、ほぼ等しい広さの引き込み領域をもつ平衡点が多数存在する相互結合型ニューラルネットワークが構成できることを示す。このことから、本章の方法によって構成されたネットワークでは、ほとんどの初期状態がそれから最も近い平衡点に収束することが予想される。また、平衡点の個数と引き込み領域との関係を調べ、連想記憶回路構成に関する従来の結果と比較する。

## 5.2 諸定義

本章でも、前章と同じく、 $i$  番目のニューロンの状態更新が、

$$x_i(t+1) = \text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t)\right) \quad (5.1)$$

で表される離散系ニューラルネットワークを考察する。ただし、

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & y > 0 \text{ のとき} \\ -1 & y < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とし、 $\text{sgn}(0)$  は未定義である。各ニューロンが同期して動作するとすれば、ネットワークの動作は、ベクトル形式で、

$$x(t+1) = \text{sgn}(Wx(t)) \quad (5.2)$$

と表され、非同期で動作するとすれば、時刻  $t$  から時刻  $t+1$  に移る際に、ただ1つのニューロンだけが (5.1) に従って状態を更新する。

ネットワークの平衡点は、方程式：

$$x = \text{sgn}(Wx) \quad (5.3)$$

の解であり、平衡点の集合はネットワークの動作が同期式であるか非同期式かに関わらず、 $W$  から一意的に決定される。

以下に、本章で用いる定義を示す。

**定義 5.1** 2つの2値ベクトル  $x = [x_1, \dots, x_n]^T$  と  $x' = [x'_1, \dots, x'_n]^T$  の間の距離  $D(x, x')$  を

$$D(x, x') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i - x'_i|$$

とする。

**定義 5.2** ネットワーク (5.1) の各平衡点  $x^*$  に対して以下の (i), (ii) を満足する整数  $r (\geq 0)$  を  $x^*$  の直接引き込み半径といい,  $R(x^*)$  で表す (図 5.1).

- (i)  $D(x^*, x) \leq r$  であるすべての  $x$  が  $\text{sgn}(Wx) = x^*$  を満足する.
- (ii)  $D(x^*, x) = r + 1$  である  $x$  のなかに,  $\text{sgn}(Wx) = x^*$  を満足しないものが存在する.

本来, ある平衡点の引き込み領域といえは, 十分時間が経てばその平衡点に収束するような初期状態の集合をいう. しかし, 本稿では簡単のため, 専ら定義 5.2 の直接引き込み半径を用いて議論する. 定義 5.2 より, ネットワークの初期状態  $x(0)$  とある平衡点  $x^*$  との距離  $D(x^*, x(0))$  が直接引き込み半径以内であれば, ニューロンの状態更新が同期式か非同期式かによらず, ネットワークは  $x^*$  に収束することがいえる.

以下では,  $W$  が零対角2値行列の場合を扱う. 前節で述べたように, 本稿の目的はある種のネットワークの存在を示すことであるから,

**仮定 5.1** ニューロン数  $n$  は偶数である.

と仮定する. このとき,  $\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j(t)$  は必ず奇数になるので, (5.1) 式の右辺の括弧の中が 0 になることはない.

### 5.3 ネットワークの構成

はじめに, 次の補題を与える.

**補題 5.1** ネットワーク (4.1) の平衡点  $x^*$  が

$$Wx^* = (2k + 1)x^* \quad (0 \leq k) \quad (5.4)$$

を満足するならば,

$$R(x^*) = k \quad (5.5)$$

が成り立つ.

**証明:** はじめに,  $D(x, x^*) \leq k$  を満足するあらゆるベクトル  $x$  に対して  $\text{sgn}(Wx) = x^*$  が成立することを示す. 今,  $D(x, x^*) = l (\leq k)$  とする.  $x$  と  $x^*$  において異なる要素の個数が  $l$  であること, および  $|w_{ij}| = 1 (i \neq j)$  より,

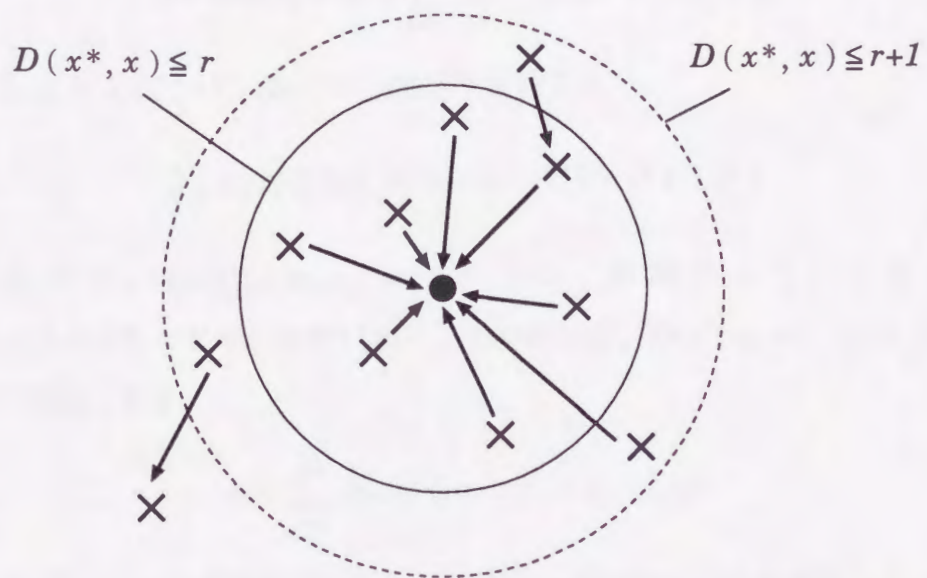


図 5.1: 平衡点  $x^*$  の直接引き込み半径  $R(x^*) = r$

$$\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j^* - 2l \leq \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j \leq \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j^* + 2l$$

が成立し、さらに (5.4) より

$$(2k+1)x_i^* - 2l \leq \sum_{j=1}^n w_{ij}x_j \leq (2k+1)x_i^* + 2l \quad (5.6)$$

を得る。もし  $x_i^* = 1$  ならば、(5.6) の左側の不等式より、

$$\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j \geq (2k+1) - 2l = 2(k-l) + 1 \geq 1$$

が成立するので、 $\text{sgn}(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j) = 1$  となる。同様にして、 $x_i^* = -1$  ならば  $\text{sgn}(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j) = -1$  となることがいえる。したがって、 $D(x^*, x) = l (\leq k)$  を満足する  $x$  に対して次式が成立する。

$$\text{sgn}\left(\sum_{j=1}^n w_{ij}x_j\right) = x_i^* \quad (i = 1, \dots, n)$$

次に  $D(x^*, x) = k+1$  であるベクトル  $x$  の中に  $\text{sgn}(Wx) = x^*$  を満足しないものが存在することを示す。そのためには、 $\sum_{j=1}^n w_{1j}x_j \neq x_1^*$  を満足する  $x$  の存在を示せば十分である。(5.4) の第 1 式：

$$w_{11}x_1^* + w_{12}x_2^* + \dots + w_{1n}x_n^* = (2k+1)x_1^*$$

において、左辺の第 1 項以外はそれぞれ 1 または  $-1$  の値をとる。右辺は  $x_1^*$  の値によって  $2k+1$  または  $-(2k+1)$  の値をとる。これらのことから、左辺の第 2 項から第  $n$  項の  $(n-1)$  項のうち、 $(\frac{n}{2}+k)$  項が  $x_1^*$  と同符号であり、 $(\frac{n}{2}-k-1)$  項が  $x_1^*$  と異符号であることがいえる。いま、一般性を失うことなく、

$$w_{1j}x_j^* = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ x_1^*, & j = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} + k + 1 \\ -x_1^*, & j = \frac{n}{2} + k + 2, \frac{n}{2} + k + 3, \dots, n \end{cases}$$

と仮定する。このとき、

$$x = [x_1^*, -x_2^*, \dots, -x_{k+2}^*, x_{k+3}^*, \dots, x_{n/2+k+1}^*, x_{n/2+k+2}^*, \dots, x_n^*]^T$$



で与えられるベクトル  $x$  は明らかに  $D(x^*, x) = k + 1$  を満足する。また,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n w_{1j} x_j &= \sum_{j=1}^n w_{1j} x_j^* - 2 \sum_{j=2}^{k+2} w_{1j} x_j^* \\ &= (2k+1)x_1^* - 2(k+1)x_1^* \\ &= -x_1^* \end{aligned}$$

が成り立つから,  $x$  は  $\text{sgn}(Wx) = x^*$  を満足しない。 ■

一般的には, 平衡点が (5.4) 式を満足することは極めて稀であるが, 補題 5.1 は本章の主結果である定理 5.1 の導出には有用である。

まず, 最も簡単な場合として, 巡回形零対角2値行列  $W$  の第1行を,

$$[0, w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n}] = [0, \alpha, 1, -\alpha] \quad (5.7)$$

( $\alpha$  は任意の  $(\frac{n}{2} - 1)$  次の2値行ベクトル)

で与える場合を考える。この場合には, 前章で示したように,

$$x = [\beta, \beta]^T \quad (\beta \text{ は任意の } \frac{n}{2} \text{ 次の2値行ベクトル}) \quad (5.8)$$

で表される任意のベクトル  $x$  に対して,  $Wx = x$  が成り立つ。このことと, 補題 5.1 より, 次の補題が得られる。

**補題 5.2** 結合行列  $W$  を, 第1行が (5.7) で与えられる巡回形零対角2値行列とすれば, 直接引き込み半径が0である平衡点が  $2^{n/2}$  個存在する。 ■

巡回形零対角2値行列  $W$  の第1行が (5.7) を満足し, かつ,

$$[w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n}] = [w_{1n}, w_{1,n-1}, \dots, w_{12}] \quad (5.9)$$

を満足するならば,  $W$  は対称行列になる。いま,  $n$  を偶数であるが4では割り切れないとして,  $W$  の第1行を,

$$[0, \alpha, \alpha', 1, -\alpha, -\alpha'] \quad (5.10)$$

ただし,

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{(n-2)/4}] \quad (\alpha_i = \pm 1)$$

$$\alpha' = [-\alpha_{(n-2)/4}, -\alpha_{(n-2)/4-1}, \dots, -\alpha_1]$$

で与えるならば,  $W$  は対称行列になる. ネットワークの結合行列が対称で, 各ニューロンが非同期的に状態を更新するならば, ネットワークはいかなる初期状態から出発しても必ずいずれかの平衡点に収束することが知られている. これより, 次の補題を得る.

**補題 5.3**  $n$  が 4 で割り切れないとし, 結合行列  $W$  を, 第 1 行が (5.10) で与えられる巡回形零対角 2 値行列とする. また, 各ニューロンは非同期的に状態を更新するとする. このとき, ネットワークは大域的に安定であり, かつ, 少なくとも  $2^{n/2}$  個の記憶ベクトルをもつ. ■

次に,  $n$  を 4 の倍数として, 結合行列  $W$  を, 第 1 行が

$$[0, w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1n}] = [0, \alpha, 1, -\alpha, 1, \alpha, 1, -\alpha] \quad (5.11)$$

( $\alpha$  は任意の  $(\frac{n}{4} - 1)$  次の 2 値行ベクトル)

で表される巡回形零対角 2 値行列とすれば,

$$x = [\beta, \beta, \beta, \beta]^T \quad (\beta \text{ は任意の } \frac{n}{4} \text{ 次の 2 値行ベクトル}) \quad (5.12)$$

で表される任意のベクトル  $x$  に対して,

$$Wx = 3x \quad (5.13)$$

が成り立つ. (5.12) の形の 2 値ベクトルは全部で  $2^{n/4}$  個存在する. また, 補題 5.1 より, (5.13) を満足する平衡点の直接引き込み領域は 1 である. これより, 次の補題を得る.

**補題 5.4** 結合行列  $W$  を, 第 1 行が (5.11) で与えられる巡回形零対角 2 値行列とすれば, 直接引き込み半径が 1 である平衡点が  $2^{n/4}$  個存在する. ■

先ほどと同様に, 第 1 行が (5.11) で与えられる  $W$  のなかで, 対称行列になるものを求める. そのような  $W$  の 1 つに次に示すものがある.

$$[0, \alpha, \alpha', 1, -\alpha, -\alpha', 1, \alpha, \alpha', 1, -\alpha, -\alpha'] \quad (5.14)$$

ただし,

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{(n-4)/8}] \quad (\alpha_i = \pm 1)$$

$$\alpha' = [-\alpha_{(n-4)/8}, -\alpha_{(n-4)/8-1}, \dots, -\alpha_1]$$

である. ここで,  $n$  は 4 で割り切れるが, 8 で割り切れないとする.

補題 5.5  $n$  を 4 で割り切れるが 8 で割り切れない自然数とする。結合行列  $W$  を、第 1 行が (5.14) で与えられる巡回形零対角 2 値行列とする。また、各ニューロンは非同期的に状態を更新するとする。このとき、ネットワークは大域的に安定であり、かつ、直接引き込み半径が 2 である平衡点が少なくとも  $2^{n/4}$  個存在する。 ■

補題 5.3 および 5.4 を一般の場合に拡張することにより、次の定理が得られる。

定理 5.1  $n = 2lm$  を満足する自然数  $l (\geq 2)$ ,  $m$  が存在するとする。ある  $l-1$  次の 2 値行ベクトルを  $\alpha$  とおき、巡回形零対角 2 値行列  $W$  の第 1 行を

$$[\overbrace{0, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}, \overbrace{1, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}, \dots, \overbrace{1, \alpha, 1, -\alpha}^{2l}] \quad (5.15)$$

$\alpha$  は任意の  $l-1$  次元 2 値ベクトル

で与えるならば、 $R(x^*) = m-1$  である平衡点が少なくとも  $2^l$  個存在する。特に、 $l$  を奇数とし、(5.15) 式の  $\alpha$  を、

$$\alpha = [\gamma, \gamma']$$

ただし、

$$\begin{aligned} \gamma &= [\gamma_1, \dots, \gamma_{(l-1)/2}] \\ \gamma' &= [-\gamma_{(l-1)/2}, -\gamma_{(l-1)/2-1}, \dots, -\gamma_1] \end{aligned}$$

で与えることにより  $W$  は対称行列になる。このとき、ニューロンが非同期的に状態を更新するならば、ネットワークは大域的に安定である。

証明：  $W$  の第 1 行を (5.15) で与えるとき、 $W$  と

$$x = [\beta, \beta, \dots, \beta]^T \quad (\beta \text{ は任意の } l \text{ 次 } 2 \text{ 値行ベクトル}) \quad (5.16)$$

で表される  $x$  の積を計算すると、

$$Wx = (2m-1)x = \{2(m-1)+1\}x \quad (5.17)$$

となる。 $2(m-1)+1 \geq 1$  であるから、(5.16) の形のあらゆる  $x$  は平衡点である。(5.16) の形の  $x$  は全部で  $2^l$  個存在する。また (5.17) および補題 1 より、それぞれの平衡点の直接引き込み半径は  $m-1$  である。 ■

定理 5.1 の  $W$  に対する平衡点の一つを

$$x^* = [\beta^*, \dots, \beta^*]^T$$

とおく.  $x^*$  の周りには,  $D(x^*, x) = 2m$  であるような平衡点  $x$  が  $l$  個存在する. (すべての  $\beta^*$  において, ある決まった要素を一つだけ反転したものはやはり平衡点であり,  $\beta^*$  が  $2m$  個あることから,  $D(x^*, x) = 2m$  となる. また,  $\beta^*$  の次数が  $l$  であるので, そのような平衡点は  $l$  個存在する.) 定理 5.1 より, 各平衡点の直接引き込み半径は  $m-1$  であり, 隣接する平衡点との距離のほぼ半分であることがわかる (図 5.2 参照). 上の意味で各引き込み領域はほぼ等しい広さをもつといえる.

平衡点の個数と直接引き込み半径の関係が定理 5.1 よりただちに次のように得られる.

**補題 5.6** 巡回形零対角2値行列  $W$  の第1行を (5.15) で与えるとき, (5.16) を満足する平衡点の個数を  $p (= 2^l)$  とおけば, それらの  $p$  個の平衡点の直接引き込み半径は,

$$\frac{n}{2 \log_2 p} - 1 \quad \left( = \frac{n}{2l} - 1 \right) \quad (5.18)$$

である. ■

参考のため, 連想記憶への応用という観点から得られた, 平衡点の個数と直接引き込み領域に関する結果の一つを次に示す.

**定理 5.2**  $1, -1$  が等確率で現れる  $p$  個のベクトルから Outer Product Method によってネットワークを構成するとき,  $p$  が

$$p < \frac{(1-2\rho)^2 n}{4 \log_e n} \quad (0 \leq \rho < 1/2) \quad (5.19)$$

を満足するならば,  $p$  個の平衡点それぞれについて, それからの距離が  $\rho n$  以内にあるすべての状態が1回の更新でその平衡点に収束する確率は  $n$  が大きくなるにつれて1に近づく. ■

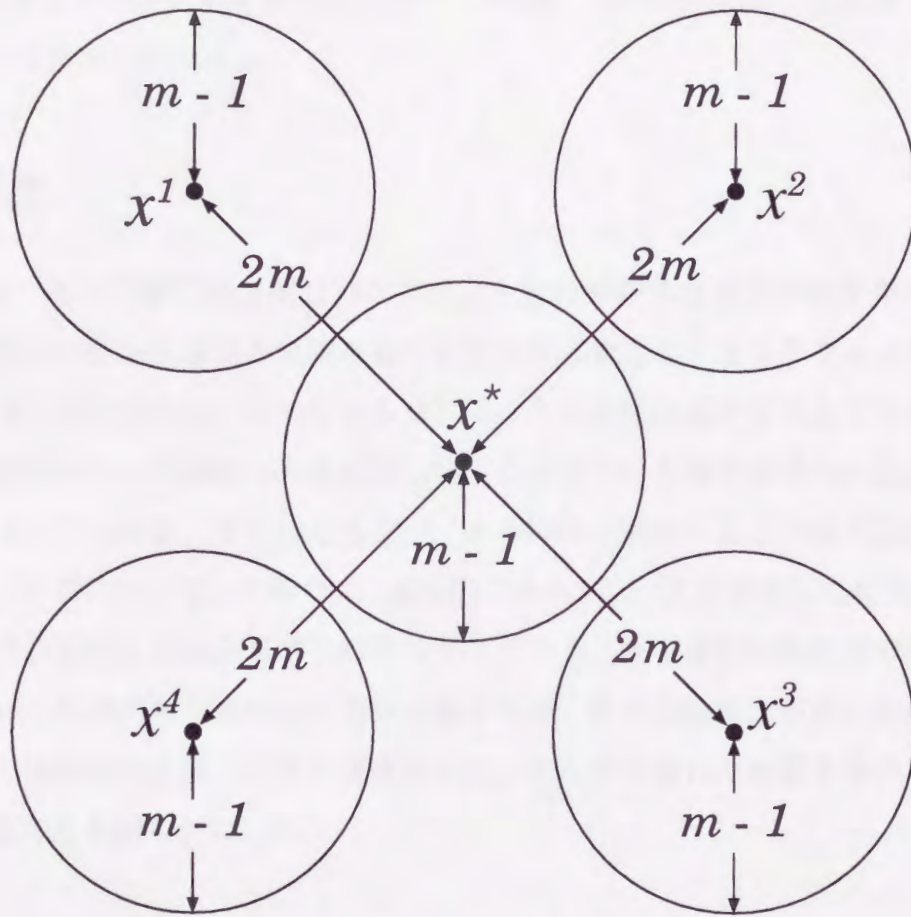


図 5.2: 平衡点の直接引き込み半径と平衡点間の距離

ここで、ある特徴的な例を用いて補題 5.6 と定理 5.2 を比較してみる。いま、 $n = 2000$ ,  $l = 8$  として、巡回形零対角 2 値行列  $W$  の第 1 行を (5.15) で与えたとする。このとき、(5.16) の形の平衡点は  $256 (= 2^8)$  個存在し、それらの直接引き込み半径は 124 である。一方、定理 5.2 によれば、すべての平衡点の直接引き込み半径を 124 にしようとするとき、(5.18) 式に  $\rho = 124/2000 = 0.062$  を代入して  $p < 50.4 \dots$  を得る。すなわち、たかだか 50 個の平衡点しか与えることができない。これは、我々の構成法で与えることのできる 256 個に比べてかなり少ない。

## 5.4 結言

本章では、巡回形零対角 2 値行列という、一般に非対称な結合行列を用いることにより、等しい広さの直接引き込み領域をもつ平衡点が多数存在するようなネットワークの構成を与えた。相互結合型ニューラルネットワークの動作は極めて複雑であるので、引き込み領域の決定といった問題は非常に難しい。これまでも連想記憶への応用に関連した結果が発表されているが、そのほとんどが、ある特殊な仮定のもとで確率論的に導かれたものである。これに対して、本章では、具体的にネットワークを構成しており、また、ほとんどの平衡点の直接引き込み領域を厳密に与えている。結合行列の決め方の違いや決定論と確率論という問題の取り扱い方に違いがあるため、従来の結果と単純に比較することはできないが、ある場合には、従来の構成法に比べてかなり優れた性質をもつネットワークを構成できることを明らかにした。

## 第 6 章

### 結論

本論文では、相互結合ニューラルネットワーク型非線形回路における種々の仮定のもとで、回路の平衡点集合の特徴付け、所望平衡点集合を実現する回路の構成、といった問題について理論的考察を行なった。これらは、相互結合型ニューラルネットワークの重要な応用である、連想記憶、パターン分類、ノイズ除去等において最も基本的な問題である。また、回路の平衡点は  $x = F(Wx + I)$  という非線形方程式の解であるので、所望平衡点集合の実現は、それらのベクトルだけを解とするような行列  $W$ 、およびベクトル  $I$  を決定する問題に帰着される。この種の非線形方程式は多数の解をもつが、その一般的解法が存在しないことや、 $x$  の次数が高くなるにつれて組合せの数（例えば、 $x$  の次数を 10 とすれば、すべての 2 値ベクトルを 2 つに分類する方法は  $2^{2^{10}}$  通りある）が急激に増加することなどから、上記の問題を一般の回路、すなわち一般の  $W$  および  $I$ 、について考察することは極めて難しいと考えられる。したがって、本章における種々の特殊な仮定のもとでの議論は、この問題に対する出発点として重要である。以下に、各章で述べたことを要約して本論文のまとめとし、最後に今後の課題について述べる。

第 2 章では、まず相互結合型ニューラルネットワークの代表的な連続系モデル、離散系モデルについて説明した。次に、これらのモデルを連想記憶回路に応用する際の基本的事項を述べ、現在よく知られている連想記憶回路の構成法とそれらの性質および問題点について概説した。連想記憶回路を構成することは、与えられた 2 値ベクトルの集合を平衡点とするようにネットワークのパラメータを決定することであるから、本研究で取り扱う問題は、連想記憶への応用と密接な関係を持つ。

第 3 章では、区分線形の飽和特性をもつオペアンプ、キャパシタ、線形抵抗、直流電流源から構成される一種の相互結合型非線形回路について、所望の平衡点だけを実現する回路構成法について考察した。ただし、この回路の結合は完全対称であると仮定した。この

仮定は、回路の平衡点を与える方程式  $x = F(Wx + I)$  において、行列  $W$  の対角項がすべて等しい値をとり、非対角項もすべて等しい値をとることに相当する。

はじめに、オペアンプがすべて正相で用いられる場合とすべて逆相で用いられる場合（通常の相互結合型ニューラルネットワークの連続系モデルではオペアンプはすべて正相で用いられる）のそれぞれについて、回路の平衡点集合の特徴付けを行なった。その際、平衡点集合を、各ベクトルに含まれる  $-1$  の個数の違いによって分類し、それぞれの集合がある特徴的な形で表現されることを示した。

次に、その平衡点集合の特徴をを利用することにより、オペアンプがすべて正相、すべて逆相のそれぞれの場合について、与えられた2値ベクトルだけが平衡点となるための必要十分条件を簡単なアルゴリズムの形で与え、また、その条件が満足されるとき回路パラメータの決定方法を示した。この結果は、特殊な回路構造に対して得られているものであるが、これまでにない、所望の平衡点集合だけの実現という問題に対して、厳密な条件を与えることができたという点で意義のあるものだと考える。

最後に、正相、逆相のオペアンプが混在する場合（すべて正相、すべて逆相の場合も含む）について、リアプノフ関数を定義することによって回路が大域的に安定であることを証明し、飽和領域にあるすべての平衡点が漸近安定であることを示した。

第4章では、結合行列が  $k$  重テーパー行列である離散系ニューラルネットワークの平衡点の最大個数を厳密に評価した。このネットワークは、 $n$  個のニューロンが環状に配置されている、各ニューロンはすぐ前方の  $k$  個のニューロンからのみ結合されており、それらの  $k$  個の結合の強さはニューロン間の距離とともに小さくなる、自分自身との結合はもたない、といった特徴をもつ。平衡点の個数は、連想記憶への応用においては、記憶容量に関わる問題であり、また巡回セールスマン問題などの最適化問題への応用においては、目的関数の局所最小点の個数に関わる問題である。はじめに、 $k = 1, 2, 3, 4$  のそれぞれの場合について平衡点の最大個数を厳密に評価し、それがニューロンの個数  $n$  と無関係に極めて少ないことを明らかにした。次に  $k$  が大きくなるにしたがって平衡点の最大個数がどのように増加するかを調べるために、 $k = n - 1$  の特別な場合を考え、 $2^{n/2}$  個の平衡点が存在するようなネットワークが具体的に構成できることを示した。このことより、一般に平衡点の最大個数はニューロン数  $n$  に関して指数関数的に増加することを明らかにした。

第5章では、結合行列が零対角2値行列である離散系ニューラルネットワークに対して、一構成法を与え、その方法によって構成されるネットワークの平衡点の個数とその引き込み領域について厳密な評価を行なった。相互結合型ニューラルネットワークの動作は



非常に複雑であるため、一般のネットワークに対して引き込み領域を評価することは極めて難しい。これまでも、連想記憶への応用に関連した引き込み領域に関する理論的結果が発表されているが、そのほとんどが、ある特殊な仮定のもとで確率論的に得られたものである。これに対して、第5章では、具体的にネットワークを構成し、平衡点の個数と引き込み領域との関係を厳密に与えている。その結果、構成されたネットワークにはほぼ等しい広さの引き込み領域をもつ平衡点が多数存在することを示した。

以上、本論文の各章の結果を要約したが、いずれの議論においても特殊な場合を取り扱っており、これから上記の結果を一般化していくことが必要である。今後の課題は、より一般のネットワークに対して、平衡点の最大個数や引き込み領域などの特徴付け、所望の平衡点集合だけを実現する回路構成法の提案、結合が非対称の場合の大域的安定性に関する条件の導出等を行なうことである。

## 謝辞

本研究に着手してから今日に至るまで、本学工学部情報工学科の西哲生教授には、懇切丁寧な御指導と御討論を頂いた。また、本学工学部情報工学科の香田徹教授、電気工学科の平澤宏太郎教授には温かい御助言を頂いた。ここに謹んで諸先生方に感謝の意を表します。

また、本研究を行なう上でさまざまな御討論、御協力を頂いた本学工学部情報工学科の大濱助教授、柏木助教授、川根助手、常田助手、盧助手および情報工学科回路研究室の大学院生の皆様に対して心よりお礼申し上げます。

## 参考文献

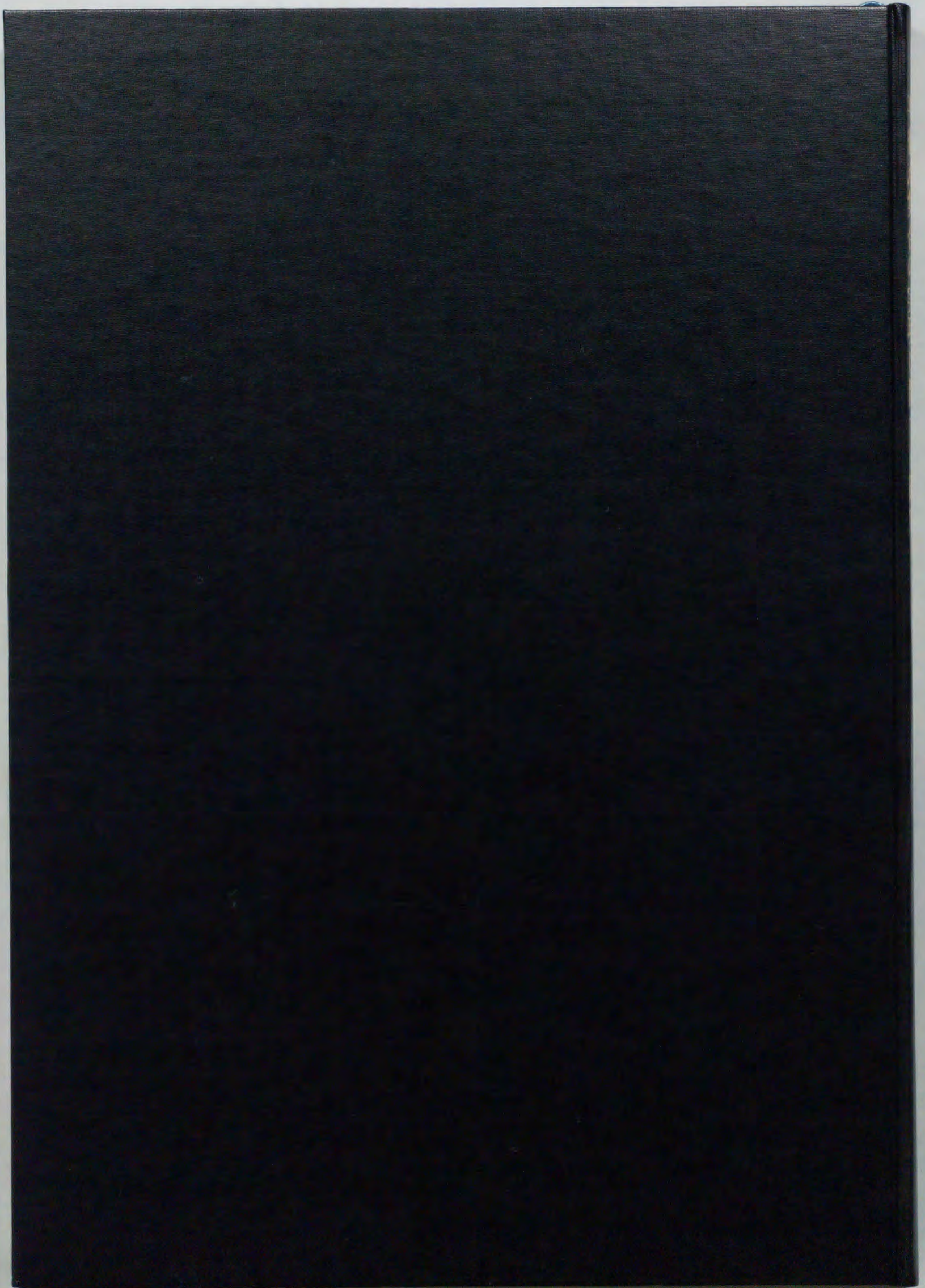
- [1] J.J. Hopfield, "Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol.79, pp.2554-2558, 1982.
  - [2] J.J. Hopfield, "Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons," Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol.81, pp.3088-3092, 1984.
  - [3] L. Personnaz, I. Guyon, and G. Dreyfus, "Information storage and retrieval in spin-glass like neural networks," J. Phys. Lett., vol.46, pp.L359-L365, Apr. 1985.
  - [4] L. Personnaz, I. Guyon, and G. Dreyfus, "Collective Computational Properties of Neural Networks: New Learning Mechanisms," PHYSICAL REVIEW A, vol.34, pp.4217-4228, 1986.
  - [5] A.N. Michel, J.A. Farrel, and W. Porod, "Qualitative Analysis of Neural Networks," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.36, pp.229-243, 1989.
  - [6] J.H. Li, A.N. Michel, and W. Porod, "Qualitative Analysis and Synthesis of a Class of Neural Networks," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 35, pp.976-986, 1988.
  - [7] J.H. Li, A.N. Michel and W. Porod, "Analysis and Synthesis of a Class of Neural Networks: Linear Systems Operating on a Closed Hypercube," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 36, pp.1405-1422, 1989.
  - [8] A.N. Michel and J.A. Farrell, 'Associative Memories via Artificial Neural Networks,' IEEE Control Sys. Mag., vol. 10, pp.6-17, 1990.
  - [9] J.A. Farrell, A.N. Michel, "A Synthesis Procedure for Hopfield's Continuous-time Associative Memory," IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 37, pp.877-884, 1990.
-

- [10] A. N. Michel, J. Si, and G. Yen, "Analysis and Synthesis of a Class of Discrete-Time Neural Networks Described on Hypercubes," *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 2, pp. 32-46, Jan. 1991.
- [11] G. Yen, and A.N. Michel, "A learning and forgetting algorithm in associative memories : The eigenstructure method," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol.39, pp.212-225, Apr. 1992.
- [12] D. Liu, and A.N. Michel, "Sparsely interconnected neural networks for associative memories with applications to cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol.41, pp.295-307, Apl. 1994.
- [13] F.M.A. Salam, Y. Wang, and M Choi, "On the Analysis of Dynamic Feedback Neural Nets," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol.38, pp.196-201, Feb. 1991.
- [14] McEliece, R.J., Posner, E.C., Rodemich, E.R. and Venkatesh, S.S., "The capacity of the Hopfield associative memory," *IEEE Trans. Information Theory*, vol.IT-33, pp.461-482, Jul. 1987.
- [15] S. Amari, "Learning Patters and Pattern Sequences by Self-Organizing Nets of Threshold Elements," *IEEE Trans. Computers*, vol.C-21, pp.1197-1206.
- [16] Y. Uesaka, "Mathematical Aspects of Neuro-Dynamics for Combinatorial Optimization," *IEICE Trans.* vol. E-74, pp.1368-1372, June 1991.
- [17] Abu-Mostafa, Y.S. and Jacques, J.S., "Information capacity of the Hopfield model," *IEEE Trans. Information Theory*, vol.IT-31, pp.461-464, Jul. 1985.
- [18] Bruck, J. and Roychowdhury, V.P., "On the number of spurious memories in the Hopfield model," *IEEE Trans. Information Theory*, vol.36, pp.393-397, Mar. 1990.
- [19] Kaluzny, P., "Number of stable equilibrium states of cellular neural networks," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol.41, pp.608-610, Sep. 1994.
- [20] M. Forti, S. Manetti, and M. Marini, "Necessary and Sufficient Condition for Absolute Stability of Neural Networks," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol.41, pp.491-494, July, 1994.
-

- [21] Y. Kamp and M. Hasler, "Recursive Neural Networks for Associative Memory", JOHN WILEY & SONS.
- [22] 甘利俊一, "神経回路網モデルとコネクショニズム," 東京大学出版会 (1989) .
- [23] 松岡清利, "ニューロコンピューティング," 朝倉書店 (1992) .
- [24] 麻生英樹, "ニューラルネットワーク情報処理," 産業図書 (1988) .
- [25] 室賀三郎, 茨木俊秀, 北橋忠宏, "しきい論理," 産業図書 (1976) .
- [26] N. Takahashi, and T. Nishi, "Realization of equilibrium points by means of a completely symmetrical nonlinear circuit," *Memoirs of The Faculty of Engineering Kyushu Univ.*, vol.54, pp.141-160, Jun. 1994.
- [27] T. Nishi, and N. Takahashi, "On the Number of Solutions of a Class of Nonlinear Equations Related to Neural Networks with Tapered Connections," *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.E78-A, No.10, 1995.
- [28] N. Takahashi, and T. Nishi, "Equilibrium Points of Mutually Coupled Symmetrical Neural Networks," *Proceedings of European Conference on Circuit Theory and Design*, 1993.
- [29] T. Nishi and N. Takahashi, "On the Realization of Prescribed Sets of Equilibrium Points of One-Dimensional Neural Networks with Tapered Connecting Coefficients," *Proceedings of International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, 1993.
- [30] N. Takahashi and T. Nishi, "On the Equilibrium Points of Hopfield-Type Neural Networks with the Cyclic Connection Matrix," *Proceedings of Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, 1994.
- [31] N. Takahashi and T. Nishi, "Realization of Certain Sets of Equilibrium Points by a Simple Neural Network," *Proceedings of Joint Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications*, 1993.
-

- [32] L.O.Chua and L.Yang, "Cellular Neural Networks : Theory," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.35, pp.1257-1272, 1988.
- [33] L.O. Chua and L. Yang, "Cellular Neural Networks : Applications," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.35, pp.1273-1290, 1988.
- [34] L.O. Chua and C.W. Wu, "On the Universe of Stable Cellular Neural Networks," Int. J. Circuit Theory and Applications, vol.20, pp.497-517, 1992.
- [35] M.Gilli, "Stability of Cellular Neural Networks and Delayed Cellular Neural Networks with Nonpositive Templates and Nonmonotonic Output Functions," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.41, pp.518-528, 1994.
- [36] L.O.Chua and T.Roska, "Stability of a Class of Nonreciprocal Cellular Neural Networks," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.37, pp.1520-1527, 1990.
- [37] F.Zou and J.A.Nossek, "Stability of Cellular Neural Networks with Opposite-Sign Templates," IEEE Trans. Circuits Syst., vol.38, pp.675-677, 1991.
- [38] R.J. Duffin, "Nonlinear networks, IIa," Bull. Amer. Math. Soc., vol.53, pp.963-971, 1947.
- [39] I.W. Sandberg, and A.N. Willson Jr., "Some theorems on properties of dc equation of nonlinear networks," Bell Syst. Tech. J., vol.48, pp.1-34, Jan. 1969.
- [40] I.W. Sandberg, and A.N. Willson Jr., "Some networktheoretic properties of nonlinear dc transistor networks," Bell Syst. Tech. J., vol.48, pp.1293-1311, May-Jun. 1969.
- [41] R.O. Nielsen, and A.N. Willson Jr., "Topological criteria for establishing the uniqueness of solution to the DC equations of transistor networks," IEEE Trans. Circuits and Syst., vol. CAS-24, pp.349-362, Jul. 1977.
- [42] R.O. Nielsen, and A.N. Willson Jr., "A fundamental result concerning the topology of transistor circuits with multiple equilibria," proc.IEEE, vol.68, pp.196-208, Feb. 1980.
- [43] T. Nishi, "Topological condition for the nonlinear resistive networks to have a unique solution," Trans.IECE, vol.J66-A, pp.663-670, Aug. 1983.
-

- 
- [44] T. Nishi, and L.O. Chua, "Topological criteria for nonlinear resistive circuits containing controlled sources to have a unique solution," *IEEE Trans. Circuits and Syst.*, vol. CAS-31, pp. 722-741, Aug. 1984.
- [45] M. Hasler, "Nonlinear non-reciprocal resistive circuits with a structurally unique solution," *Int. J. Circuit Theory and Appl.*, vol.14, pp.237-262, Jul. 1986.
- [46] T. Nishi, "On the number of solutions of piecewise-linear resistive circuits containing controlled sources," *Proc. 1988 Joint Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications*, pp.529-534, 1988.
- [47] T. Nishi, "On the number of solutions of resistive circuits containing operational amplifiers with saturation," *Proc. 1992 IEEE ISCAS*, pp.288-291, 1992.
- [48] T. Nishi, and Y. Kawane, "On the number of solutions of nonlinear resistive circuits," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E74, pp.479-487, Mar. 1991.
- [49] L.O. Chua, and N.N. Wang, "On the application of degree theory to the analysis of resistive nonlinear networks," *Int. J. Circuit Theory and Appl.*, vol.5, pp.35-68, 1977.
-





Inches 1 2 3 4 5 6 7 8  
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

# Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak



# Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

**A** 1 2 3 4 5 6 **M** 8 9 10 11 12 13 14 15 **B** 17 18 19

