

非対称ばね-自由度力学系の非線形振動に関する研究

松崎, 健一郎
Graduate School of Engineering, Kyushu University

<https://doi.org/10.11501/3081200>

出版情報：九州大学, 1994, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

第5章 空気ばね系の解析結果^{(72), (73)}

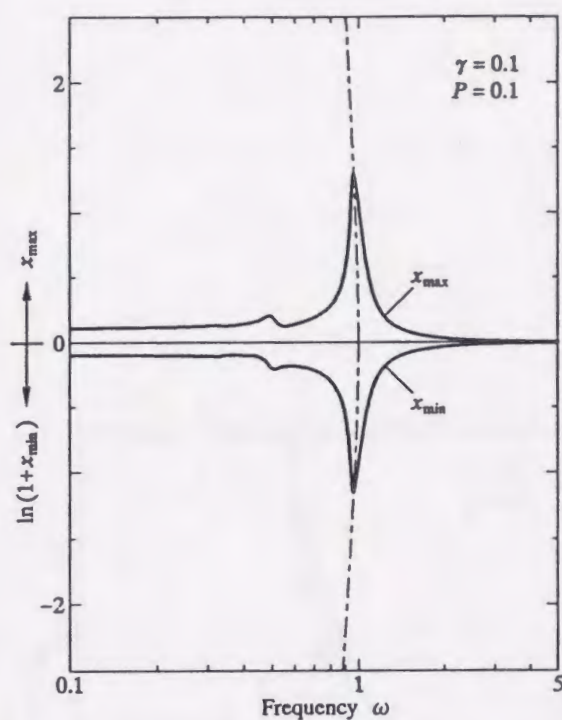
本章では、(2.12a)で示される一自由度空気ばね系強制振動について数値解析を行う。

5.1 振幅特性

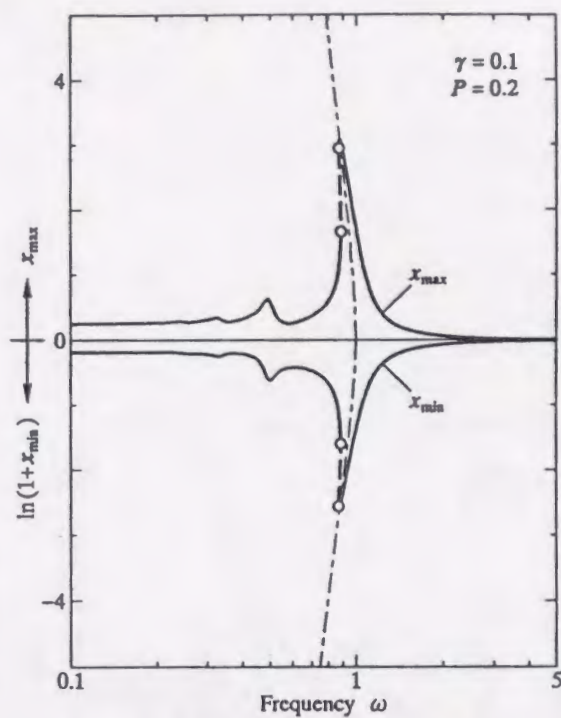
本節では、強制振動の振幅特性について解析を行う。解法などは4.1節と同様である。

図5.1および図5.2にそれぞれ $\gamma = 0.1$ と $\gamma = 0.2$ の場合の振幅特性曲線を示す。各々について $P = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0$ の六種を描いている。描いている曲線等の意味は二次曲線ばね系の場合と同様であるが、空気ばね系においては変位の最小値が $x_{\min} > -1$ の制限を持ち比較的振幅が大きくなるとその特性を詳しく表示することができないため、 x_{\min} の代わりに $\ln(1+x_{\min})$ を描いている。また、分数調波振動は $1/2$ 次分数調波振動に加えて $1/3$ 次分数調波振動(“ $1/3$ ”で示されたもののみ)も描いている。

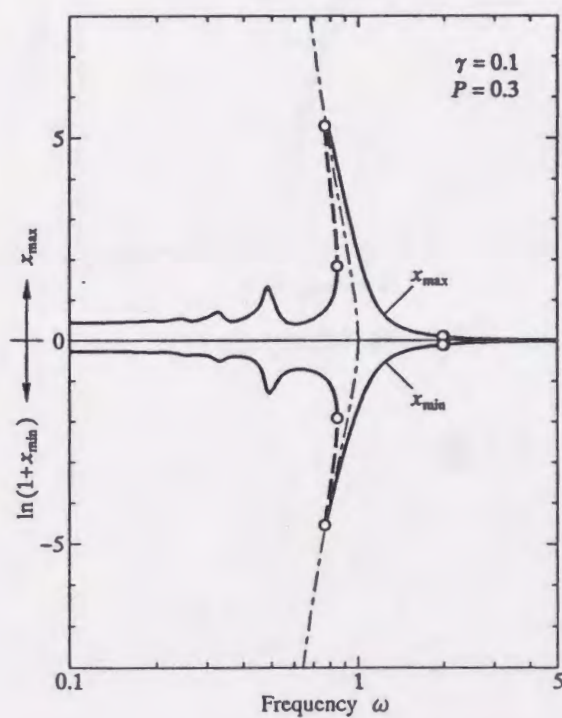
$\gamma = 0.1$ (図5.1)の場合、(a) $P = 0.1$ では調和振動のみが存在し、そのピークはわずかではあるがスケルトンカーブに沿って左に傾く。この特徴はすべての場合において共通し、 P が大きくなるにつれてその傾向は強くなる。フォールド、フリップはともに発生していない。(b) $P = 0.2$ の場合も分数調波振動は存在しないが、 $\omega = 0.88$ 付近に二つのフォールドが発生しジャンプ現象が起こる。(c) $P = 0.3$ では、フォールドに加えて $\omega = 2$ 付近に隣接して二つのフリップが発生し、周期倍分岐による $1/2$ 次分数調波振動が極わずかな範囲であるが存在する。(d) $P = 0.4$ では $1/2$ 次分数調波振動にフォールドが発生し、(e) $P = 0.5$ ではさらに $\omega = 0.44$ 付近に2次の高調波振動のフォールドが発生する。(f) $P = 1.0$ の図では、2次、3次、4次…と多くの高調波でフォールドおよびフリップが数多く発生し、フリップでは $1/2$ 次分数調波振動に周期倍分岐する。高調波のフリップから分岐した $1/2$ 次分数調波振動ではさらにフォールド、フ



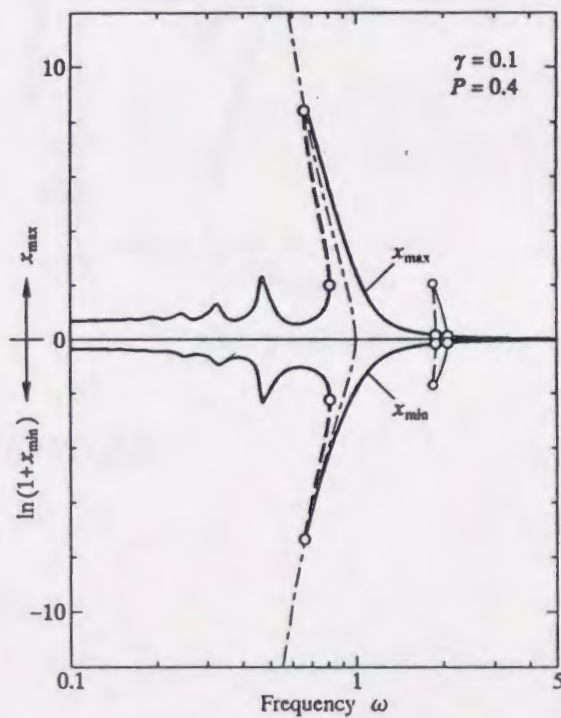
(a) $\gamma = 0.1, P = 0.1$



(b) $\gamma = 0.1, P = 0.2$

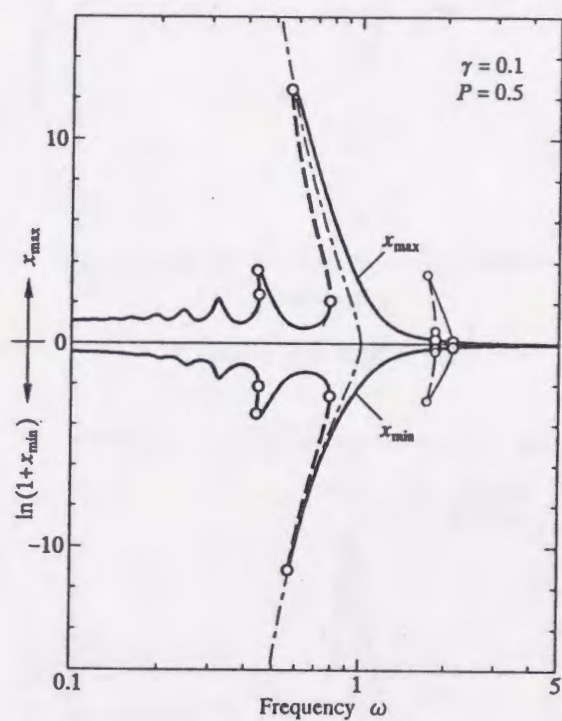


(c) $\gamma = 0.1, P = 0.3$

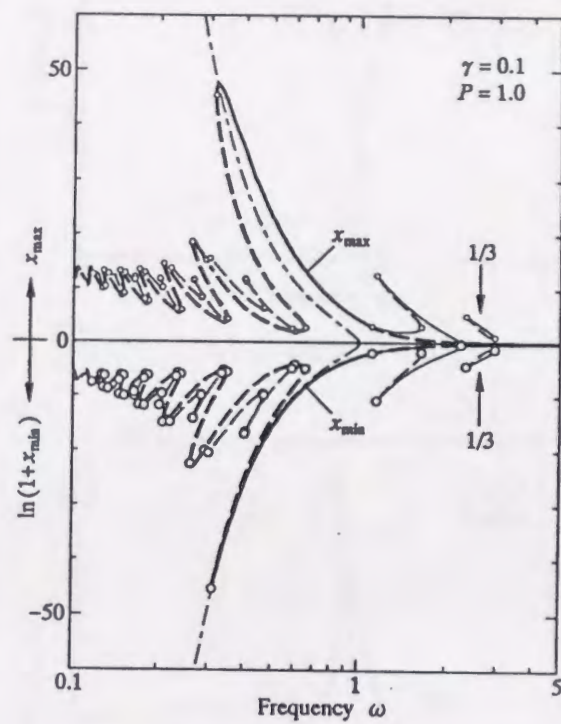


(d) $\gamma = 0.1, P = 0.4$

图 5.1 振幅特性曲线

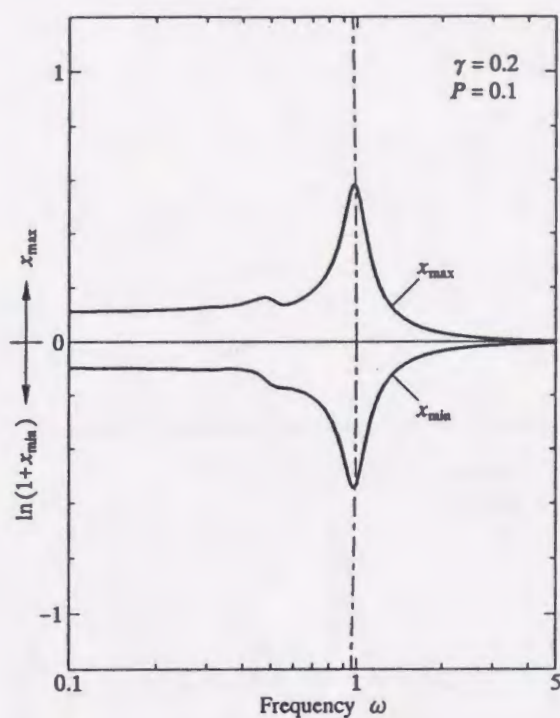


(e) $\gamma = 0.1, P = 0.5$

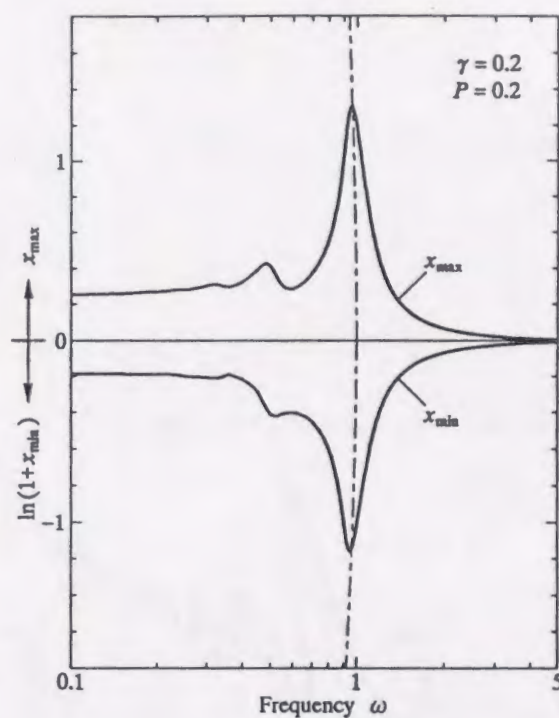


(f) $\gamma = 0.1, P = 1.0$

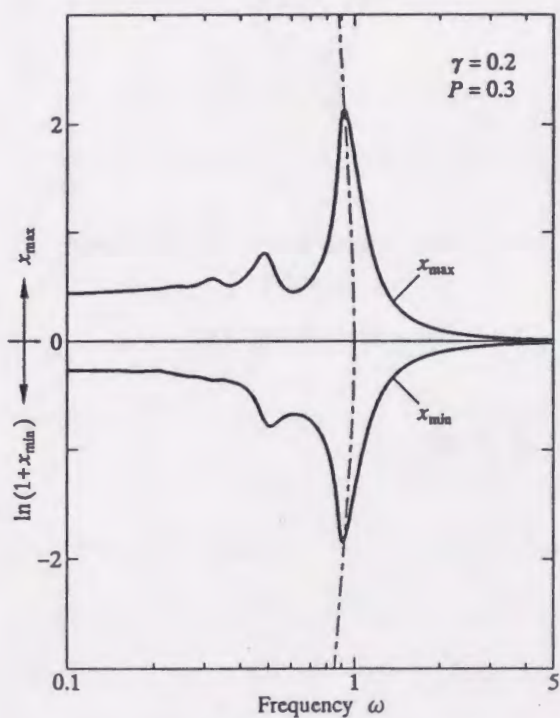
图 5.1 振幅特性曲线



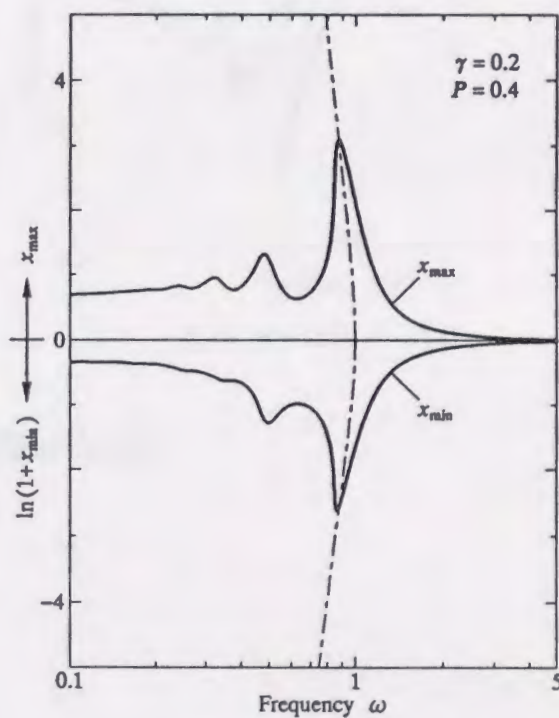
(a) $\gamma = 0.2, P = 0.1$



(b) $\gamma = 0.2, P = 0.2$

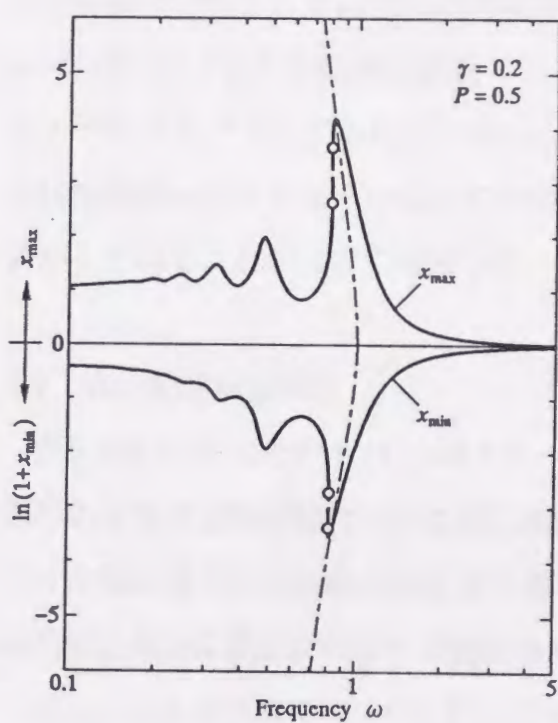


(c) $\gamma = 0.2, P = 0.3$

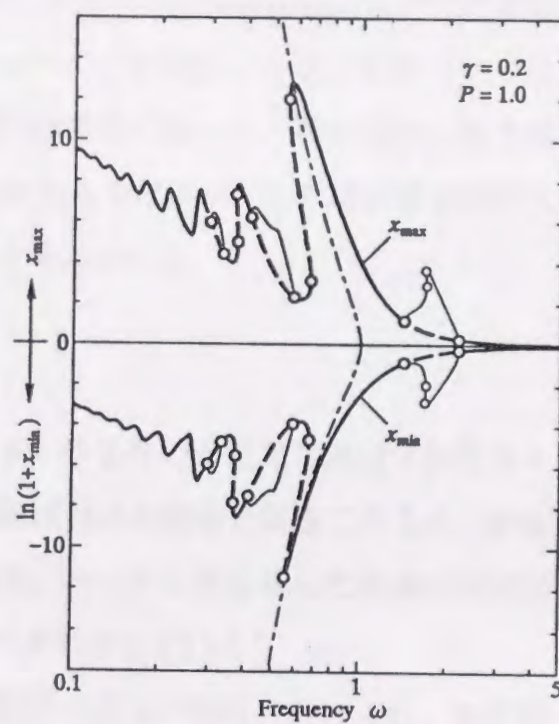


(d) $\gamma = 0.2, P = 0.4$

图 5.2 振幅特性曲线



(e) $\gamma = 0.2, P = 0.5$



(f) $\gamma = 0.2, P = 1.0$

图 5.2 振幅特性曲线

リップが発生している。また、 $\omega = 2.2 \sim 2.9$ の範囲に $1/3$ 次分数調波振動が島状に存在する。

$\gamma = 0.2$ (図5.2) の場合、(a) $P = 0.1$ から (d) $P = 0.4$ までフォールド、フリップともに発生しないが、そのピークは左に傾く。(e) $P = 0.5$ で $\omega = 0.81$ 付近に主共振のフォールドが二つ発生し、(f) $P = 1.0$ では主共振に加えて $\omega = 0.37$ 付近に2次の高調波のフォールドが発生する。また三組のフリップによる三つの不安定領域が存在し、ここでは周期倍分岐により $1/2$ 次分数調波振動が発生する。 $\omega = 2$ 付近の $1/2$ 次分数調波振動ではフォールドが発生するが、それ以外ではフォールドもフリップも起こらない。(f) の場合に限って、調和振動の最大変位は振動数が小さくなるに従って平均的に大きくなるが、これは復原力の最大値が1であることが大きく関係していると考えられる。

5.2 安定定常解領域図

図5.3(a), (b) にそれぞれ $\gamma = 0.1$ と $\gamma = 0.2$ の場合の安定定常解領域図を示す。図中の記号及び境界線については二次曲線ばね系の場合と同様であるが、影をつけた領域は非周期振動の存在する領域を、ハッチングを施した領域は安定な定常解と非周期振動が共存する領域をそれぞれ表している。

(a) $\gamma = 0.1$ では特に $\omega \leq 0.7, P \geq 0.7$ の範囲で領域が複雑に分けられ、非周期振動も広い範囲で存在する。また、相似なパターンが図の左上に向かって繰り返し現れる。(b) $\gamma = 0.2$ の場合、調べた範囲の安定定常解領域図は非常に単純であり、調和振動の範囲以外は $1/2$ 次分数調波振動の範囲とフォールドに挟まれた二種の調和振動が共存する範囲のみしか存在しない。

図5.4は $\gamma = 0.1$ の安定定常解領域図[図5.3(a)]の $\omega = 0.1 \sim 1, P = 0.6 \sim 1.0$ の範囲を拡大した図である。この図よりフォールドとフリップの境界線が交差し複雑に領域を分けている様子や相似なパターンが繰り返し現れることが良く分かる。

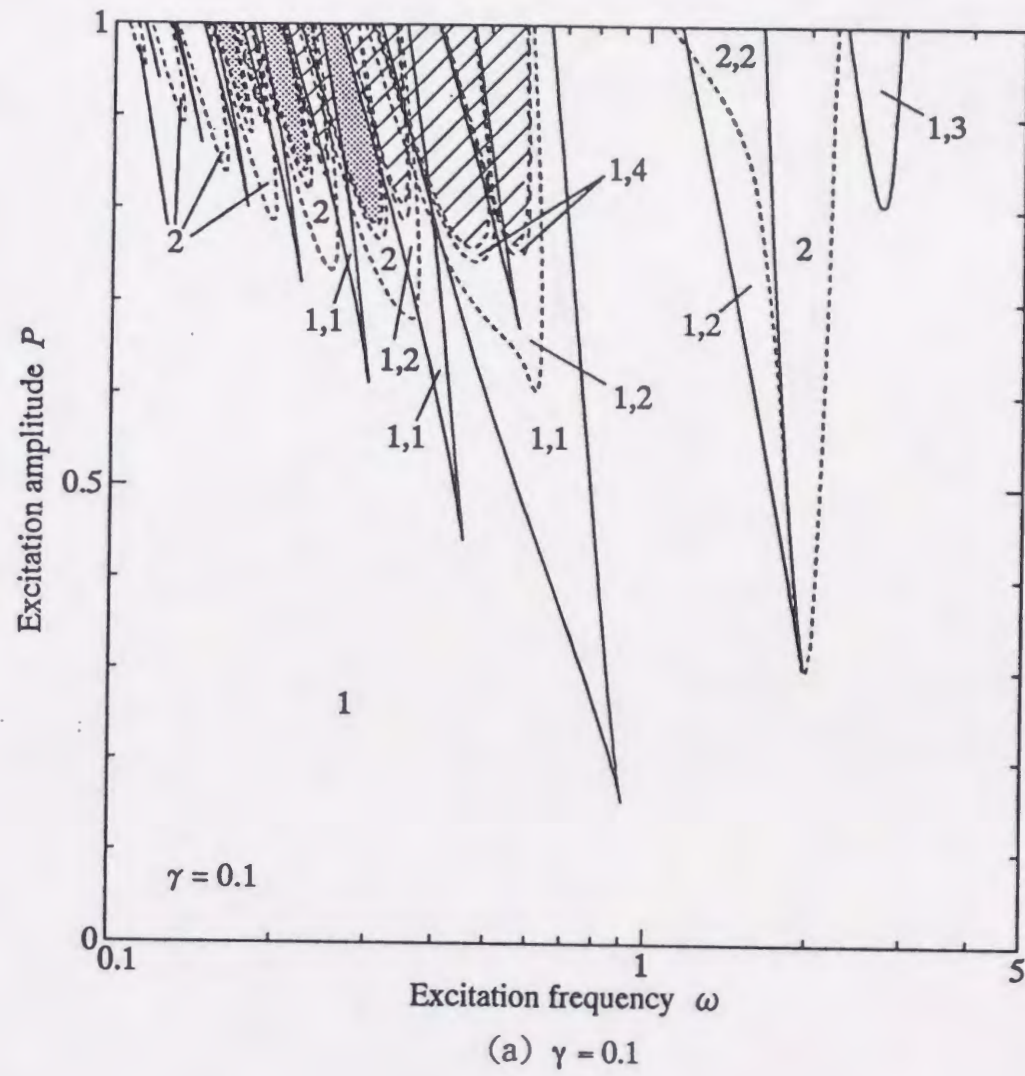


图 5.3 安定定常解領域図

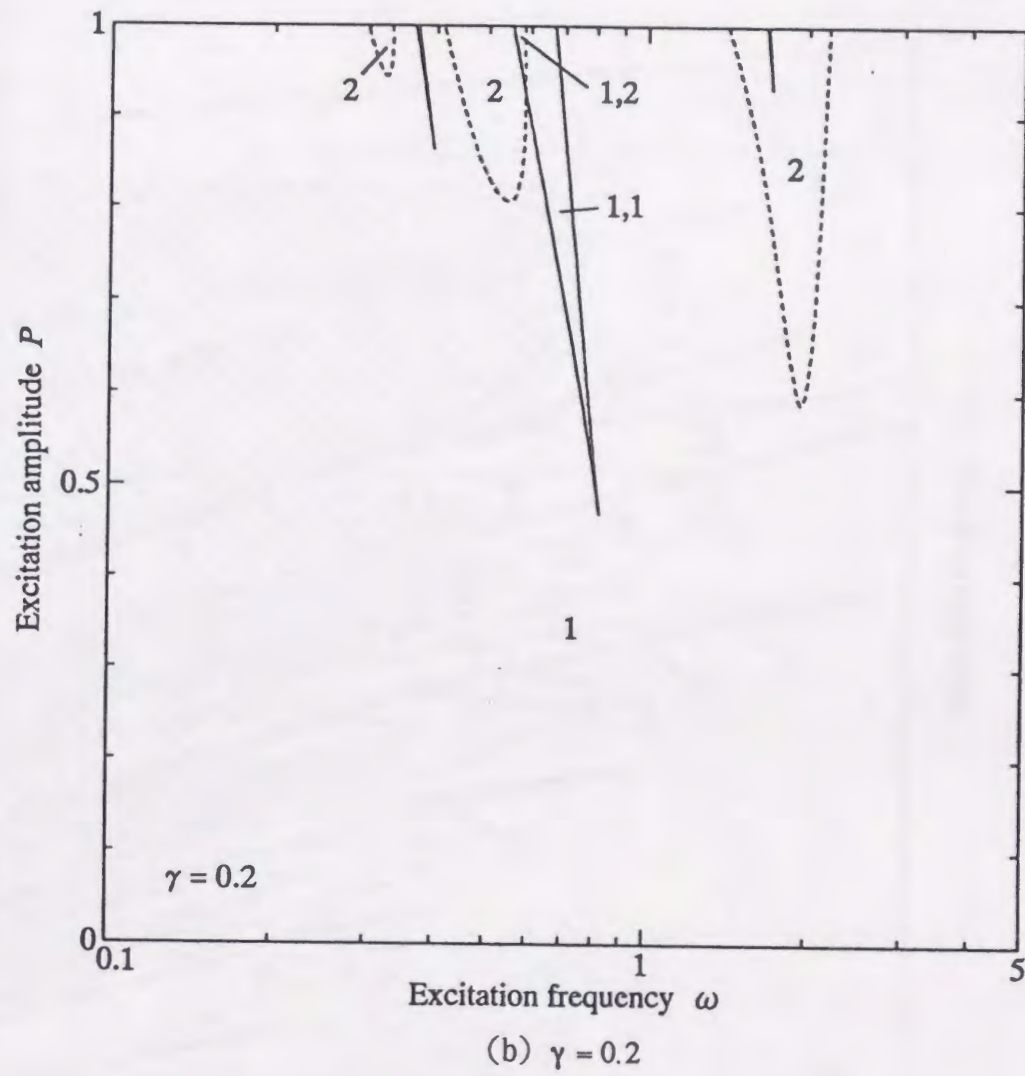


图 5.3 安定定常解領域図

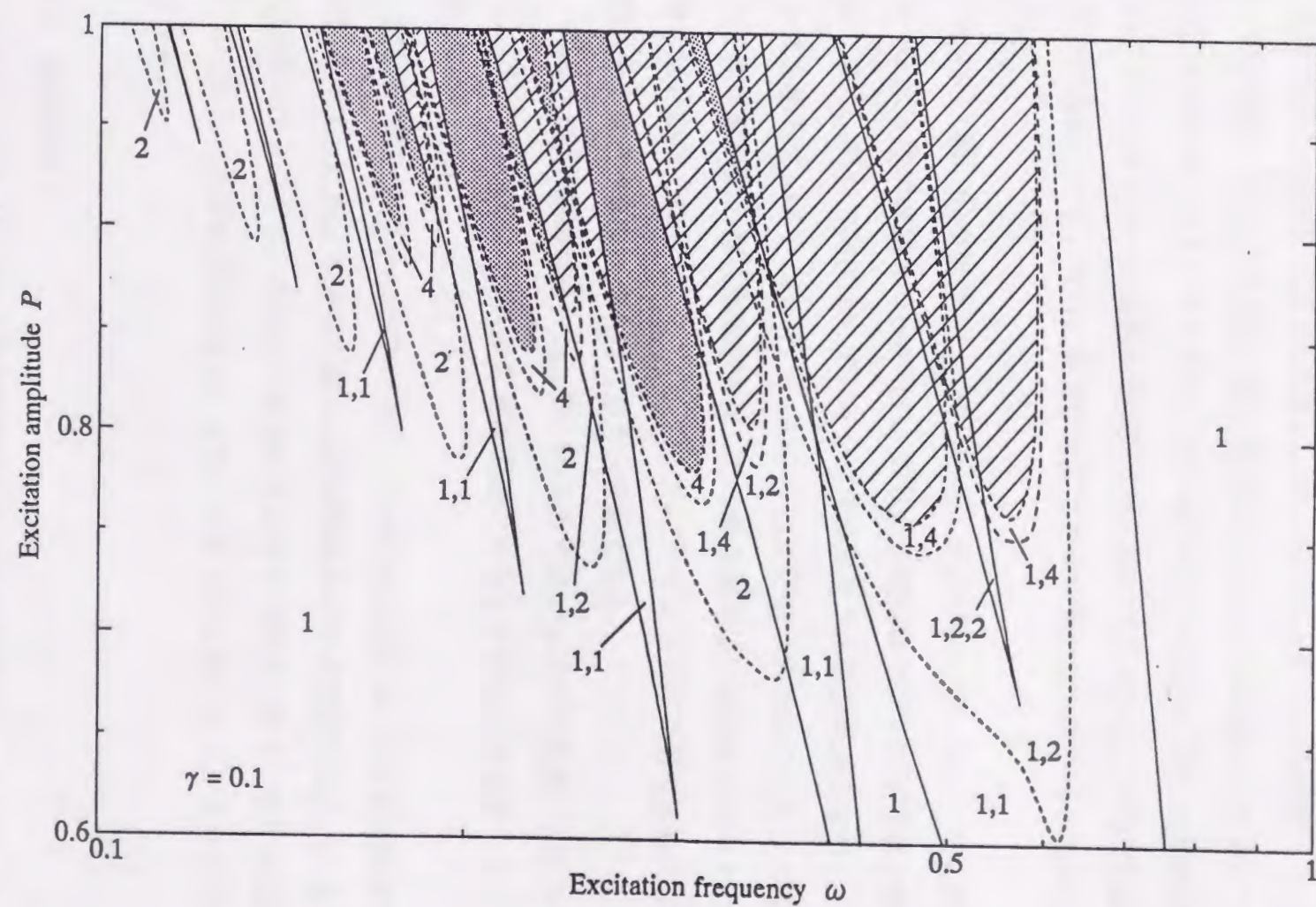


图 5.4 安定定常解領域図 ($\gamma = 0.1$)

5.3 分岐現象

図5.5および図5.6に分岐図を示す。計算条件等は二次曲線ばね系の場合と同様である。 $\gamma = 0.1$ (図5.5)の場合、 $P = 0.5, 0.7, 0.81, 1.0$ の四種、 $\gamma = 0.2$ (図5.6)の場合、 $P = 0.5, 1.0$ の二種、計六種のパラメータの組み合わせについて分岐図を求めた。また、すべてのパラメータの組み合わせに対して振動数の小さい方から大きい方へと振動数を変化させて描いたもの[→]とその逆に振動数の大きい方から小さい方へと振動数を変化させて描いたもの[←]の二種を描いている。

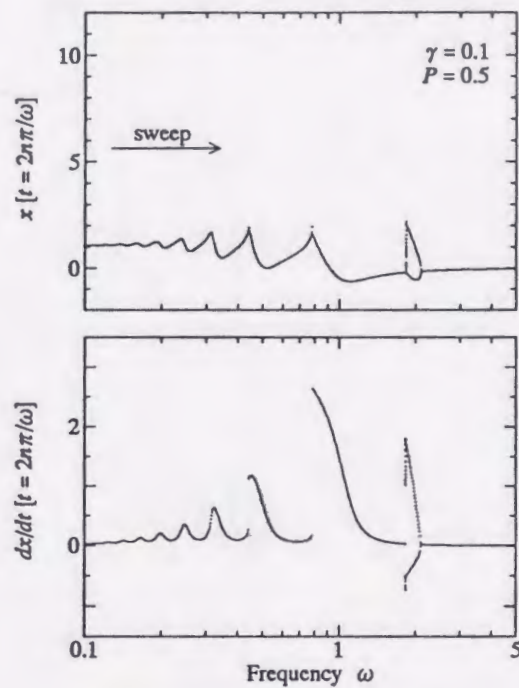
$\gamma = 0.1$ (図5.5)の場合、(a), (b) $P = 0.5$ および(c), (d) $P = 0.7$ では調和振動と1/2次分数調波振動のみが現れ、周期倍分岐現象とジャンプ現象が確認される。また、掃引方向によってジャンプ現象が起こる振動数が異なり、ヒステリシスを示している。(e), (f) $P = 0.81$ では周期倍分岐現象やジャンプ現象に加えて非周期振動の存在が確認でき、その存在範囲は振動数を小から大に変化させた場合が広がっている。(g), (h) $P = 1.0$ ではさらに非周期振動の存在範囲が大きくなりウィンドウもはっきりと確認できる。

$\gamma = 0.2$ (図5.6)の場合、(a), (b) $P = 0.5$ ではジャンプ現象が一つだけ起こる。(c), (d) $P = 1.0$ では1/2次分数調波振動の存在と周期倍分岐現象、ジャンプ現象が確認される。

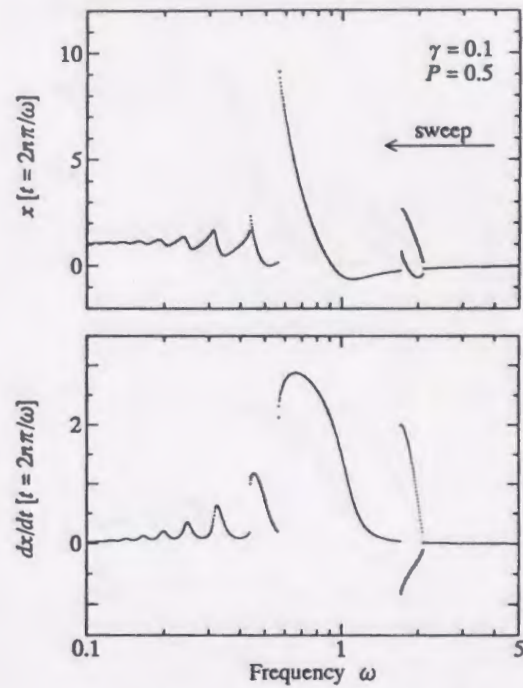
図5.7に図5.5(e) $\gamma = 0.1, P = 0.81$ [→]の場合の分岐図の非周期振動領域の拡大図を示す。これよりさらに詳しい非周期振動の存在範囲や広い1/3次分数調波振動のウィンドウ、カオスの危機の存在などが確認できる。図5.8は図5.7をさらに拡大した分岐図であるが、これによりさらに狭いウィンドウなどが確認できる。

5.4 振動波形

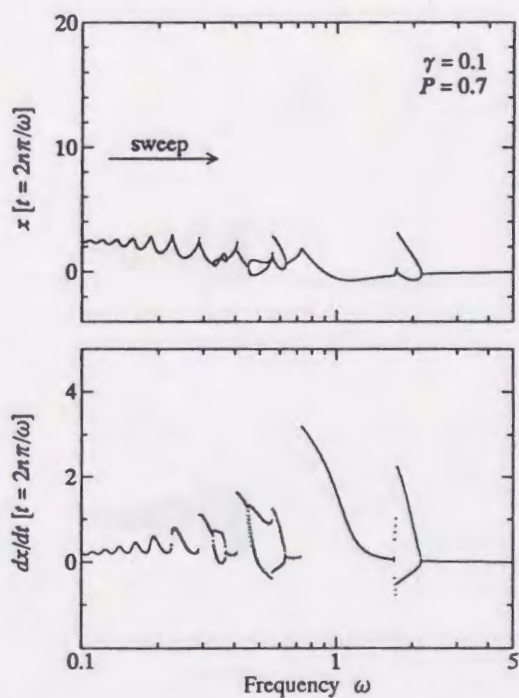
図5.9から図5.11に図5.8の分岐図に示された分岐過程における振動波形の変化を示す。すべての図において γ および P はそれぞれ0.1, 0.81であり、これら



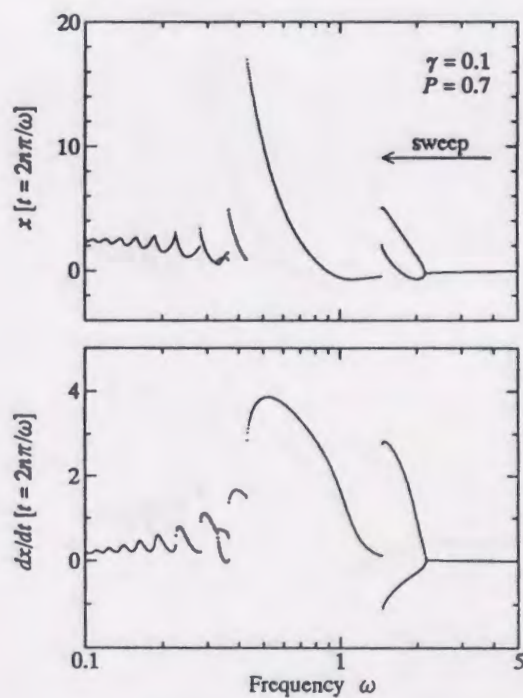
(a) $\gamma = 0.1, P = 0.5$ [\rightarrow]



(b) $\gamma = 0.1, P = 0.5$ [\leftarrow]

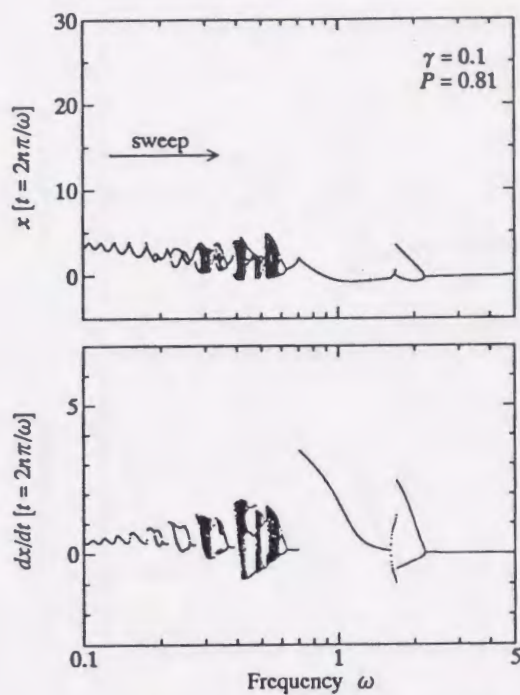


(c) $\gamma = 0.1, P = 0.7$ [\rightarrow]

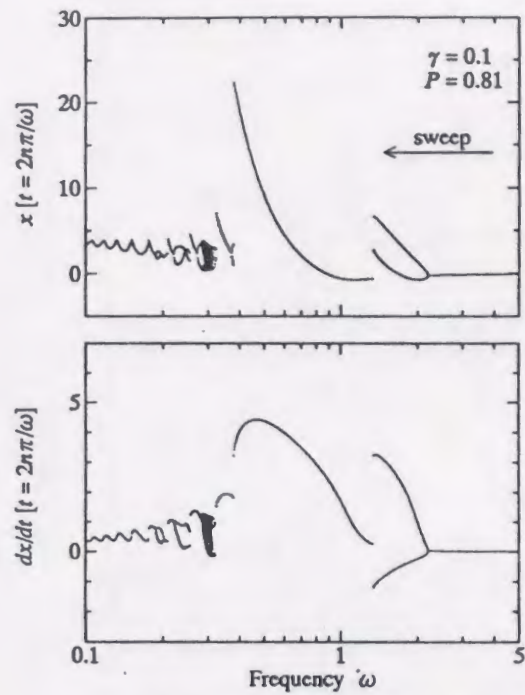


(d) $\gamma = 0.1, P = 0.7$ [\leftarrow]

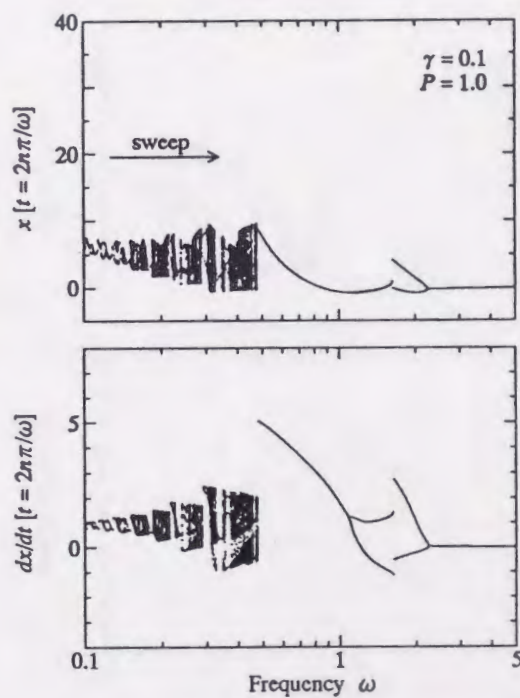
图 5.5 分岐图



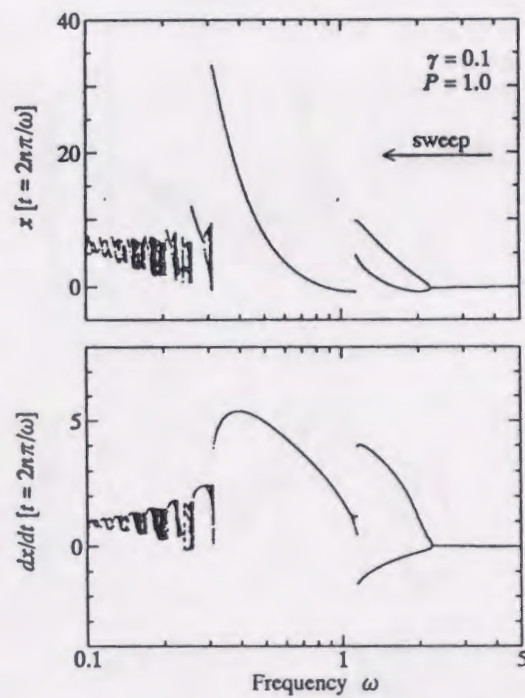
(e) $\gamma = 0.1, P = 0.81$ [\rightarrow]



(f) $\gamma = 0.1, P = 0.81$ [\leftarrow]

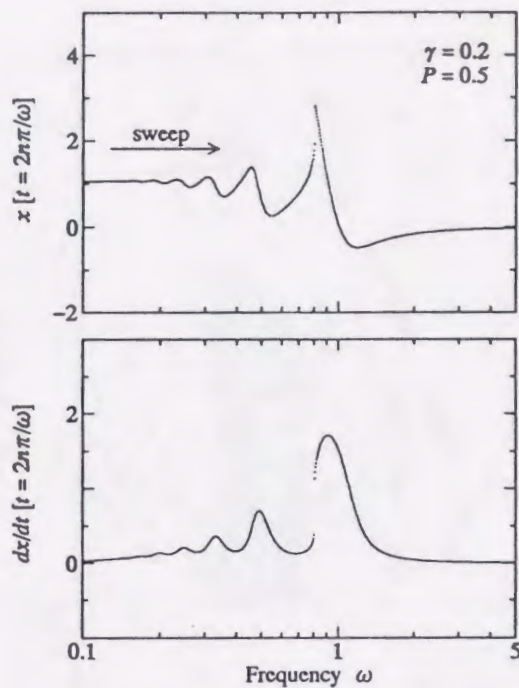


(g) $\gamma = 0.1, P = 1.0$ [\rightarrow]

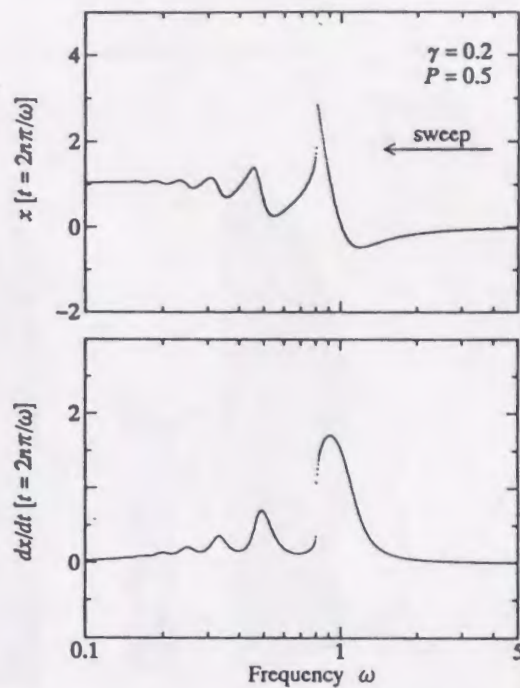


(h) $\gamma = 0.1, P = 1.0$ [\leftarrow]

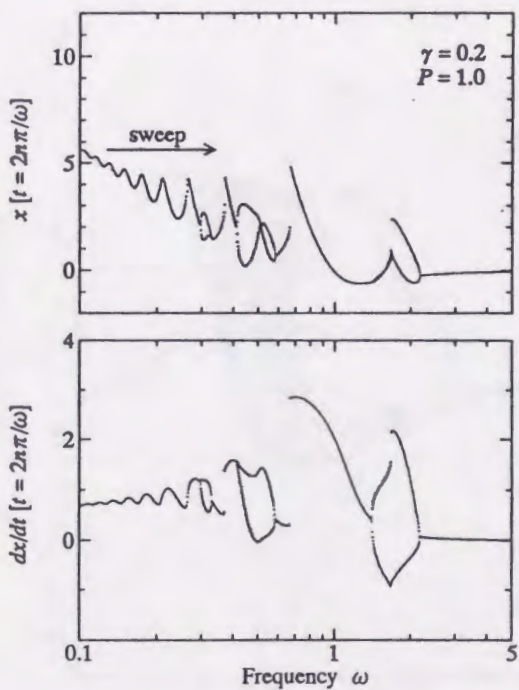
図 5.5 分岐図



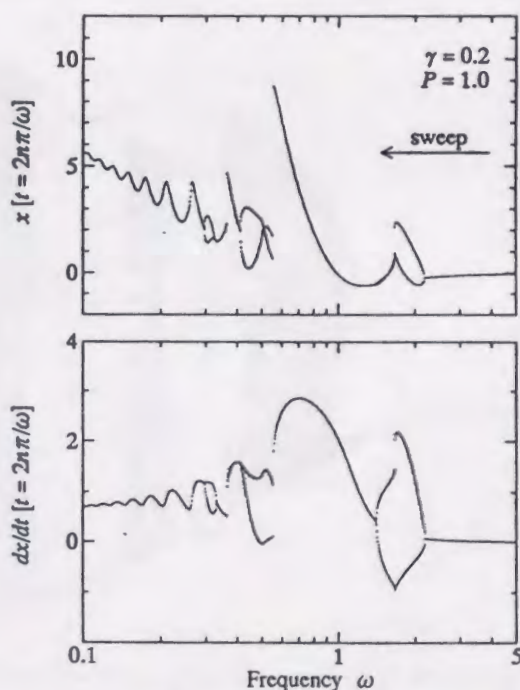
(a) $\gamma = 0.2, P = 0.5$ [\rightarrow]



(b) $\gamma = 0.2, P = 0.5$ [\leftarrow]



(c) $\gamma = 0.2, P = 1.0$ [\rightarrow]



(d) $\gamma = 0.2, P = 1.0$ [\leftarrow]

图 5.6 分岐図

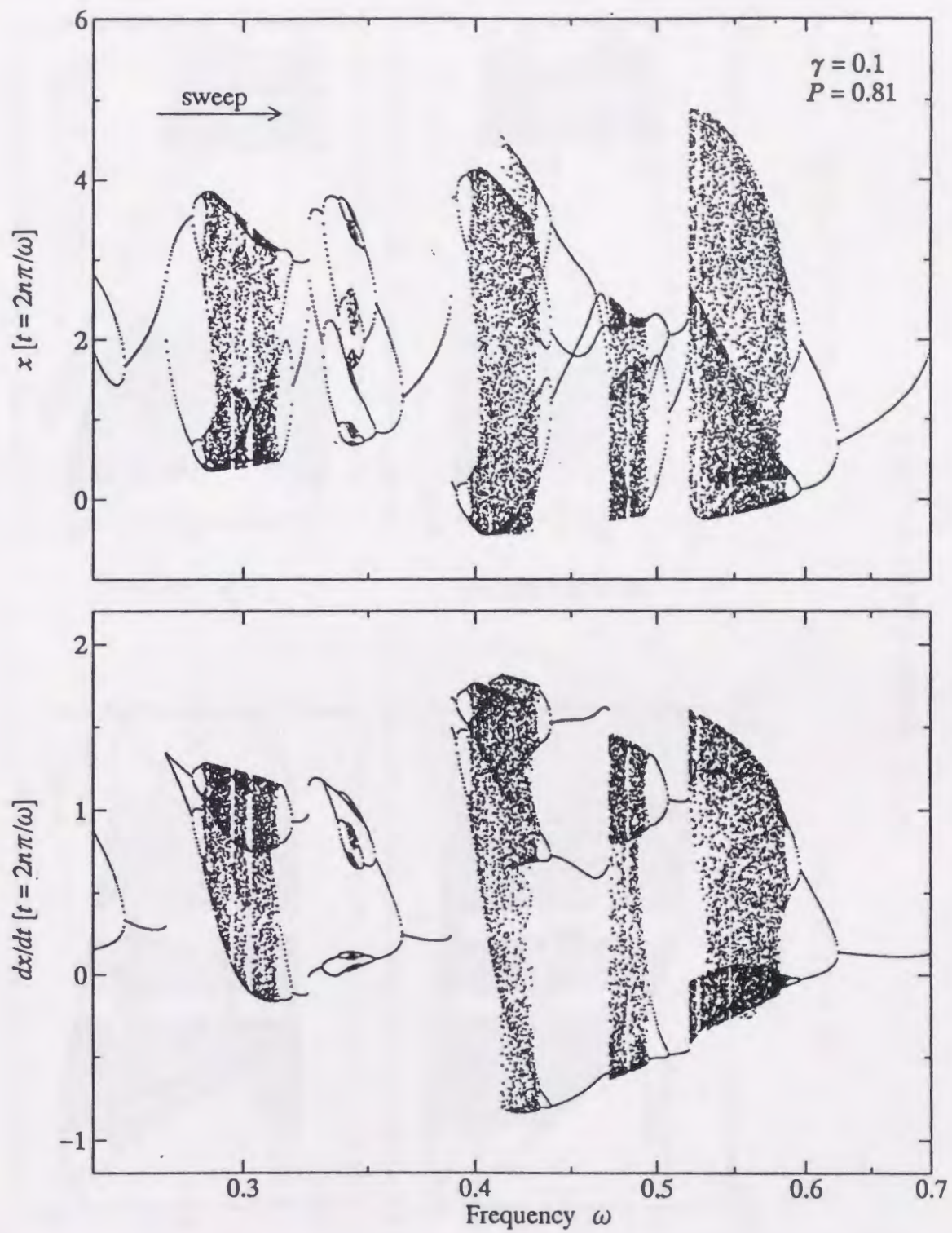
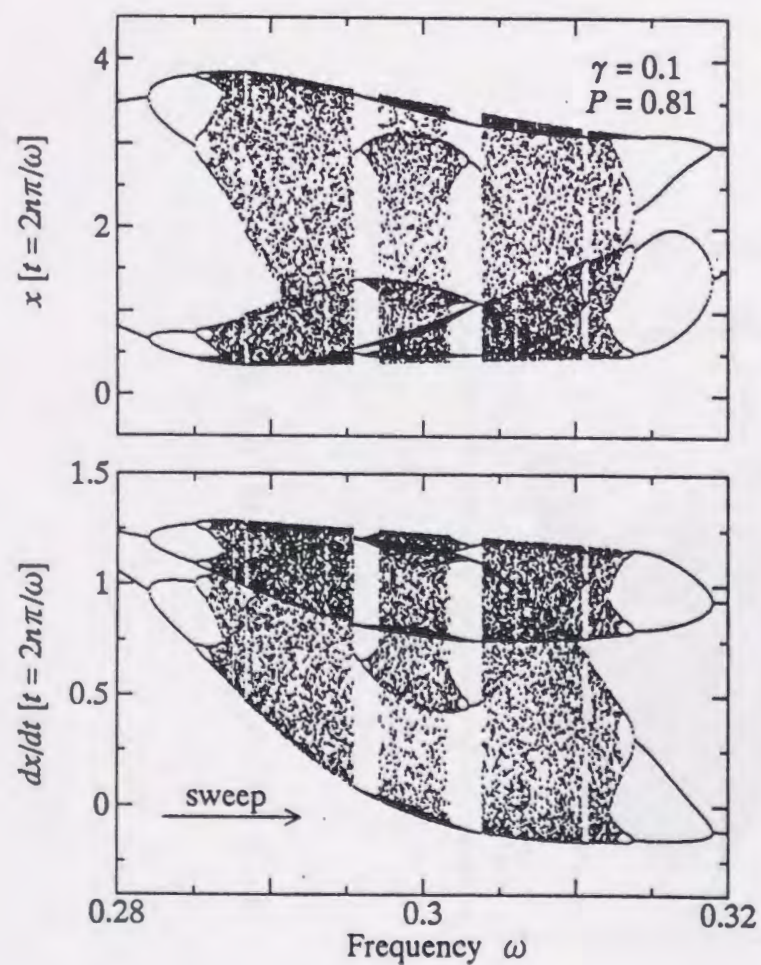
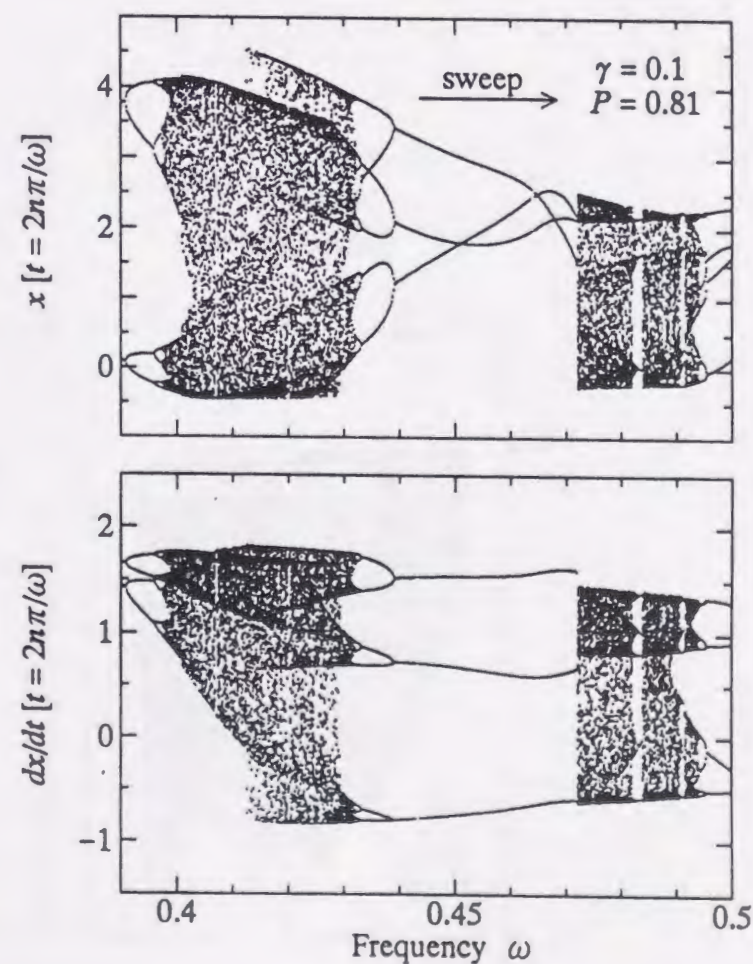


図 5.7 分岐図 ($\gamma = 0.1, P = 0.81, \omega = 0.25 \sim 0.7$ [\rightarrow])

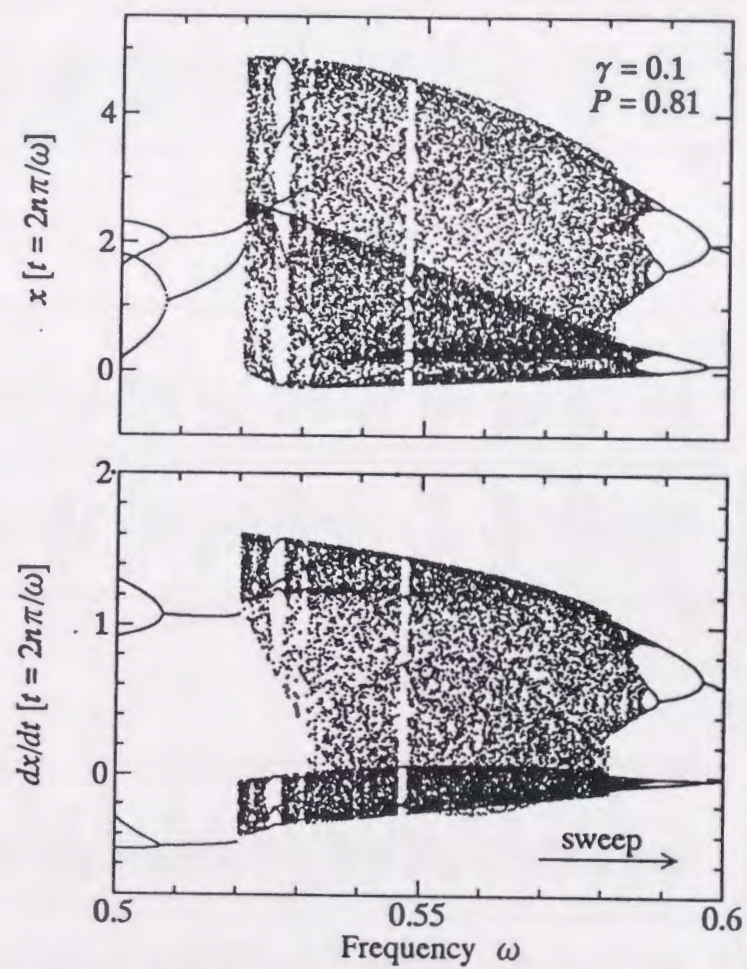


(a) $\omega = 0.28 \sim 0.32$



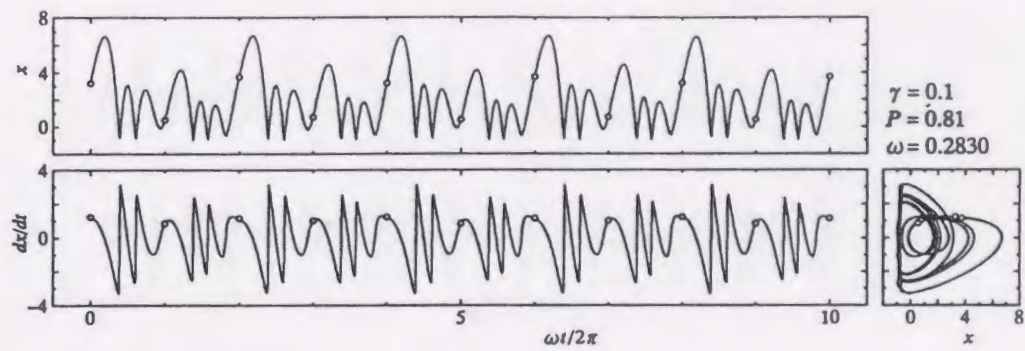
(b) $\omega = 0.39 \sim 0.50$

图 5.8 分岐図 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$ [\rightarrow])

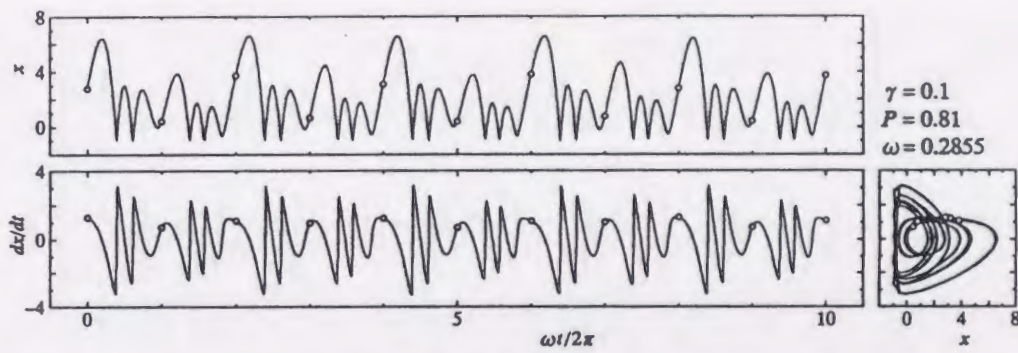


(c) $\omega = 0.50 \sim 0.60$

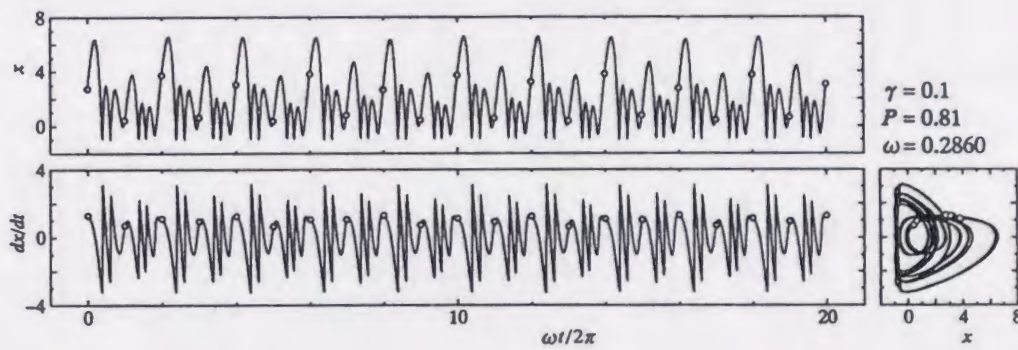
図 5.8 分岐図 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$ [→])



(a) $\omega = 0.2830$

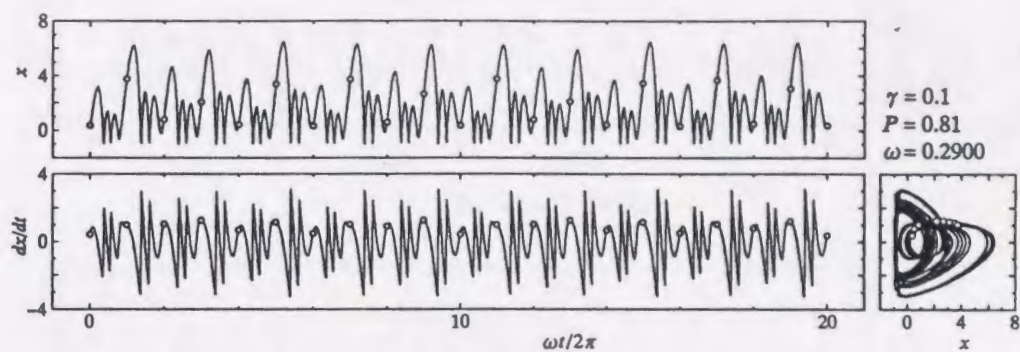


(b) $\omega = 0.2855$

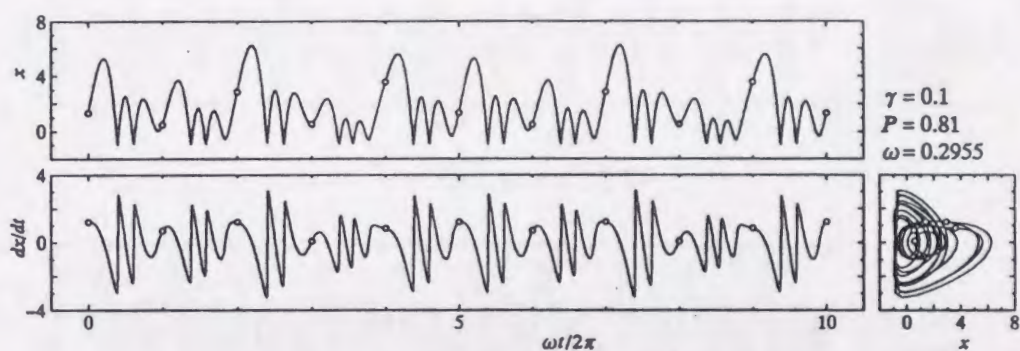


(c) $\omega = 0.2860$

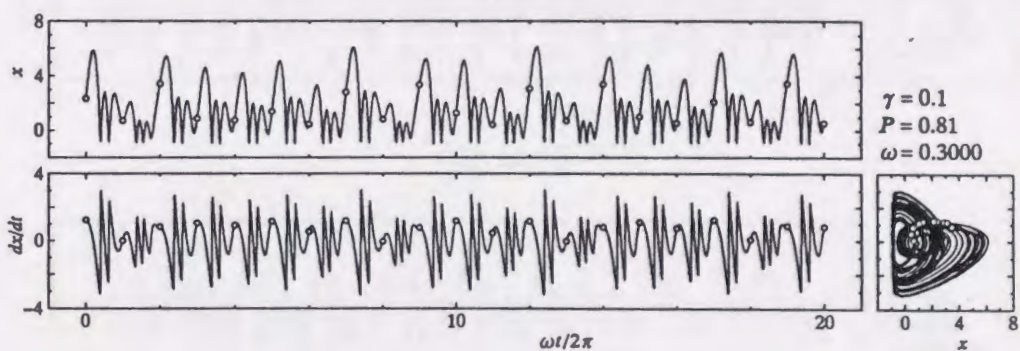
図 5.9 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



(d) $\omega = 0.2900$

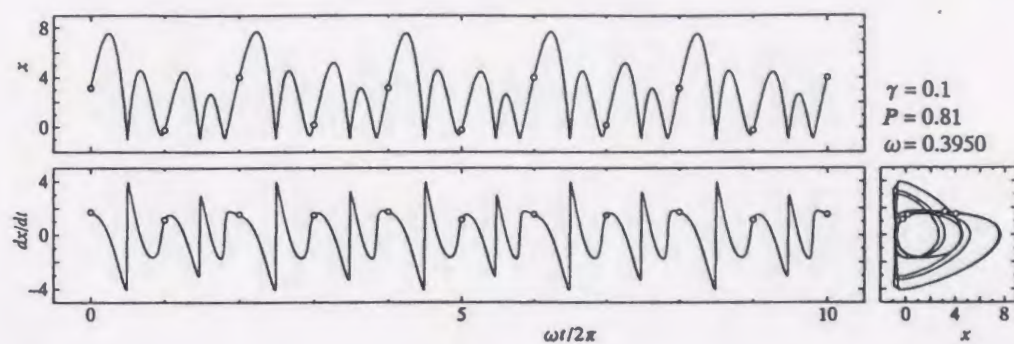


(e) $\omega = 0.2955$

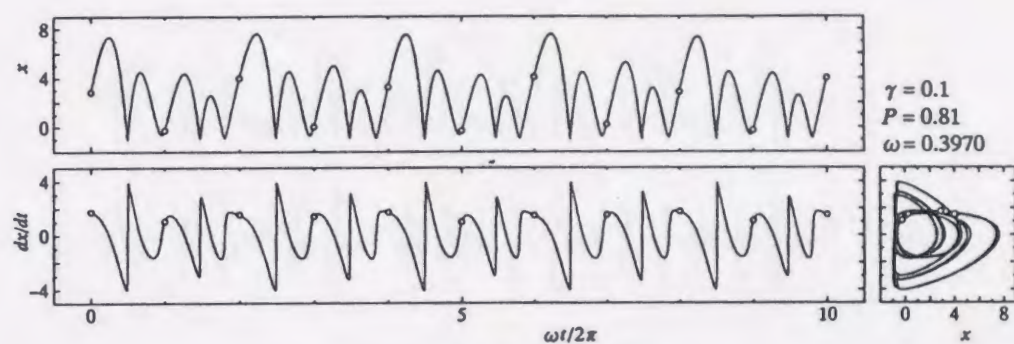


(f) $\omega = 0.3000$

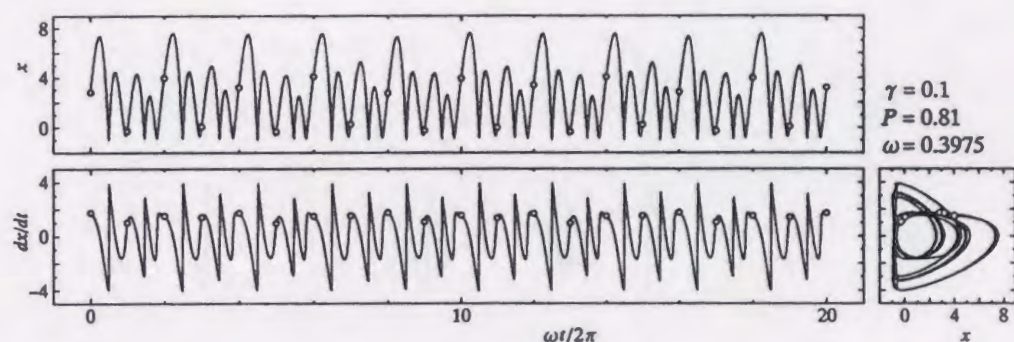
図 5.9 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



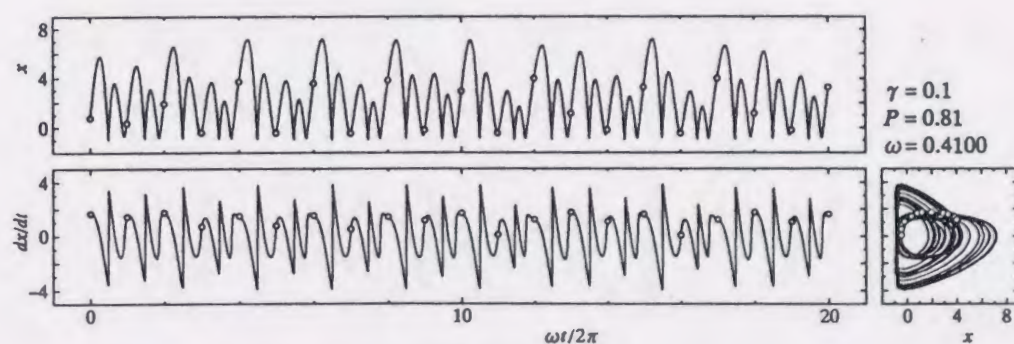
(a) $\omega = 0.3950$



(b) $\omega = 0.3970$

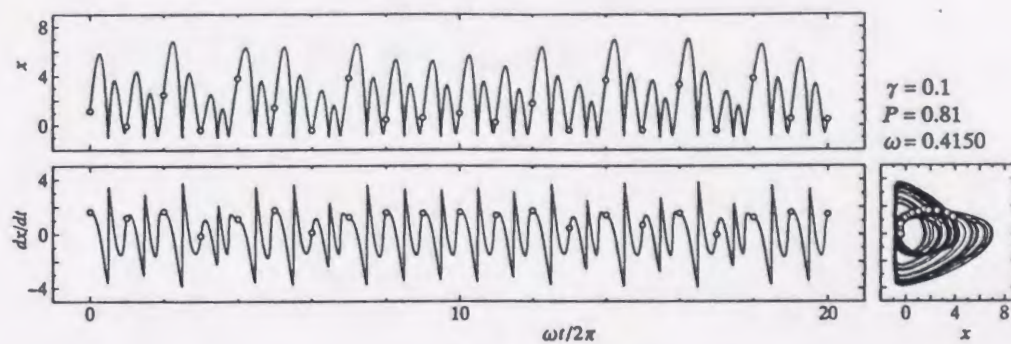


(c) $\omega = 0.3975$

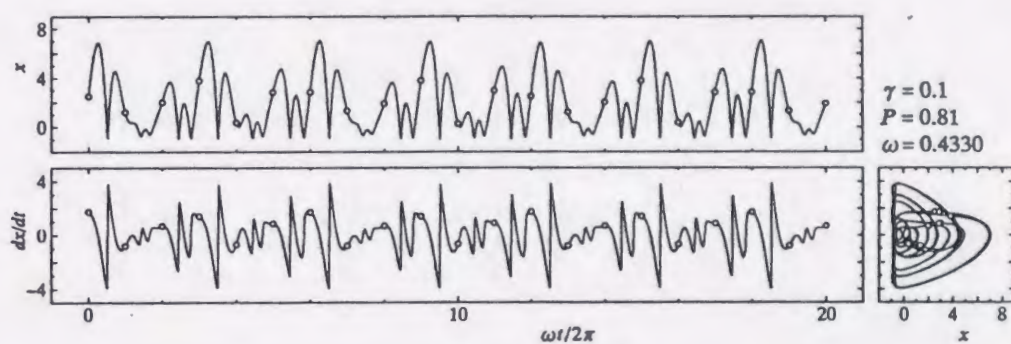


(d) $\omega = 0.4100$

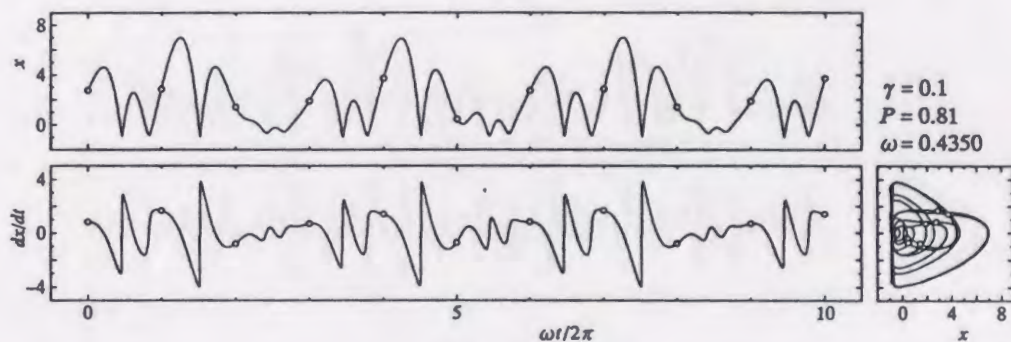
図 5.10 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



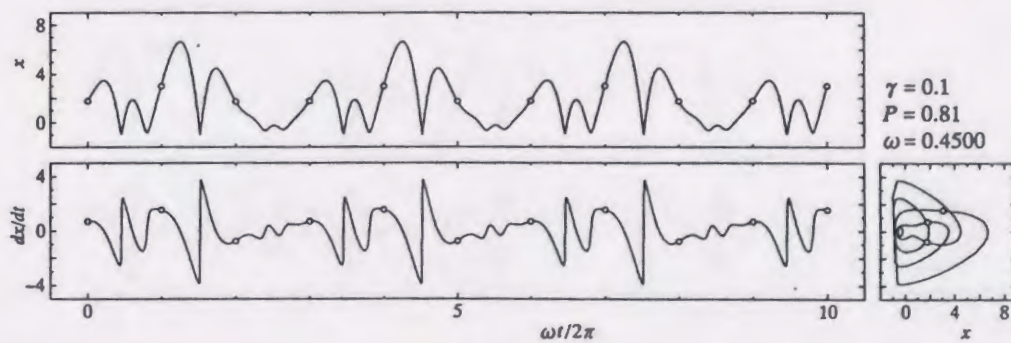
(e) $\omega = 0.4150$



(f) $\omega = 0.4330$

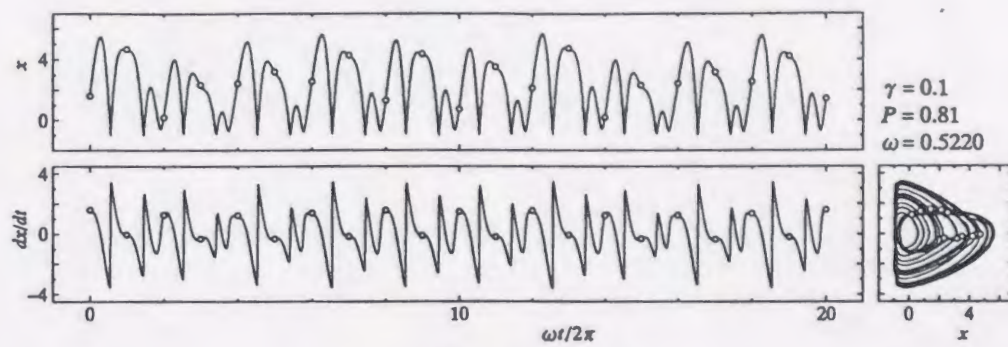


(g) $\omega = 0.4350$

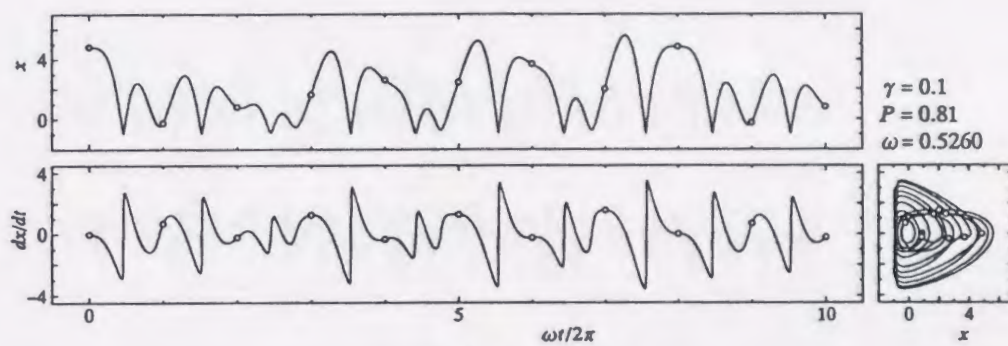


(h) $\omega = 0.4500$

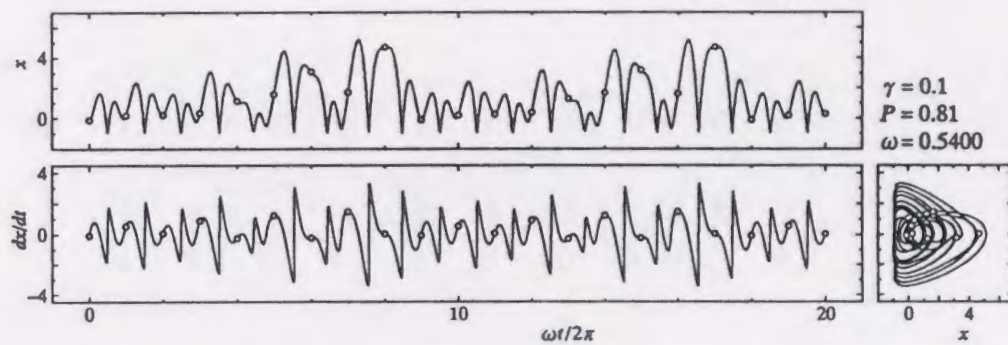
図 5.10 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



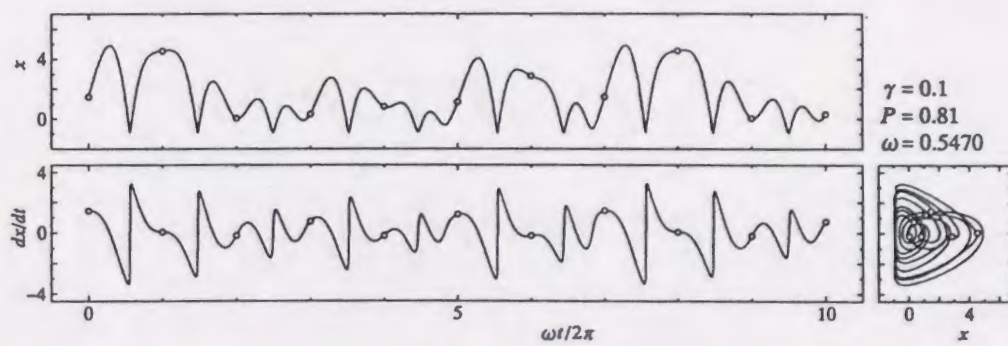
(a) $\omega = 0.5220$



(b) $\omega = 0.5260$

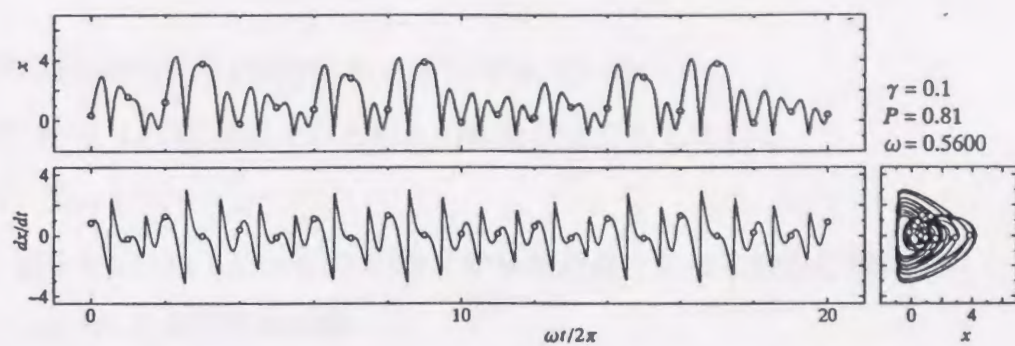


(c) $\omega = 0.5400$

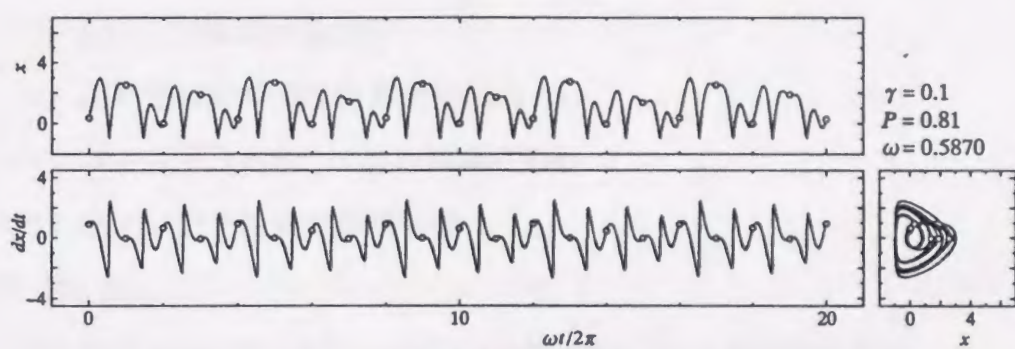


(d) $\omega = 0.5470$

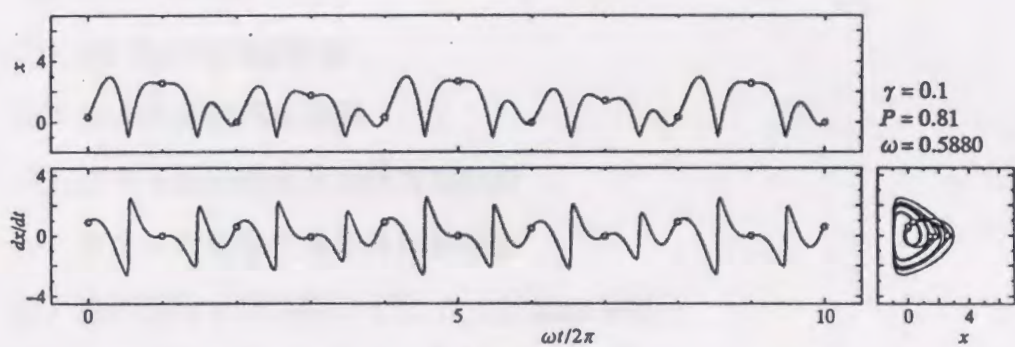
図 5.11 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



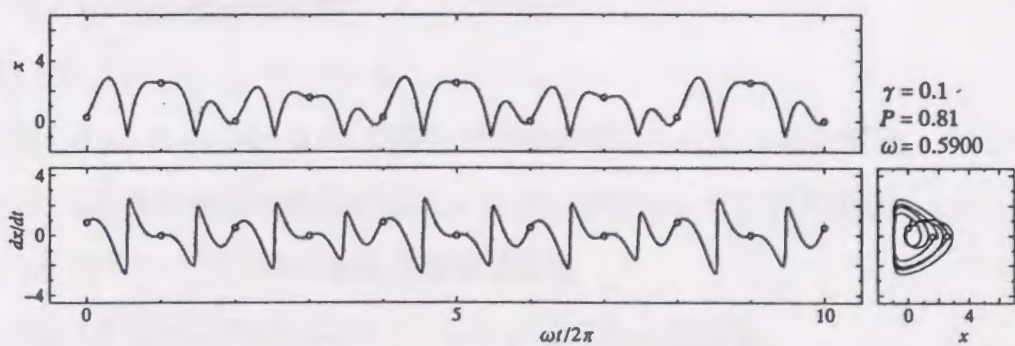
(e) $\omega = 0.5600$



(f) $\omega = 0.5870$



(g) $\omega = 0.5880$



(h) $\omega = 0.5900$

図 5.11 振動波形 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)

は分岐図の掃引方向(振動数小→大)に並んでいる。

図5. 9～5. 11の波形はそれぞれ次の振動状態を表している。

(1) 図5. 9

図5. 8(a) $\omega = 0.28 \sim 0.32$ の場合の分岐過程における波形の変化

- (a) 1/4 次分数調波振動
- (b) 1/8 次分数調波振動
- (c) 1/16 次分数調波振動
- (d) 周期倍分岐集積後の非周期振動
- (e) ウィンドウ内の 1/5 次分数調波振動
- (f) ウィンドウ後の非周期振動

(2) 図5. 10

図5. 8(b) $\omega = 0.39 \sim 0.50$ の場合の分岐過程における波形の変化

- (a) 1/4 次分数調波振動
- (b) 1/8 次分数調波振動
- (c) 1/16 次分数調波振動
- (d) カオスの危機直前の非周期振動
- (e) カオスの危機直後の非周期振動
- (f) 逆周期倍分岐過程の 1/12 次分数調波振動
- (g) 1/6 次分数調波振動
- (h) 1/3 次分数調波振動

(3) 図5. 11

図5. 8(c) $\omega = 0.50 \sim 0.60$ の場合の分岐過程における波形の変化

- (a) 1/2 次分数調波振動からジャンプして発生した非周期振動
- (b) ウィンドウ内の 1/8 次分数調波振動
- (c) 1/7 次分数調波振動ウィンドウ直前の非周期振動
- (d) ウィンドウ内の 1/7 次分数調波振動
- (e) ウィンドウ直後の非周期振動

(f) 逆周期倍分岐過程の $1/16$ 次分数調波振動

(g) $1/8$ 次分数調波振動

(h) $1/4$ 次分数調波振動

すべての波形は $x = -1$ 付近で急激に速度が変化し衝突系を思わせる形状をしている。周期倍分岐および逆周期倍分岐の過程では位相平面上の軌道が分かれるまたは合わさるように変化する。また、図5.10(d)および(e)よりカオスの危機前後では比較的大きい波形の変化が特にリサージュ図によって確認できる。

5.5 ポアンカレ写像

図5.12, 5.13, 5.14はそれぞれ図5.8(a), (b), (c)に示される分岐過程におけるポアンカレ写像の変化を描いたものである。パラメータは振動波形のそれと全く同じであり、表している状態も等しい。

非周期振動のポアンカレ写像はすべてストレンジアトラクタの特徴を持ち、非周期振動がカオス振動であることがわかる。さらに図5.13(d), (e)より、カオスの危機の前後でポアンカレ写像の形は大きく異なり振動状態の大きな変化を表していることがわかる。

5.6 スペクトル解析

図5.15~5.17は分岐過程におけるスペクトルの変化を表したものである。計算方法は二次曲線ばね系の場合とほぼ同様であるが、一周期のデータサンプリング数は128とした。前節と同様にパラメータは振動波形のそれと全く同じである。

すべての場合において、周期振動は線スペクトル、非周期振動は連続的なスペクトルとなり、非周期振動がカオス振動であることが証明される。またカオスの危機の前後ではスペクトルには大きな変化が現れることが図5.16(d), (e)よりわかる。

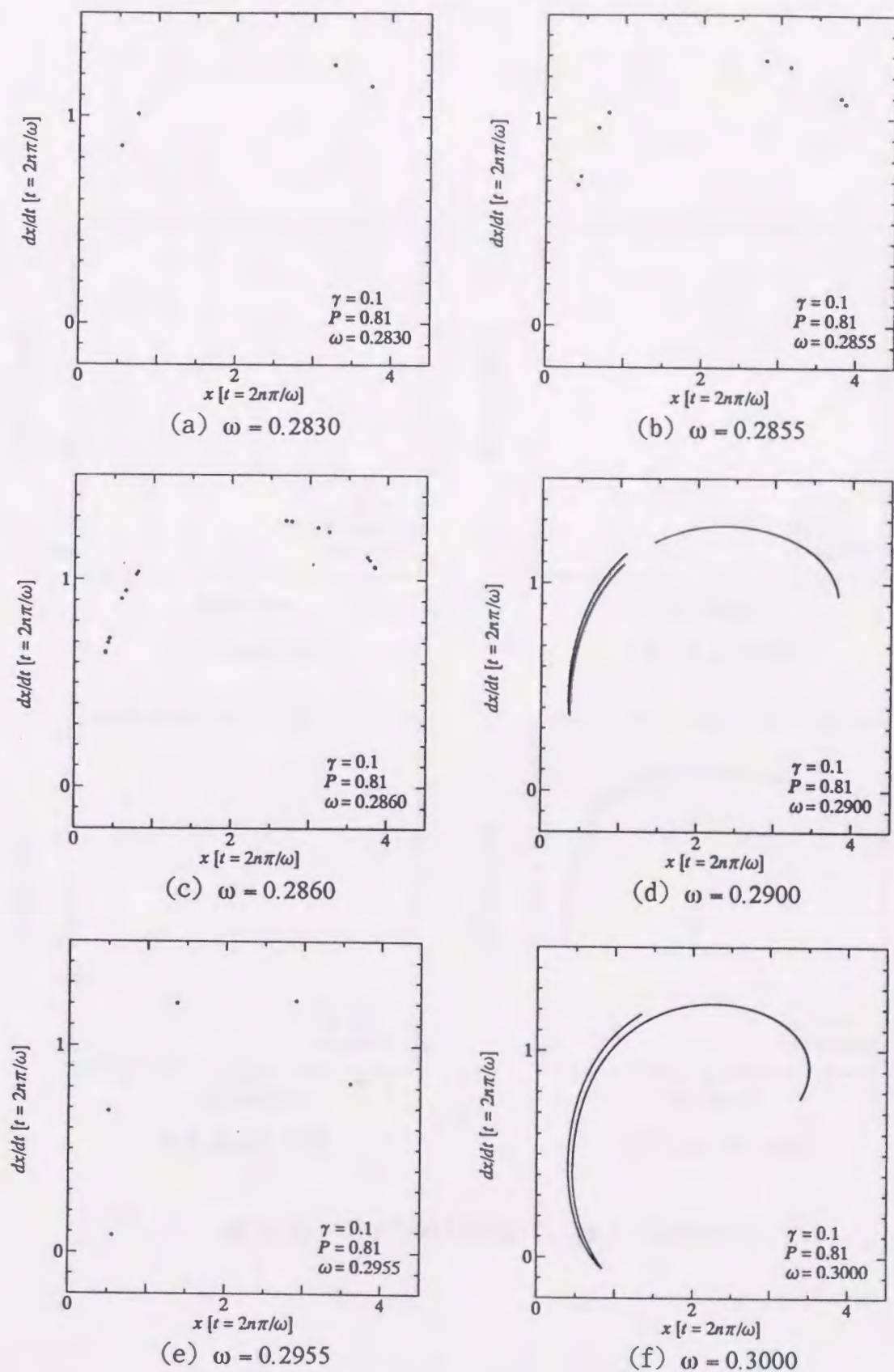
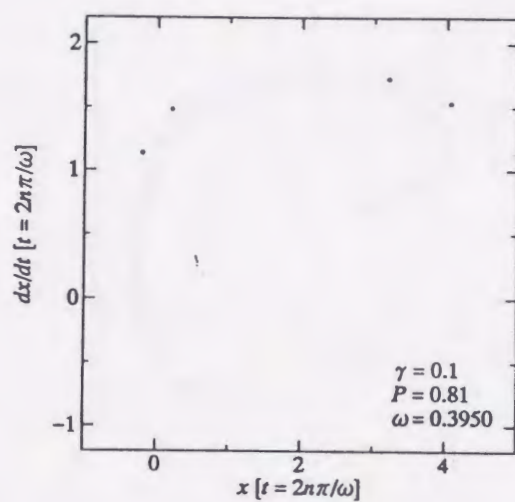
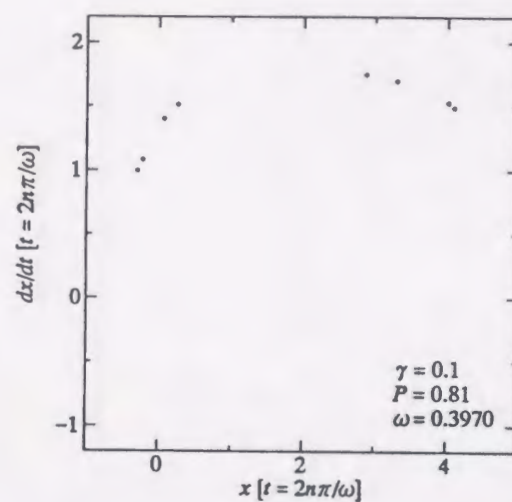


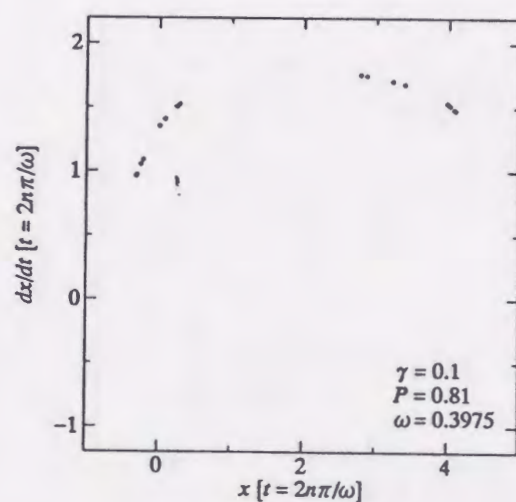
図 5.12 ポアンカレ写像 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



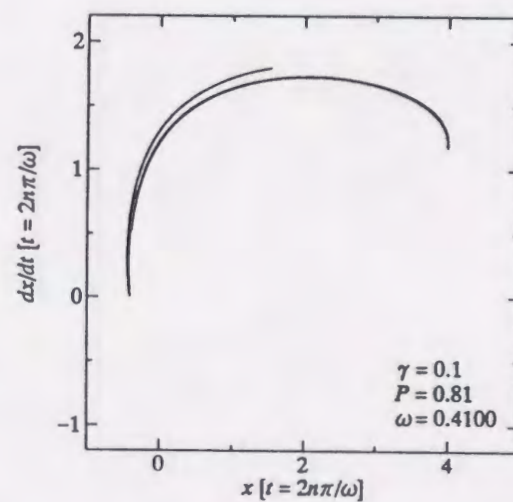
(a) $\omega = 0.3950$



(b) $\omega = 0.3970$

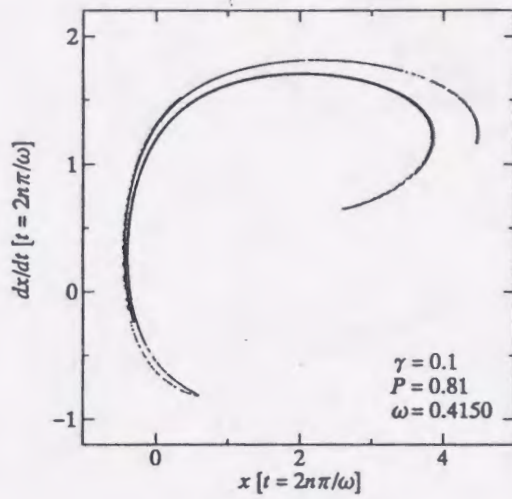


(c) $\omega = 0.3975$

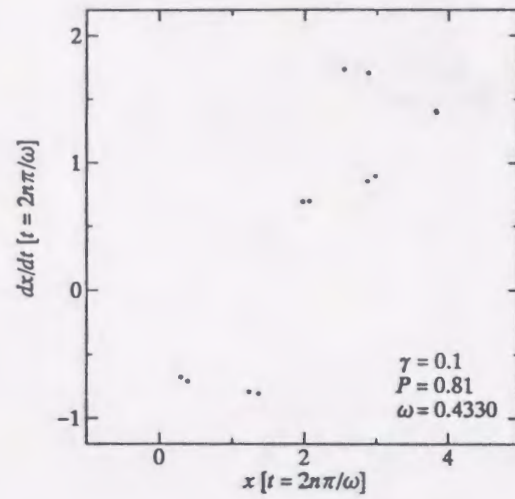


(d) $\omega = 0.4100$

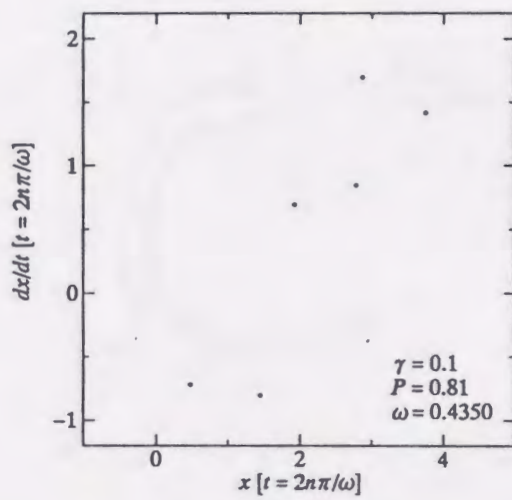
図 5.13 ポアンカレ写像 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



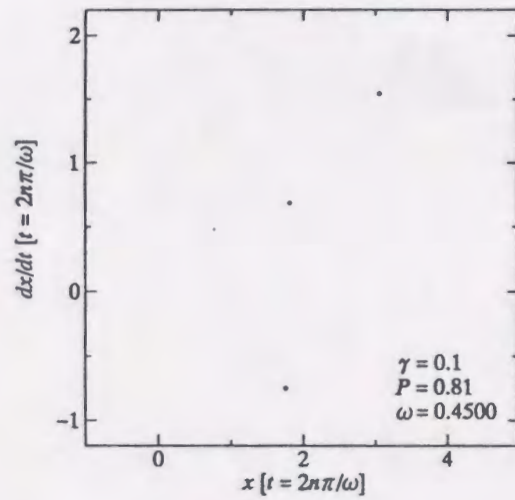
(e) $\omega = 0.4150$



(f) $\omega = 0.4330$

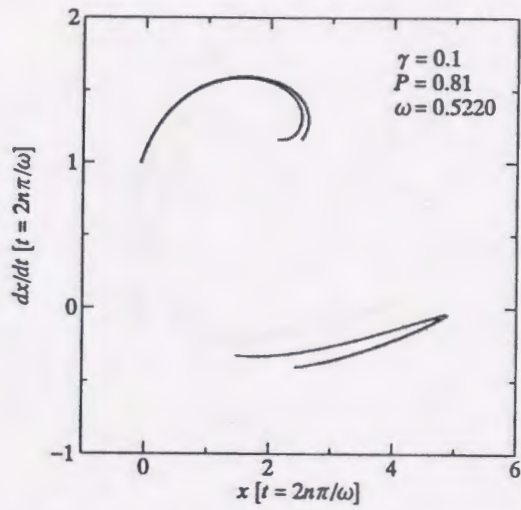


(g) $\omega = 0.4350$

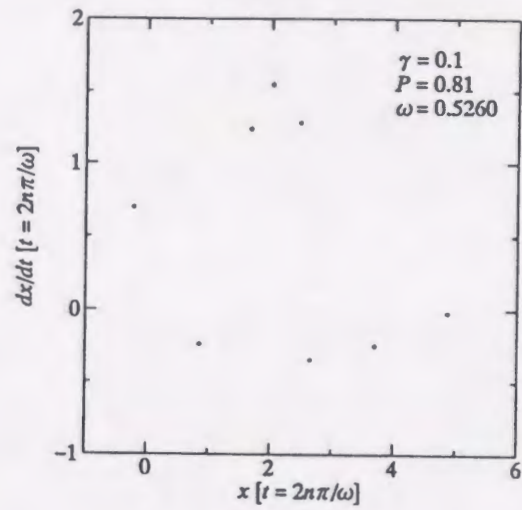


(h) $\omega = 0.4500$

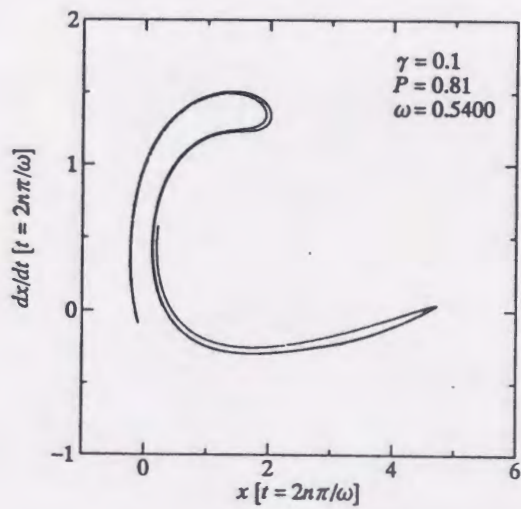
図 5.13 ポアンカレ写像 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



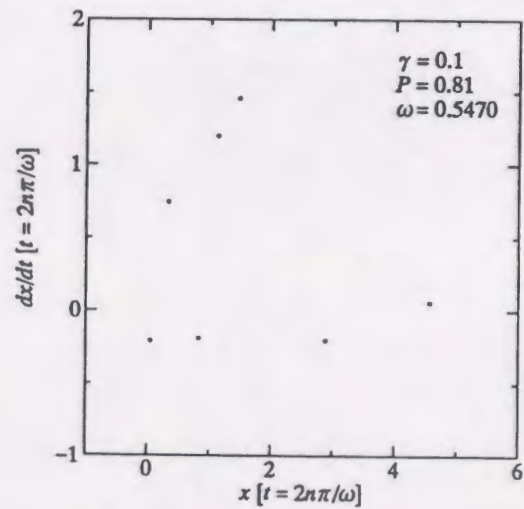
(a) $\omega = 0.5220$



(b) $\omega = 0.5260$

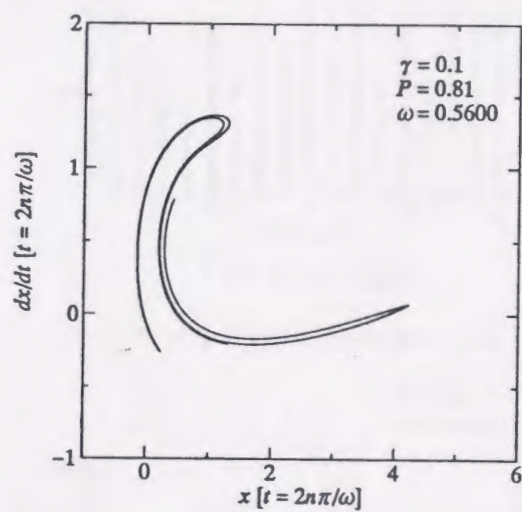


(c) $\omega = 0.5400$

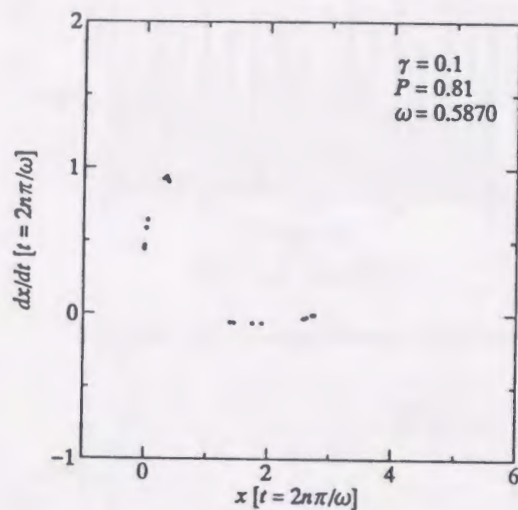


(d) $\omega = 0.5470$

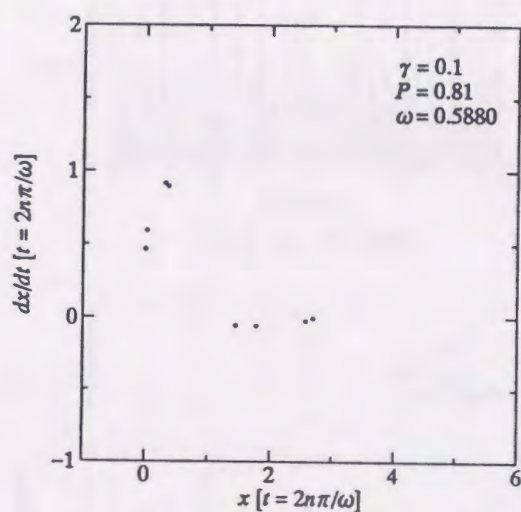
図 5.14 ポアンカレ写像 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



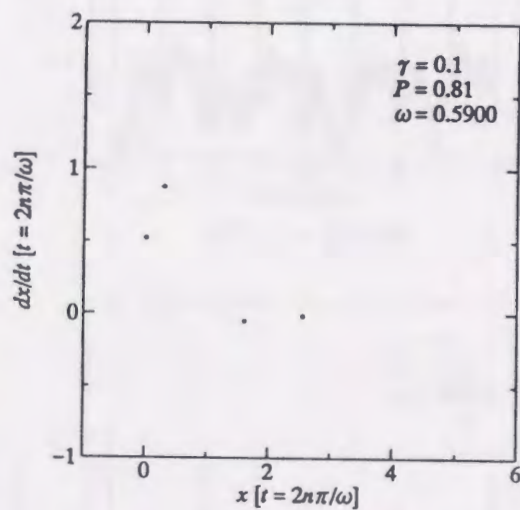
(e) $\omega = 0.5600$



(f) $\omega = 0.5870$

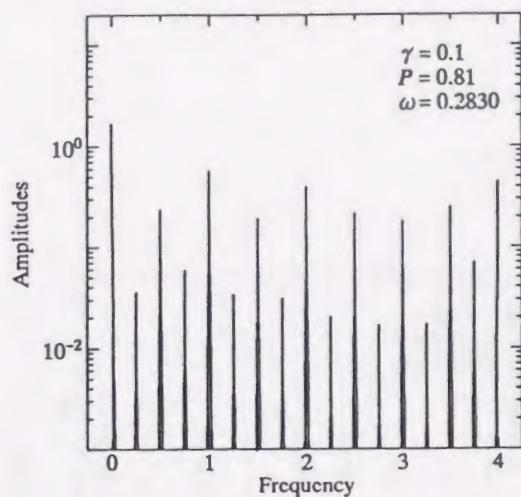


(g) $\omega = 0.5880$

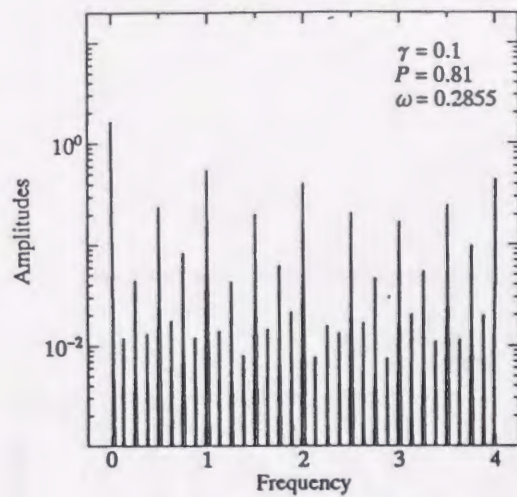


(h) $\omega = 0.5900$

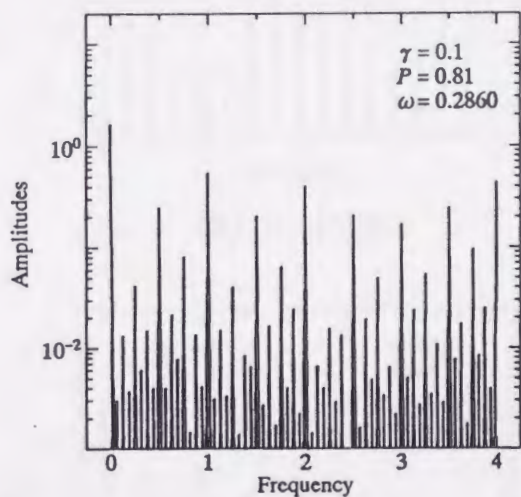
図 5.14 ポアンカレ写像 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



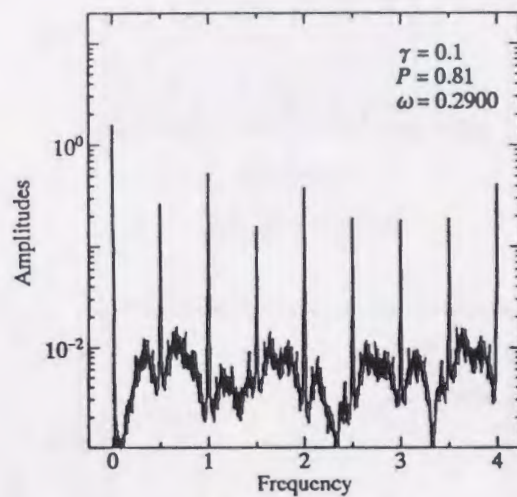
(a) $\omega = 0.2830$



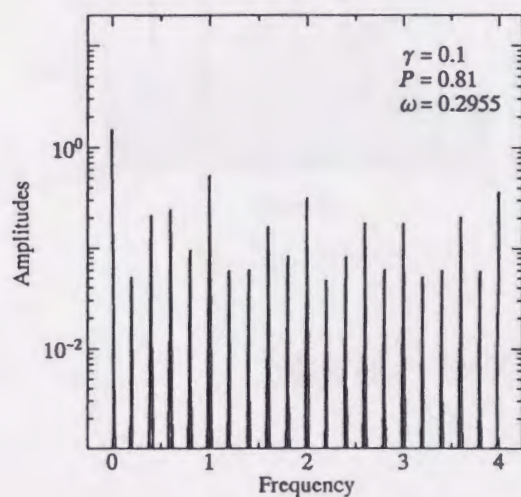
(b) $\omega = 0.2855$



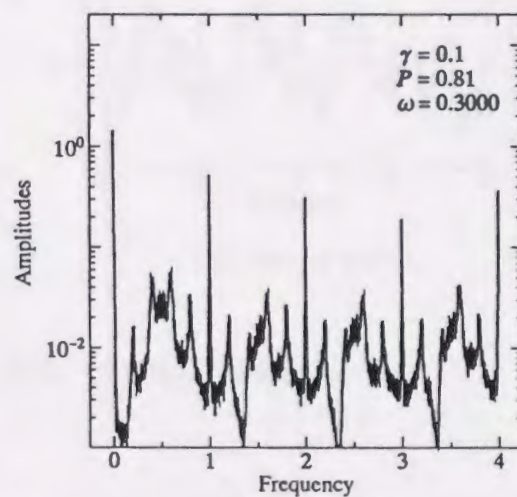
(c) $\omega = 0.2860$



(d) $\omega = 0.2900$

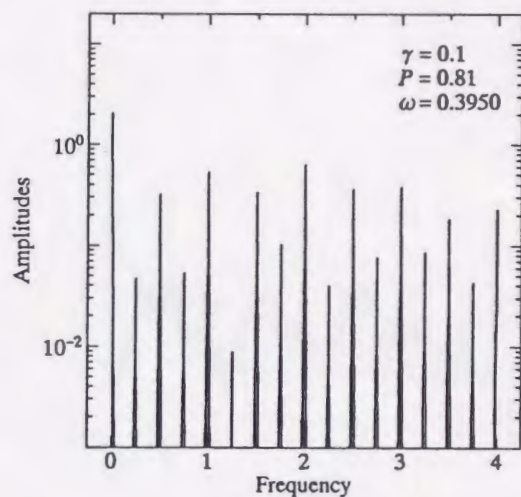


(e) $\omega = 0.2955$

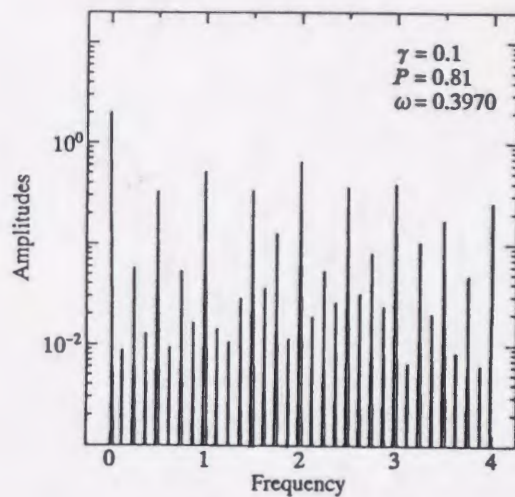


(f) $\omega = 0.3000$

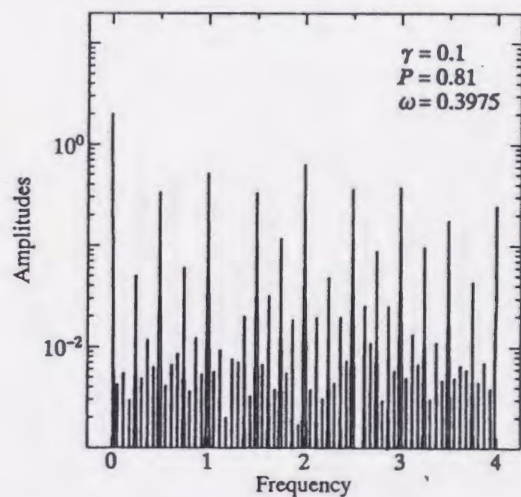
図 5.15 パワースペクトル ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



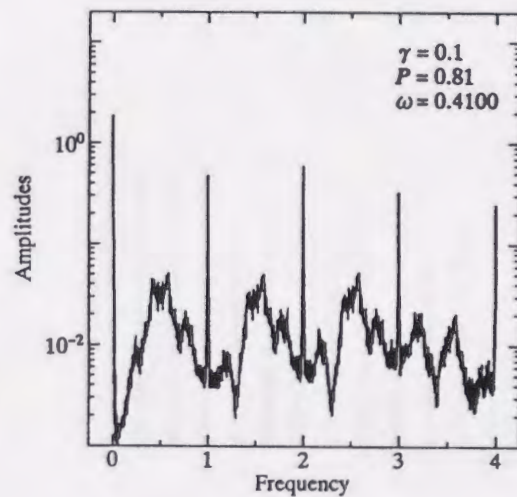
(a) $\omega = 0.3950$



(b) $\omega = 0.3970$

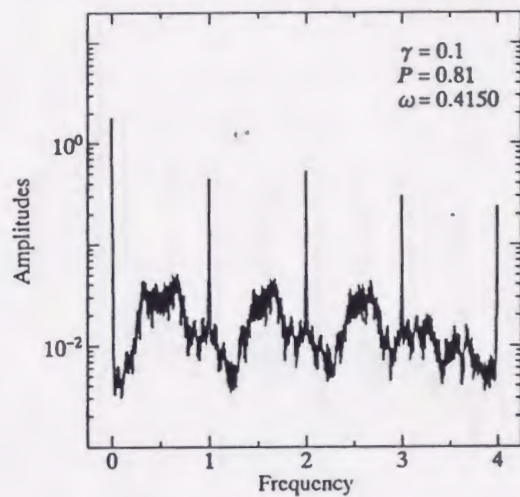


(c) $\omega = 0.3975$

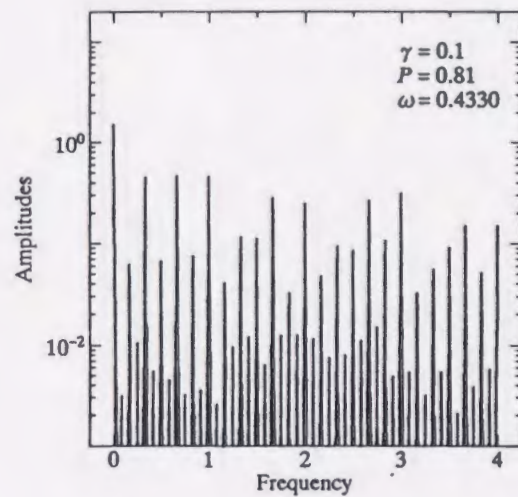


(d) $\omega = 0.4100$

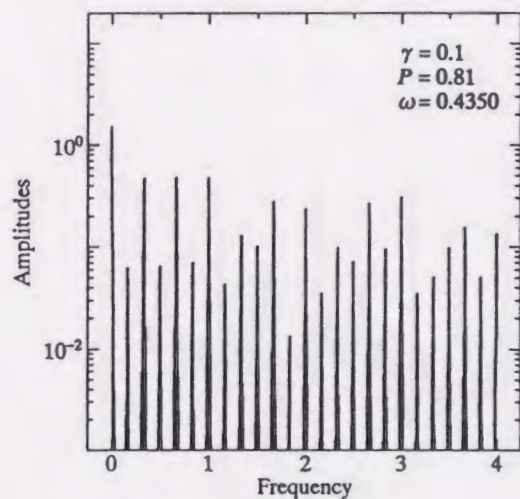
図 5.16 パワースペクトル ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



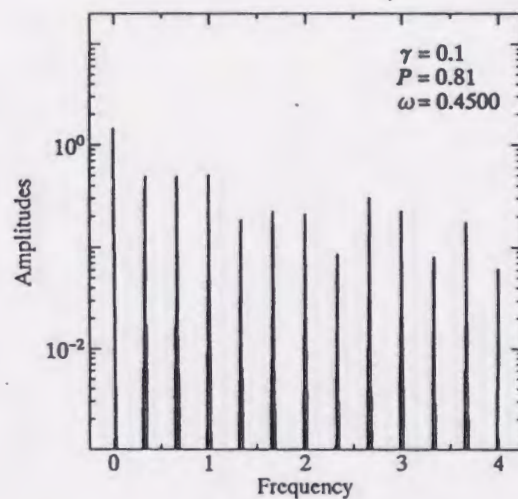
(e) $\omega = 0.4150$



(f) $\omega = 0.4330$

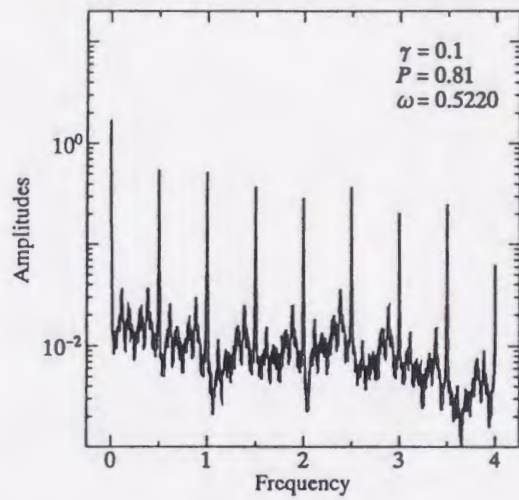


(g) $\omega = 0.4350$

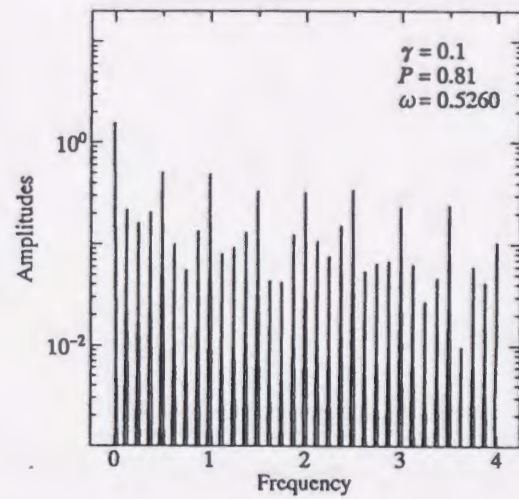


(h) $\omega = 0.4500$

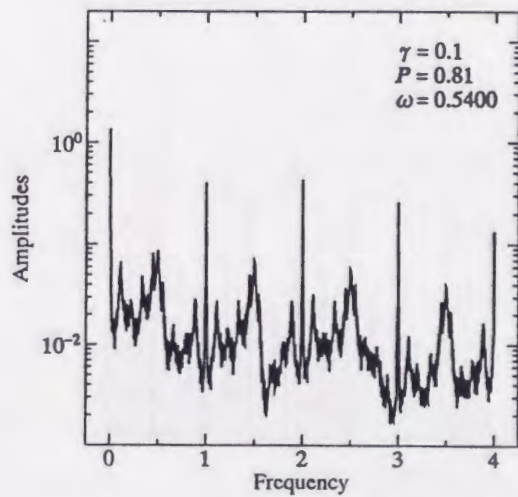
図 5.16 パワースペクトル ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



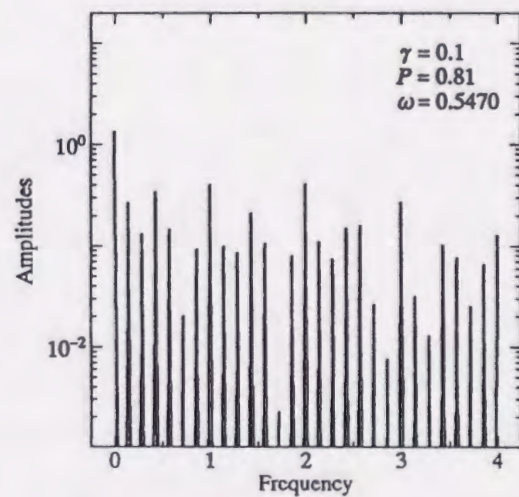
(a) $\omega = 0.5220$



(b) $\omega = 0.5260$

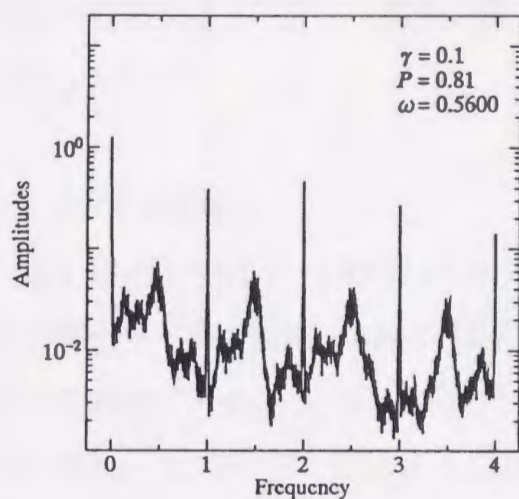


(c) $\omega = 0.5400$

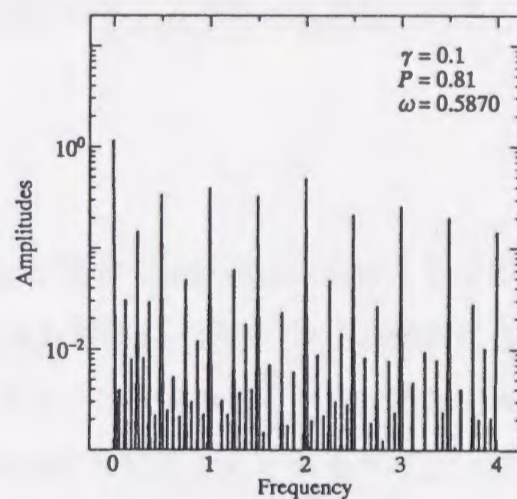


(d) $\omega = 0.5470$

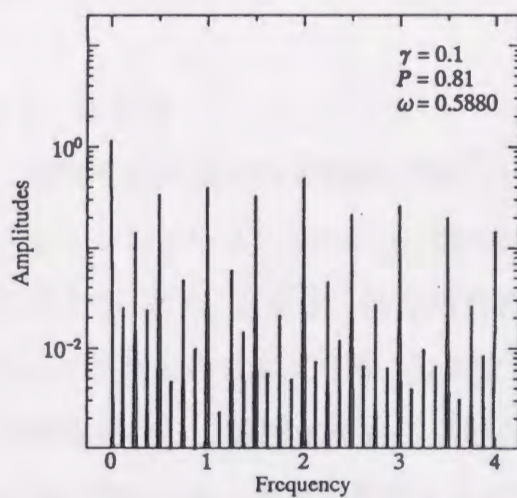
図 5.17 パワースペクトル ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



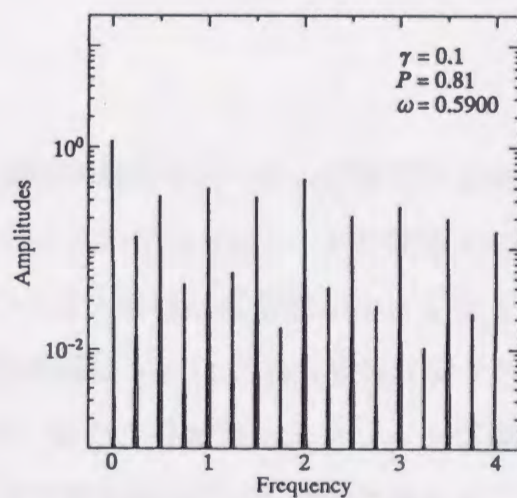
(e) $\omega = 0.5600$



(f) $\omega = 0.5870$



(g) $\omega = 0.5880$



(h) $\omega = 0.5900$

図 5.17 パワースペクトル ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)

5.7 リアプノフ指数

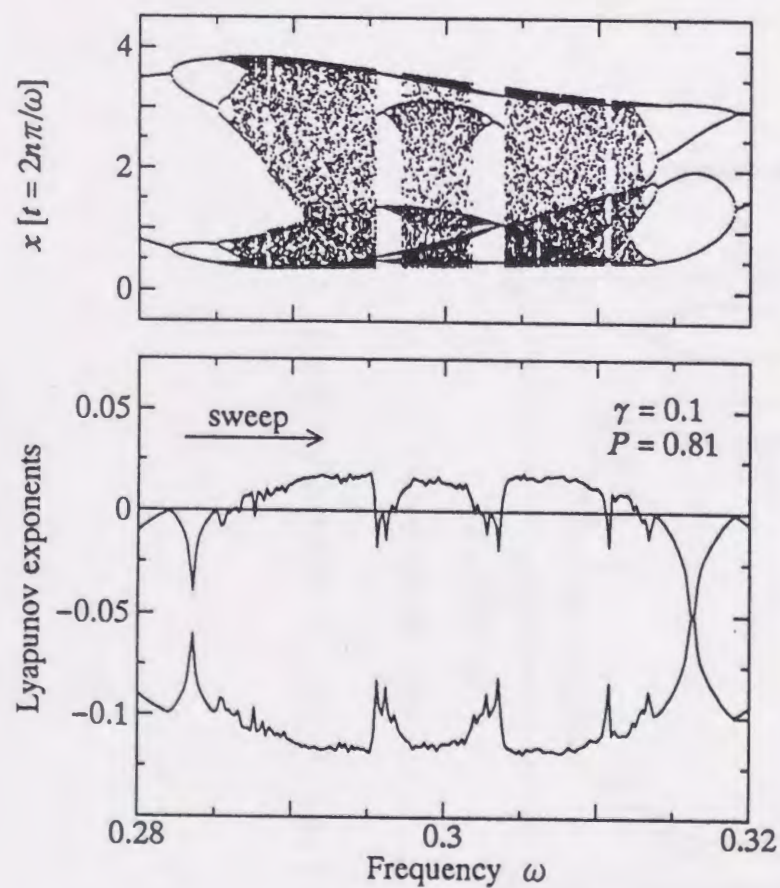
図5.18に分岐に伴うリアプノフ指数の変化を示す。図5.18(a), (b), (c)はそれぞれ図5.7(a), (b), (c)と対応している。すべての図からわかるように非周期振動の範囲ではリアプノフ指数の最大値は正の値を取りカオス振動であることを示している。

5.8 不変多様体

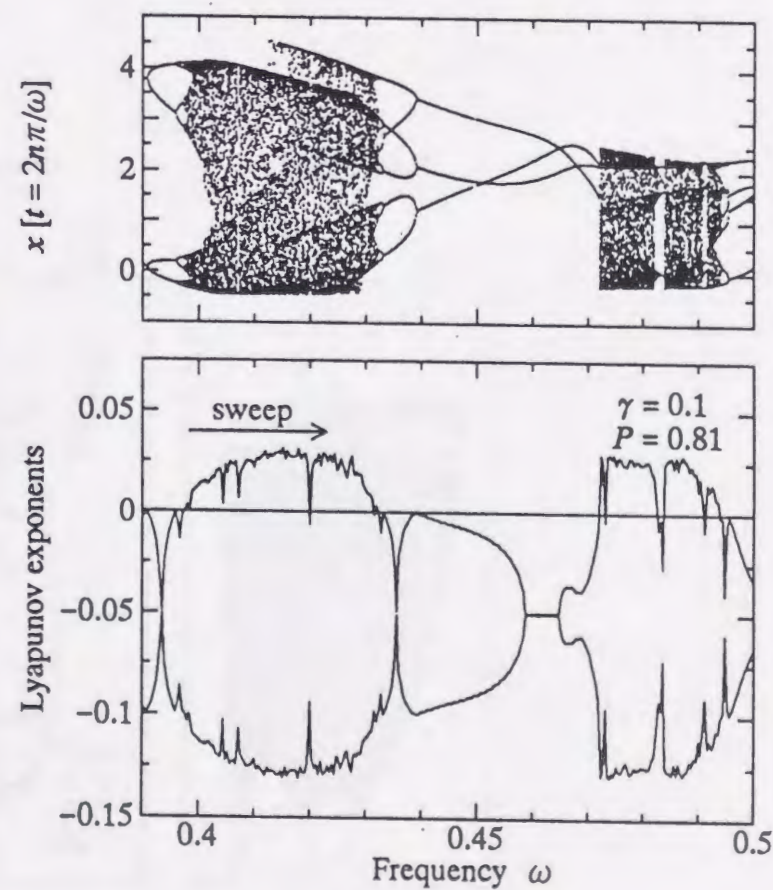
図5.19に $\gamma = 0.1, P = 0.81, \omega = 0.50 \sim 0.60$ の場合の分岐過程における不変多様体の変化を示す。(a) $\omega = 0.5220$ はポアンカレ写像およびスペクトル解析によりカオス振動であることが証明されたが、図からホモクリニック点は確認できない。(b) $\omega = 0.5400$ および(c) $\omega = 0.5600$ はカオス振動でありホモクリニック点が存在する。(d) $\omega = 0.5900$ は $1/4$ 次分数調波振動でホモクリニック点は存在しない。

5.9 まとめ

本章では空気ばね系強制振動について数値的解析を行った。振幅特性曲線はスケルトンカーブに沿って左に傾き軟性ばね系の傾向を示し、 P が復原力の最大値と等しい1の場合、低振動数範囲での最大振幅は振動数が小さくなるに従って平均的に大きくなる。安定定常解領域図は $\gamma = 0.1$ の場合複雑なフラクタル構造を有し、領域が複雑に分けられる。また、分岐図によりジャンプ現象、周期倍分岐現象、非周期振動などが安定定常解領域図に沿った形で現れることが確認された。振動波形、ポアンカレ写像、パワースペクトルの解析により非周期振動はカオス振動であると証明されたが、不変多様体のホモクリニック点はカオス振動と密接な関係があると考えられながらも、直接カオス振動の存否を判断する方法にはなり得ないことがわかった。

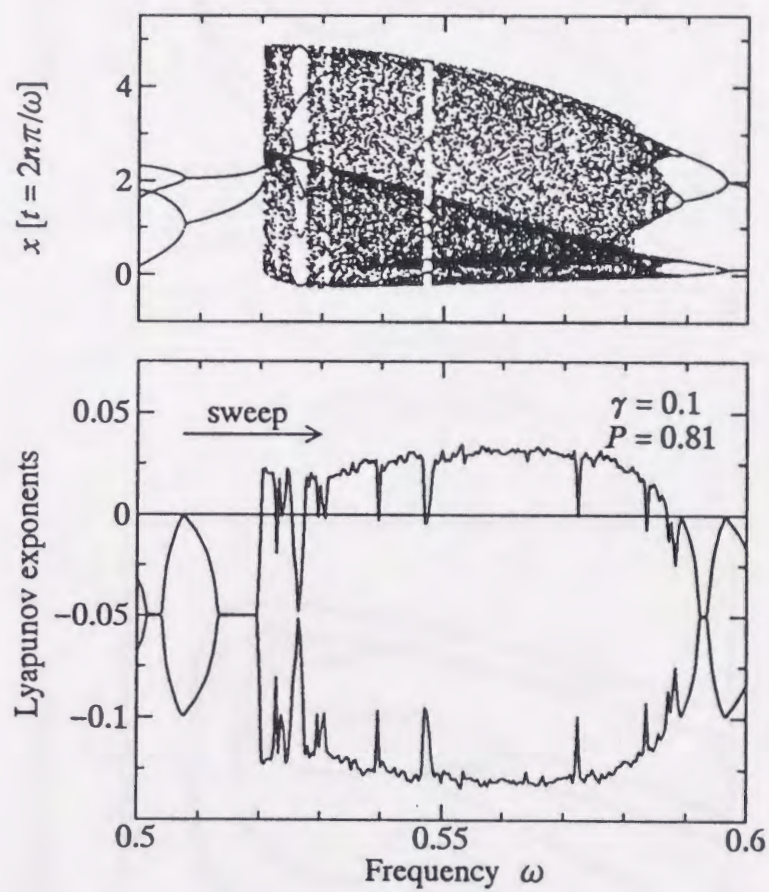


(a) $\omega = 0.28 \sim 0.32$



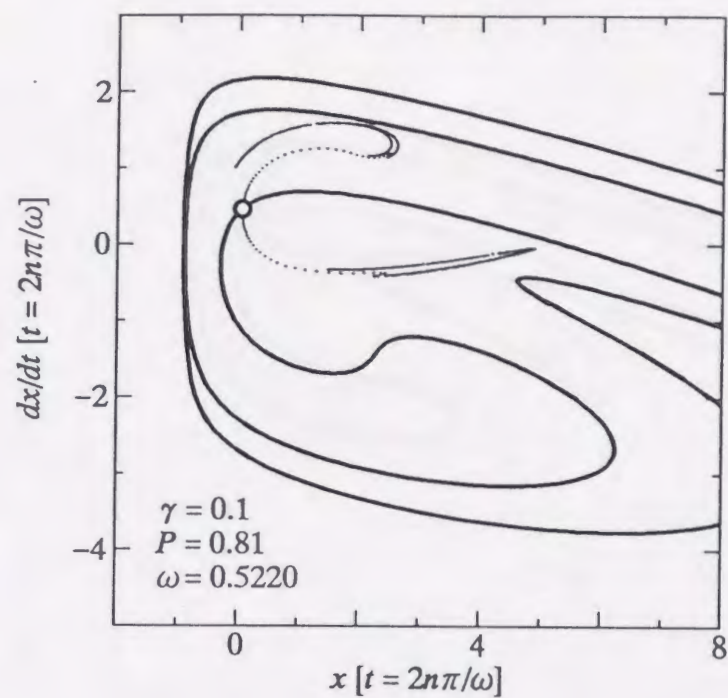
(b) $\omega = 0.39 \sim 0.50$

図 5.18 リアプノフ指数 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$ [→])

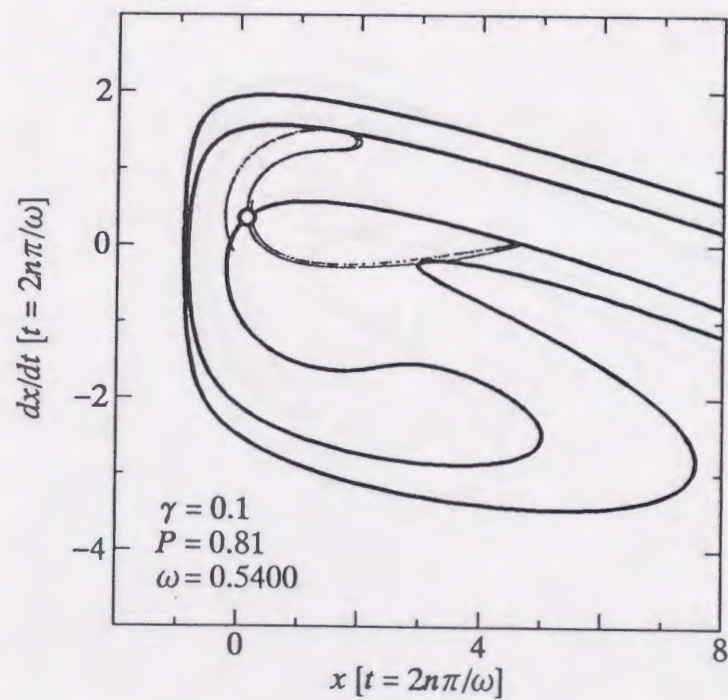


(c) $\omega = 0.50 \sim 0.60$

図 5.18 リアプノフ指数 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$ [\rightarrow])

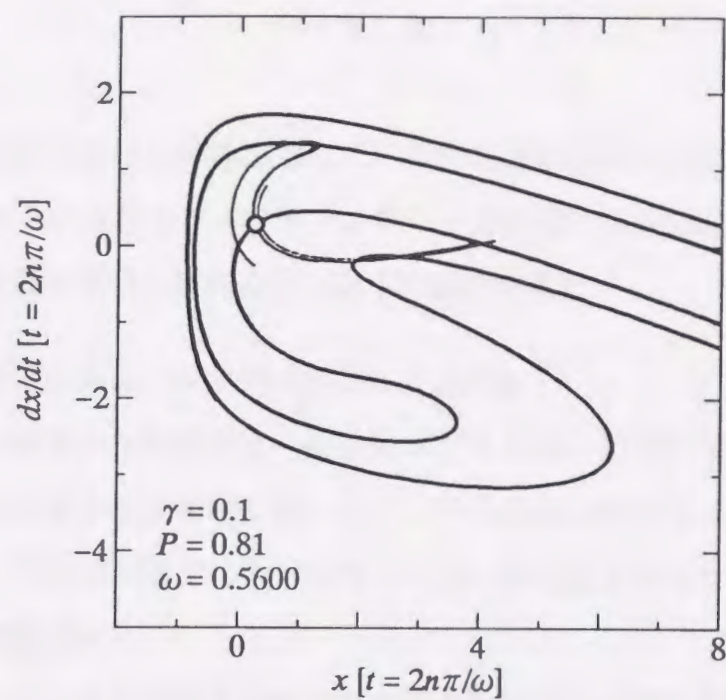


(a) $\omega = 0.5220$

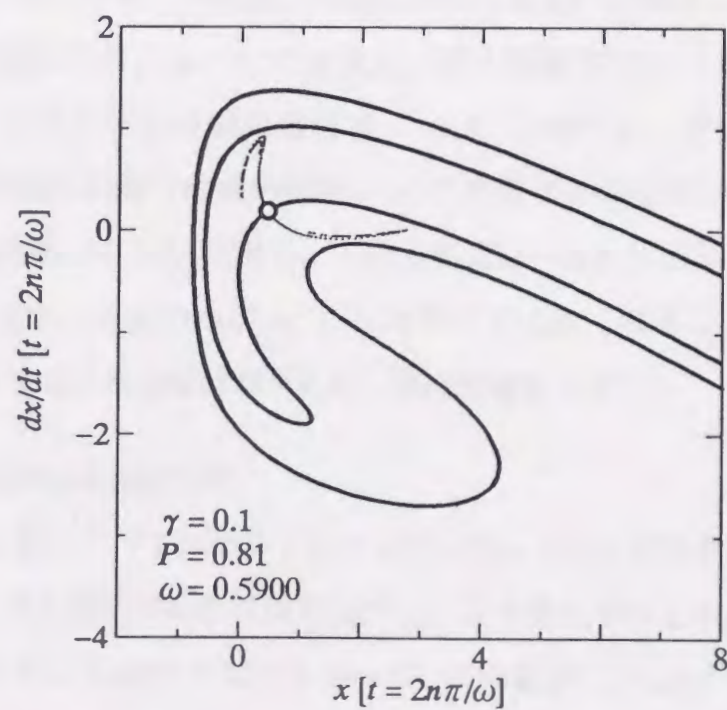


(b) $\omega = 0.5400$

図 5.19 不変多様体 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)



(c) $\omega = 0.5600$



(d) $\omega = 0.5900$

図 5.19 不変多様体 ($\gamma = 0.1, P = 0.81$)

第6章 結 論

本論文では非対称ばねの典型として二次曲線ばねおよび空気ばねの二つを取り上げ、それらのばねによって構成される一自由度力学系の非線形振動について自由振動と強制振動の解析を行い以下の結論を得た。

(1) 二次曲線ばね系および空気ばね系の自由振動

無減衰自由振動の振動波形は、振動数 ω が 1 に近い場合の準線形の振動波形から、 $\omega \rightarrow 0$ の強非線形振動において、二次曲線ばね系では定振幅超低周波パルス列まで、空気ばね系では大振幅の上に凸な放物線を並べたような衝突系に近い波形まで変化する。

両方の系において振幅特性曲線は左に傾き軟性ばねの傾向を示す。二次曲線ばね系の場合、 $\omega \rightarrow 0$ の強非線形振動で最大、最小振幅および 0 次の調和振幅はそれぞれ 1, -0.5, 1 に、1 次以上の調和振幅はお互いに漸近しながら振動数に比例する直線になり、 $\omega \rightarrow 1$ では最大、最小振幅および 1 次の調和振幅は $\sqrt{1-\omega}$ に、0 次と 2 次の調和振幅は $1-\omega$ に比例する。空気ばね系の場合、 $\omega \rightarrow 0$ の強非線形振動では最小振幅が -1 に漸近するのを除いて最大振幅とすべての調和振幅は ω^2 に反比例し、これらの比は一定になるが、これは波形の形状は変化せず大きさのみが ω^2 に反比例して大きくなることを示している。また、 $\omega \rightarrow 1$ では二次曲線ばね系と良く似た特徴を示す。

(2) 二次曲線ばね系強制振動

振幅特性曲線はすべてスケルトンカーブに沿って左に傾き軟性ばね系の傾向を示し、1/2 次分数調波振動は周期倍分岐により発生するものと島状のものが存在する。また、 $P \leq 0.2$ ではつながっていた曲線が、 $P \geq 0.3$ では閉曲線で構成されるようになるが、これはばねの復原力が $f \leq 0.25$ の制限を持つことと大きく関係していると考えられる。さらに、安定・不安定にかかわらず定常周期解が全く発生しない振動数範囲が存在することが確認された。

安定定常解領域図は $(\omega, P) = (0, 0.25)$ に向かって相似なパターンが繰り返し現れるフラクタル構造を持ち、これにより領域が複雑に分けられる。そして分岐図により、安定定常解領域図に従って発生する分岐現象や非周期振動、ウィンドウ、カオスの危機などが確認された。さらに、振動波形、ポアンカレ写像、パワースペクトル、リアプノフ指数などの解析を適用することにより非周期振動がカオス振動であることが証明されたが、不変多様体のホモクリニック点の存否はカオスと密接に関係していながらも、カオスの存否を決定するには不十分であるとの知見が得られた。

(3) 空気ばね系強制振動

振幅特性曲線より、二次曲線ばね系と同様に軟性ばね系の傾向を示すこと、 $1/2$ 次分数調波振動は調和振動から周期倍分岐して発生し、 $1/3$ 次分数調波振動は独立して島状に現れることが明らかになった。さらに $P = 1.0$ の場合、低振動数の範囲で最大変位は振動数が小さくなるに従って平均的に大きくなるが、これも二次曲線ばね系と同様に、ばねの復原力が $f < 1.0$ の制限を持つことと大きく関係していると考えられる。

安定定常解領域図はフラクタル構造の特徴を有し、特に励振の振動数が小さく励振の振幅が大きい範囲で領域が複雑に分けられることが示され、掃引方向によって分岐現象が異なるヒステリシスや非周期振動、ウィンドウ、カオスの危機などが分岐図により確認された。また、振動波形、ポアンカレ写像、パワースペクトル、リアプノフ指数などの解析により非周期振動がカオス振動であることが証明されたが、不変多様体のホモクリニック点の存否によるカオス振動の有無の判別は二次曲線ばね系と同様に困難であるとの結論に到達した。

参 考 文 献

- (1) Duffing, G., *Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung*, (1918), 25, Braunschweig.
- (2) McLachlan, N.W., *Ordinary Nonlinear Differential Equations*, (1956), 39, Oxford at the Clarendon press.
- (3) 前沢(分担執筆), (谷口・ほか37名), *振動工学ハンドブック*, (1976), 390, 養賢堂.
- (4) 田村・松田, 自律性 Duffing 方程式の厳密解とその計算法(解の表示と特性パラメータの試行計算), *日本機械学会論文集(C編)*. 52-478(1986), 1750.
- (5) 田村・松田, 自律性 Duffing 方程式の厳密解とその計算法(第2報, 解精度向上に関する検討二, 三), *日本機械学会論文集(C編)*. 53-486(1987), 261.
- (6) 田村・ほか3名, 自律性 Duffing 方程式の厳密解とその計算法(第3報, 準線形振動に対する特性パラメータのべき級数解), *日本機械学会論文集(C編)*. 53-495(1987), 2199.
- (7) Ueda, Y., Randomly Transitional Phenomena in the System Governed by Duffing's Equation, *J. Stat. Phys.*, 20 (1979), 181.
- (8) Ueda, Y., Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation : a Picture Book of Regular and Chaotic Motions, *New Approaches to Nonlinear Problems in Dynamics*, (1980), P.J. Holmes (ed.) SIAM, Philadelphia, PA.
- (9) 津田・ほか3名, Duffing系のカオス挙動, *日本機械学会論文集(C編)*, 57-541(1991), 2832.
- (10) Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., *Nonlinear Oscillations*, (1979), John Wiley & Sons.
- (11) Moon, F.C., *Chaotic Vibrations*, (1987), John Wiley & Sons.
- (12) Helmholtz, H.L.F., *Sensations of Tone*, (1895), 412, Longmans Green & Co.,

London.

- (13) Minorsky, N., Introduction to Non-Linear Mechanics, (1947), 272, J.W. Edwards, Ann Arbor.
- (14) 文献(1), 47.
- (15) 田村・李, 二次曲線ばね系における自由振動の厳密解 (その1, 解の表示とフーリエ係数の試行解), 日本機械学会論文集(C編), 55-509(1989), 13.
- (16) 田村・李, 二次曲線ばね系における自由振動の厳密解 (その2, 準線形微小振動と強非線形低周波振動), 日本機械学会論文集(C編), 55-512(1989), 823.
- (17) 田村・李, 二次曲線ばね系における自由振動の厳密解 (その3, フーリエ係数を決定する超越方程式の陽な解表示), 日本機械学会論文集(C編), 56-525(1990), 1155.
- (18) Pedersen, P.O., Subharmonics in Forced Oscillations in Dissipative Systems, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 6 (1935), 227 & Vol. 7 (1935), 64.
- (19) Reuter, G.E.H., Subharmonics in Non-linear System with Unsymmetrical Restoring Force, Quart. J. Mech. & Appl. Math., Vol. 2 (1949), 198.
- (20) 榎木・桑島, 非対称復原力を有する振動系の強制振動に関する一近似解法について, 日本機械学会論文集, 14-47(1948), 104.
- (21) 榎木・波多野, 非線形型復原力を有する振動系の非調和強制力による強制振動に関する一計算, 日本機械学会論文集, 17-57(1951), 42.
- (22) 榎木・岡田, 非対称型復原力を有する振動系の強制振動について, 日本機械学会論文集, 17-57(1951), 46.
- (23) Chauhan, A.P. and Ashwell, D.G., On the Low-Frequency Drumming of Slightly Bowed Structures, J. Sound Vib., Vol. 14, No. 4 (1971), 475.
- (24) Ashwell, D.G. and Chauhan, A.P., A study of $1/2$ -Subharmonic Oscillations by the Method of Harmonic Balance, J. Sound Vib., Vol. 27, No. 3 (1973), 313.

- (25) Nayfeh, A.H., The Response of Single Degree of Freedom Systems with Quadratic and Cubic Non-Linearities to a Subharmonic Excitation, *J. Sound Vib.*, Vol. 89, No. 4 (1983), 457.
- (26) 砂原・ほか2名, 周期外力を受けるある非線形力学系のカオス的挙動について, *日本機械学会論文集(C編)*, 50-450(1984), 323.
- (27) Mel'nicov, V.K., On the Stability of the Center for Time-Periodic Perturbations, *Trans. Moscow. Math. Soc.*, 12-1 (1963), 1.
- (28) Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, (1983), 184, Springer-Verlag.
- (29) Holmes, P., A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A292, (1979), 419.
- (30) Thompson, J.M.T., et al., Fractal basins and chaotic bifurcations prior to escape from a potential well, *Phys. Lett. A*121-3, (1987), 116.
- (31) Thompson, J.M.T., Chaotic phenomena triggering the escape from a potential well, *Proc. R. Soc. Lond. A*421, (1989), 195.
- (32) Soliman, M.S. and Thompson, J.M.T., Integrity measures quantifying the erosion of smooth and fractal basins of attraction, *J. Sound Vib.*, 135(3), (1989), 453.
- (33) Thompson, J.M.T. and Soliman, M.S., Fractal control boundaries of driven oscillators and their relevance to safe engineering design, *Proc. R. Soc. Lond.*, A428, (1990), 1.
- (34) 宮本・ほか1名, 磁気浮上車両の上下ピッチングの定常振動と過渡特性, *鉄研報告*, No. 918(1974), 249.
- (35) 岡田・ほか2名, 磁気浮上車の運動解析, *川崎技報*, 67(1978), 33.
- (36) 薮野・ほか3名, 走行路の不整による磁気浮上物体の上下・ピッチング振動, *日本機械学会論文集(C編)*, 54-506(1988), 2850.
- (37) 高橋・ほか3名, 走行路の不整による磁気浮上物体の非線形振動についての基礎的考察, *日本機械学会講演論文集(C編)*, No. 890-26(1989), 40.

- (38) 村田・他2名, 空気ばね台車, 日立評論, 39-2(1957), 74.
- (39) 小田・西村, 空気ばね懸架の振動特性とその設計, 日本機械学会論文集, 35-273(1969), 996.
- (40) 小柳, 空気ばね防振系の最適設計法, 日本機械学会論文集(C編), 49-439(1983), 410.
- (41) 小柳, 空気ばね防振特性に対する非線形性の影響, 日本機械学会論文集(C編), 52-480 (1986), 2084.
- (42) 小柳, 空気ばね車両の輪重減少に対する空気ばね装置非線形性の影響, 日本機械学会論文集(C編), 54-508 (1988), 2980.
- (43) 高上・神保, 空気圧制御による防振装置の研究, 精密機械, 50-6(1984), 915.
- (44) 村田・ほか2名, カタストロフィ理論の非線形強制振動への応用, 精密工学会誌, 52-8 (1986), 1426.
- (45) 村田・ほか2名, 非対称型非線形復原力特性を有する空気ばねの強制振動変位加振の場合, 精密工学会誌, 52-9 (1986), 1567.
- (46) Murata, A. et al., Application of Catastrophe Theory to Forced Vibration of a Diaphragm Air Spring, J. Sound Vib., Vol. 112, No. 1 (1987), 31.
- (47) 柏崎・ほか3名, 空気ばねと積層ゴムを組合わせた免振・除振床システムの開発, 日本機械学会論文集(C編), 55-512(1989), 847.
- (48) 石原, 空気ばねと車体弾性を有する鉄道車両の上下・ピッチング振動解析, 日本機械学会論文集(C編), 57-543 (1991), 3436.
- (49) Jettappa, R.R., Asymmetric Response of a Pneumatic Spring, J. ASME, Des Eng, Vol. 36 (1991), 91.
- (50) 田村・松崎, 二次曲線ばね系自由振動の厳密解とその数値化プログラム, 日本機械学会論文集(C編), 59-566(1993), 3044.
- (51) 田村・ほか2名, ダフニングハードスプリング系自由振動の厳密解とその数値化プログラム, 日本機械学会論文集(C編), 59-567(1993), 3267.

- (52) 田村・ほか2名, ダフィングソフトスプリング系自由振動の厳密解とその数値化プログラム, 日本機械学会論文集(C編), 60-579(1994), 3719.
- (53) 機械工学便覧, (1975), 2-15, 日本機械学会.
- (54) 守口・ほか2名, 数学公式Ⅱ, (1987), 34, 岩波.
- (55) 田村・松崎, 定常振動問題の解と安定判別のための数値解法とそのプログラム, 日本機械学会論文集(C編), 60-569(1994), 30.
- (56) Aprille, T.L., Jr. and Trick, T.N., Steady-State Analysis of Nonlinear Circuits with Periodic Input, Proc. IEEE, Vol. 60, No. 1 (1972), 108.
- (57) Aprille, T.L., Jr. and Trick, T.N., A Computer Algorithm to Determine the Steady-State Response of Nonlinear Oscillators, IEEE Trans. Circuit Theory, Vol. CT-19, No. 4 (1972), 354.
- (58) 牛田, 非線形定常振動の一求解法, 電子通信学会技術研究報告, NLP76-9(1976), 15.
- (59) Chua, L.O. and Ushida, A., A Switching Parameter Algorithm for Finding Multiple Solutions of Nonlinear Resistive Circuits, Circuit Theory and Applications, Vol. 4, (1976), 215.
- (60) Ojika, T., et al., A Computer Algorithm for Nonlinear Two-Point Boundary-Value Problems, Memoirs of the Osaka Kyoiku University, Ser. III, Vol. 25, No. 1 (1976), 31.
- (61) Ojika, T. and Kasue, Y., Initial-Value Adjusting Method for Two-Point Boundary-Value Problems for Nonlinear Ordinary Differential Equations, Memoirs of the Osaka Kyoiku University, Ser. III, Vol. 26, No. 1 (1977), 37.
- (62) Ojika, T., Initial-Value Adjusting Method and the Periodic Solutions for Duffing's Equation, Memoirs of the Osaka Kyoiku University, Ser. III, Vol. 26, No. 2 (1977), 111.
- (63) 文献(11), 47.
- (64) 文献(11), 57.

- (65) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., RANDOM DATA : Analysis and Measurement Procedures, (1971), John Wiley & Sons.
日本語訳, ベンダット・ピアソル著 (得丸・ほか5名訳), ランダムデータの統計的処理, (1976), 313, 培風館.
- (66) Wolf, A., et al., Physica, 16D(1985), 285.
- (67) 高安, フラクタル科学, (1987), 81, 朝倉書店.
- (68) Bennetin, G., et al., Kolmogorov Entropy and Numerical Exponents, Phys. Rev. A, Vol. 14, No. 6 (1976), 2338.
- (69) Shimada, I. and Nagashima, T., A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems, Prog. Theor. Phys., Vol. 61, No. 6 (1979), 1605.
- (70) 文献(11), 172.
- (71) 文献(28), 13.
- (72) Matsuzaki, K., et al., Nonlinear Vibration in a System Having an Asymmetrical Spring with a Single Degree of Freedom, Proceedings of the Asia-Pacific Vibration Conference '93, Vol. 3, (1993), 1615.
- (73) Matsuzaki, K. and Tamura, H., Analyses of the Vibraton on Nonlinear Sustems with an Asummetrical Spring, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyushu University, 54-4 (1994), 293.

謝 辞

本研究を行うにあたり，学部四年生のときの卒業研究から大学院修士課程，博士後期課程，そして現在に至るまでの長きにわたり懇切丁寧なご指導ご鞭撻を賜りました田村英之教授に深く感謝の意を表します。

また，本論文を作成するにあたり有益なご教示を頂きました，末岡淳男教授，深田 悟教授に感謝の意を表しますとともに，種々の面においてご協力頂いた岡部 匡助手，劉 孝宏助手，同級生の徐 志 祥助手，ならびに一緒に研究を行った卒業生の宗和伸行さん，永末良一さん，修士課程二年生の土生 勲さん，および機械力学研究グループのすべての方々に深くお礼申し上げます。

付録A 二次曲線ばね系自由振動厳密解の数値化プログラム

| |
|--|
| 二次曲線ばね1自由度振動系の自由振動の厳密解 |
| CALL QUADR(A0,A1,D0,D1,OMG,OM1,HA,AS,NN,ER,ISW,ICON) |

(1) 機能

運動方程式 $d^2X/dT^2 + X + X^2 = 0$ の厳密解のフーリエ展開;

$$X(T) = H_0 + H_1 \cos \Omega T + H_2 \cos 2\Omega T + H_3 \cos 3\Omega T + \dots \quad (\text{A.1})$$

におけるフーリエ係数: $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots$; 最大値 $A = \max_{(T)} X(T)$, 最小値 $(-D) = \min_{(T)} X(T)$ なる A, D ; (それらのコンプリメンタリ) $1/2 - A, 1 - D$; 円振動数 Ω , (そのコンプリメンタリ) $1 - \Omega$ などを数値計算する. 与える条件はこれら $A, D, 1/2 - A, 1 - D, \Omega, 1 - \Omega$ のいずれか1個とする. 指定された相対誤差を保証するに必要な H_n の次数上限 $N(\geq n)$ の近似値を推算する.

(2) パラメータ

- A0 ... 入力/出力. $A = \max_{(T)} X(T)$. ただし $10^{-70} < A0 \leq 0.366$. ISW=10 の場合は入力, それ以外は出力.
- A1 ... 入力/出力. $1/2 - A$. ただし $10^{-70} < A1 \leq 0.134$. ISW=11 の場合は入力, それ以外は出力.
- D0 ... 入力/出力. $D = -\min_{(T)} X(T)$. ただし $10^{-70} < D0 \leq 0.5$. ISW=20 の場合は入力, それ以外は出力.
- D1 ... 入力/出力. $1 - D$. ただし $10^{-70} < D1 \leq 0.5$. ISW=21 の場合は入力, それ以外は出力.
- OMG ... 入力/出力. 円振動数 Ω . ただし $10^{-70} < OMG \leq 0.91$. ISW=30 の場合は入力, それ以外は出力.
- OM1 ... 入力/出力. $1 - \Omega$. ただし $10^{-70} < OM1 \leq 0.09$. ISW=31 の場合は入力, それ以外は出力.
- HA ... 出力. フーリエ係数 $H_n (n=0, 1, 2, \dots)$. 大きさ (0:NN) の1次元配列.
- AS ... 出力. だ円関数: $\text{cn}[K(m)\Omega T/\pi] \times [\sqrt{m}K(m)/\pi]$ のフーリエ係数 $a_n (n$: 奇数) および作業領域. 大きさ (0:NN) の1次元配列.
- AS(0) ... 入力. 所要の NN を推算するための $X(T)$ の相対誤差.
- AS(2) ... 出力. AS(0) を満足する NN の推定値 [(3) b.① 参照]. 大きさ (0:NN) の1次元配列.
- NN ... 入力. フーリエ係数の最高次数 (HA, AS 参照). $NN \geq 2$.
- ER ... 出力. 解 $X(T)$ の相対誤差の推定値.
- ISW ... 入力. 計算条件の指示. 上述 A0~OM1 参照 [() 内は指定された入力] : 10(A0), 11(A1), 20(D0), 21(D1), 30(OMG), 31(OM1) のいずれか.
- ICON ... 出力. コンディションコード. 0 は正常終了. 90000 は ISW が上記以外の指定であった, または ISW の値と対応する入力パラメータの値の範囲が対応していないことを意味し計算を打ち切る.

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム名

- ① FORTRAN 基本関数… QSQRT, QABS, QLOG, QEXP, QCOSH, QTAN, QATAN, IABS, MAX, MIN, ABS, SIGN
- ② 本プログラム中… SOLMQ, APRXH, SUBR1, OMGAJ, SUBR2, PRSET, OM1Q0, SUBR3, APROH, AMPLH, AMPLJ, AMPLT, ERROR, KANDM, REGUL

b. 注意

- ① $[AS(0)+10^{-35}]$ により指定される解 $X(T)$ の相対誤差 (要求値) を保証する NN の推奨値が AS(2) に出力される. $AS(0)=0$ とおくと 10^{-35} (~ 1 語の丸め) を採用したことになる.
- ② パラメータは一般に 0 または正の値であるが, 例外的に出力 A1, D1 が負値をとることがある. その場合 A1, D1 はそれぞれ $\log_{10}(1/2 - A)$, $\log_{10}(1 - D)$ を表している.
- ③ AS に出力される cn のフーリエ係数 (定義に注意) は, 計算機 1 語の丸め問題を除いて厳密であるが, HA のほうは AS の項数 NN が有限であるための打ち切り近似値であり, その誤差累積の近似値が ER である.

c. 使用例 (主プログラムの例)

6 種類のパラメータ A0, D0, OM1, A1, D1, OMG に対して, 入力値と表 A.1 に示した計算過程を経て得られた同じパラメータの出力値を比較し, サブルーチンの計算精度の自己点検を行うプログラム. なお, 表 A.1 における矢印 (\Rightarrow) は矢印の左側のパラメータを入力として, 右側のパラメータの計算結果を得ることを示している.

計算作業は, 計算機システムとの対話形式で進行し, 表 A.1 のどの計算過程を実行するのかは, コード番号のキー入力で選択指示する. 計算過程で関連するすべてのパラメータの入力が制限範囲に収まるよう, テストパラメータの可変範囲を設定し, それを等差サンプリングおよび等比サンプリングにより, 各 200 点をスキャンして, 各テストパラメータの初期入力と最終出力の相対誤差をプリントアウトする.

表 A.1 計算過程

| テストパラメータ | 計 算 過 程 |
|----------|---|
| A0 | $A0 \Rightarrow OM1 \Rightarrow D0 \Rightarrow A0 \Rightarrow D0 \Rightarrow OM1 \Rightarrow A0$ |
| D0 | $D0 \Rightarrow A0 \Rightarrow OM1 \Rightarrow D0 \Rightarrow OM1 \Rightarrow A0 \Rightarrow D0$ |
| OM1 | $OM1 \Rightarrow D0 \Rightarrow A0 \Rightarrow OM1 \Rightarrow A0 \Rightarrow D0 \Rightarrow OM1$ |
| A1 | $A1 \Rightarrow OMG \Rightarrow D1 \Rightarrow A1 \Rightarrow D1 \Rightarrow OMG \Rightarrow A1$ |
| D1 | $D1 \Rightarrow A1 \Rightarrow OMG \Rightarrow D1 \Rightarrow OMG \Rightarrow A1 \Rightarrow D1$ |
| OMG | $OMG \Rightarrow D1 \Rightarrow A1 \Rightarrow OMG \Rightarrow A1 \Rightarrow D1 \Rightarrow OMG$ |

また、その 200 点分の相対誤差に対して絶対値の最大と rms 値を求めてプリントアウトする。図 A.1 にその際のディスプレイ表示の例を示し解説を加えた。また図 A.2 ~ A.7 に誤差の測定結果を図示した。これから、このプログラムの計算誤差（累積丸め誤差）は、およそ相対誤差の絶対値で 10^{-30} 程度以下と判定される。

```

00010 *-----941226
00020     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00030     PARAMETER (NN=10 )
00040     DIMENSION AN(NN),AS(NN)
00050     DATA ISW/ 0/
00060     DATA KPOINT/0200/
00070     DATA KPOIN1/0201/
00080     DATA ER /0Q0/
00090     DATA ICO1,ICO2,ICO3,ICO4,ICO5,ICO6/0,0,0,0,0,0/
00100     OPEN (10,FILE='A701135.NOTEBK10.DATA')
00110 1 CONTINUE
00120     WRITE(*,*) '
00130     WRITE(*,*) '-----'
00140     WRITE(*,*) 'KEY-ISW= ?????????? ...NOW...ISW=',ISW
00150     WRITE(*,*) '-----'
00160     WRITE(*,*) 'INSTRUCTION.... ISW=10; IN / OUT= A0'
00170     WRITE(*,*) '                      ISW=20; IN / OUT= D0'
00180     WRITE(*,*) '                      ISW=31; IN / OUT=OM1'
00190     WRITE(*,*) '
00200     WRITE(*,*) '                      ISW=11; IN / OUT= A1'
00210     WRITE(*,*) '                      ISW=21; IN / OUT= D1'
00220     WRITE(*,*) '                      ISW=30; IN / OUT=OMG'
00230     WRITE(*,*) '
00240     WRITE(*,*) '                      ISW= 0; ---STOP--- '
00250     READ( *,*) ISW
00260     IF(ISW.EQ.0) STOP
00270     IS1=ISW
00280     IF(ISW.EQ.10) CALL SETUP(IS2,20,IS3,31,STA, 1Q-34,END,0.366Q0)
00290     IF(ISW.EQ.20) CALL SETUP(IS2,31,IS3,10,STA, 1Q-34,END,0.500Q0)
00300     IF(ISW.EQ.31) CALL SETUP(IS2,10,IS3,20,STA, 1Q-70,END,0.090Q0)
00310     IF(ISW.EQ.11) CALL SETUP(IS2,21,IS3,30,STA, 1Q-70,END,0.134Q0)
00320     IF(ISW.EQ.21) CALL SETUP(IS2,30,IS3,11,STA, 1Q-34,END,0.500Q0)
00330     IF(ISW.EQ.30) CALL SETUP(IS2,11,IS3,21,STA,374Q-04,END,0.910Q0)
00340     ID=0
00350     V =STA
00360     DV=(END/STA)**(1Q0/KPOIN1)
00370 3 CONTINUE
00380     ID=ID+1
00390     WRITE( *, *) '
00400     WRITE(10, *) '
00410     IF(ID.EQ.1) THEN
00420     WRITE( *, *) '-----UNIFORM RATIO OF ARG.-----'
00430     WRITE(10, *) '-----UNIFORM RATIO OF ARG.-----'
00440     END IF
00450     IF(ID.EQ.2) THEN
00460     WRITE( *, *) '-----UNIFORM DIFF. OF ARG.-----'
00470     WRITE(10, *) '-----UNIFORM DIFF. OF ARG.-----'
00480     END IF

```



```

00490      IF(ISW.EQ.10) WRITE(*,*) '      A0->OM1->D0->A0->D0->OM1->A0 '
00500      IF(ISW.EQ.10) WRITE(10,*) '      A0->OM1->D0->A0->D0->OM1->A0 '
00510      IF(ISW.EQ.20) WRITE(*,*) '      D0->A0->OM1->D0->OM1->A0->D0 '
00520      IF(ISW.EQ.20) WRITE(10,*) '      D0->A0->OM1->D0->OM1->A0->D0 '
00530      IF(ISW.EQ.31) WRITE(*,*) '      OM1->D0->A0->OM1->A0->D0->OM1 '
00540      IF(ISW.EQ.31) WRITE(10,*) '      OM1->D0->A0->OM1->A0->D0->OM1 '
00550      IF(ISW.EQ.11) WRITE(*,*) '      A1->OMG->D1->A1->D1->OMG->A1 '
00560      IF(ISW.EQ.11) WRITE(10,*) '      A1->OMG->D1->A1->D1->OMG->A1 '
00570      IF(ISW.EQ.21) WRITE(*,*) '      D1->A1->OMG->D1->OMG->A1->D1 '
00580      IF(ISW.EQ.21) WRITE(10,*) '      D1->A1->OMG->D1->OMG->A1->D1 '
00590      IF(ISW.EQ.30) WRITE(*,*) '      OMG->D1->A1->OMG->A1->D1->OMG '
00600      IF(ISW.EQ.30) WRITE(10,*) '      OMG->D1->A1->OMG->A1->D1->OMG '
00610      WRITE(*,*) ' PT. ARG. REL.ERR. ICON 1 ... 6'
00620      WRITE(*,*) '-----'
00630      WRITE(10,*) '-----'
00640      WRITE(10,*) ' PT. ARG. REL.ERR. ICON 1 ... 6'
00650      WRITE(10,*) '-----'
00660      RMS=0
00670      BIG=0
00680      DO 30 I=1,KPOINT
00690          IF(ID.EQ.1) V=V*DV
00700          IF(ID.EQ.2) V=V+DV
00710      IF(ISW.EQ.10) AO =V
00720      IF(ISW.EQ.11) A1 =V
00730      IF(ISW.EQ.20) DO =V
00740      IF(ISW.EQ.21) D1 =V
00750      IF(ISW.EQ.30) OMG=V
00760      IF(ISW.EQ.31) OM1=V
00770      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS1,ICO1)
00780      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS3,ICO2)
00790      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS2,ICO3)
00800      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS1,ICO4)
00810      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS2,ICO5)
00820      CALL QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,AN,AS,NN,ER,IS3,ICO6)
00830      IF(ISW.EQ.10) OUT=AO
00840      IF(ISW.EQ.11) OUT=A1
00850      IF(ISW.EQ.20) OUT=DO
00860      IF(ISW.EQ.21) OUT=D1
00870      IF(ISW.EQ.30) OUT=OMG
00880      IF(ISW.EQ.31) OUT=OM1
00890      ERR=OUT/V-1
00900      ABSERR=ABS(ERR)
00910      IF(ABSERR.GT.BIG) BIG=ABSERR
00920      RMS=RMS+ERR**2
00930      WRITE(*,100) I,V, ERR,ICO1,ICO2,ICO3,ICO4,ICO5,ICO6
00940      WRITE(10,100) I,V, ERR,ICO1,ICO2,ICO3,ICO4,ICO5,ICO6
00950 30 CONTINUE
00960      DO 50 I=1,10
00970          WRITE(10,*) ' '
00980 50 CONTINUE
00990          WRITE(*,*) ' '
01000      RMSRER=SQRT(RMS/KPOINT)
01010      WRITE(*,200) 'ABS/MAX=',BIG
01020      WRITE(*,200) 'RMS/RER=',RMSRER
01030      WRITE(10,200) 'ABS/MAX=',BIG

```



```
01040      WRITE(10,200) 'RMS/RER=',RMSRER
01050          DO 51 I=1,6
01060              WRITE(10,*) ' '
01070      51      CONTINUE
01080          IF(ID.EQ.2) GO TO 1
01090          V=STA
01100          DV=(END-STA)/KPOIN1
01110          GO TO 3
01120      100  FORMAT(1H ,I4,2G12.4,6I6)
01130      200  FORMAT(1H , 8X,A8,2G12.4,6I6)
01140          END
01150  *-----
01160      SUBROUTINE SETUP(IA,KA,IB,KB,A0,A1,B0,B1)
01170      IMPLICIT REAL*16(A,B)
01180      IA=KA
01190      IB=KB
01200      A0=A1*1.0000000000 0000000000 0000000001 Q0
01210      B0=B1*0.9999999999 9999999999 9999999999 Q0
01220      RETURN
01230      END
```



```

-----
KEY-ISW= ???????? ...NOW...ISW=0
-----
INSTRUCTION... ISW=10; IN / OUT= A0
                ISW=20; IN / OUT= D0
                ISW=31; IN / OUT=OMI
                ISW=11; IN / OUT= A1
                ISW=21; IN / OUT= D1
                ISW=30; IN / OUT=OMG
                ISW= 0; ---STOP---
00230 ?
10

```

ISW の説明

テストパラメータ選択
キーインのプロンプト

← ISW=10 をキーイン

```

-----UNIFORM RATIO OF ARG.-----
A0->OMI->D0->A0->D0->OMI->A0
PT. ARG. REL.ERR. ICON 1 ... 6
-----
1 0.1469E-33 -0.5970E-32 0 0 0 0 0 0
2 0.2158E-33 -0.6741E-32 0 0 0 0 0 0
3 0.3169E-33 -0.9630E-33 0 0 0 0 0 0
4 0.4655E-33 -0.2311E-32 0 0 0 0 0 0
5 0.6838E-33 0.0000E+00 0 0 0 0 0 0

```

← テストパラメータの値と
その入/出力の相対誤差

← 中間省略

```

196 0.5353E-01 -0.3852E-32 0 0 0 0 0 0
197 0.7862E-01 -0.1044E-30 0 0 0 0 0 0
198 0.1155 0.2773E-31 0 0 0 0 0 0
199 0.1696 0.5855E-31 0 0 0 0 0 0
200 0.2492 0.0000E+00 0 0 0 0 0 0

```

ABS/MAX= 0.3449E-29
RMS/RER= 0.3911E-30

← 相対誤差テスト 200点分絶対値の最大値
← 相対誤差テスト 200点分 rms 値
(等比スキャン対応)

```

-----UNIFORM DIFF. OF ARG.-----
A0->OMI->D0->A0->D0->OMI->A0
PT. ARG. REL.ERR. ICON 1 ... 6
-----
1 0.1821E-02 -0.2340E-30 0 0 0 0 0 0
2 0.3642E-02 0.2117E-29 0 0 0 0 0 0
3 0.5463E-02 -0.2407E-31 0 0 0 0 0 0
4 0.7284E-02 -0.6028E-31 0 0 0 0 0 0
5 0.9104E-02 -0.5354E-31 0 0 0 0 0 0

```

← 中間省略

```

196 0.3569 0.1541E-31 0 0 0 0 0 0
197 0.3587 0.2157E-31 0 0 0 0 0 0
198 0.3605 0.2157E-31 0 0 0 0 0 0
199 0.3624 -0.1887E-31 0 0 0 0 0 0
200 0.3642 0.2773E-31 0 0 0 0 0 0

```

ABS/MAX= 0.3285E-29
RMS/RER= 0.4081E-30

← 相対誤差テスト 200点分絶対値の最大値
← 相対誤差テスト 200点分 rms 値
(等差スキャン対応)

```

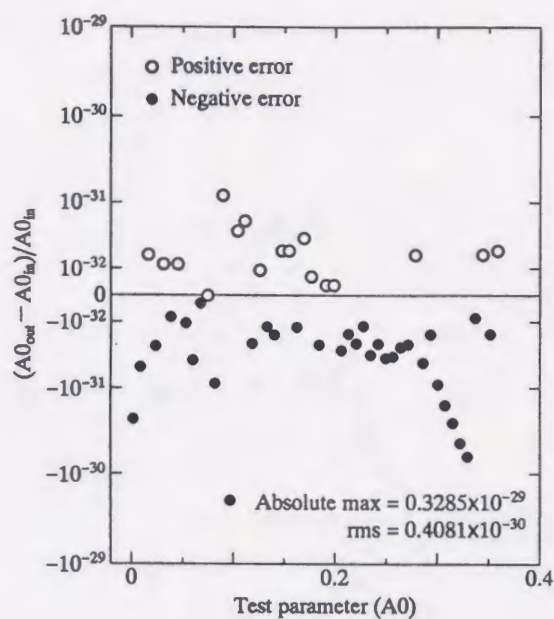
-----
KEY-ISW= ???????? ...NOW...ISW=10
-----
INSTRUCTION... ISW=10; IN / OUT= A0
                ISW=20; IN / OUT= D0
                ISW=31; IN / OUT=OMI
                ISW=11; IN / OUT= A1
                ISW=21; IN / OUT= D1
                ISW=30; IN / OUT=OMG
                ISW= 0; ---STOP---
00230 ?
0

```

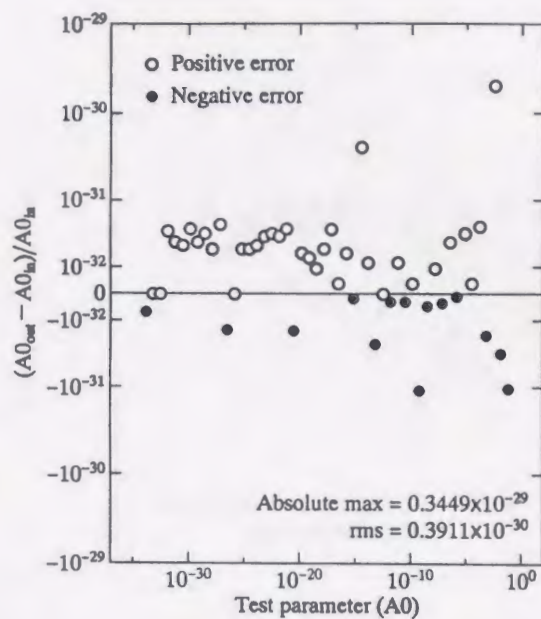
テストパラメータ選択
キーインのプロンプト

← ISW=0 (計算終了) をキーイン

図 A.1 対話形式計算作業におけるディスプレイの表示の例とその意味の説明

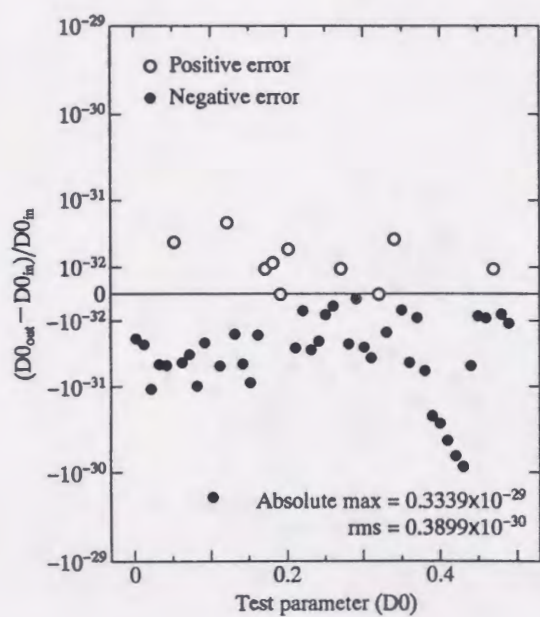


(a) 等差スキャン

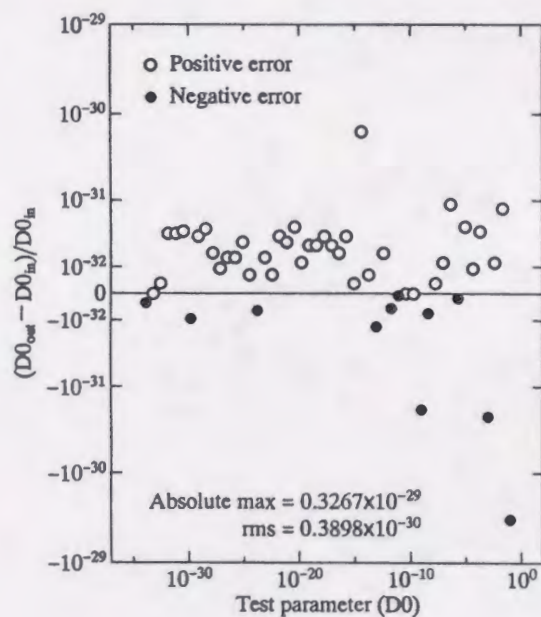


(b) 等比スキャン

図 A.2 テストパラメータ = A0 における計算誤差

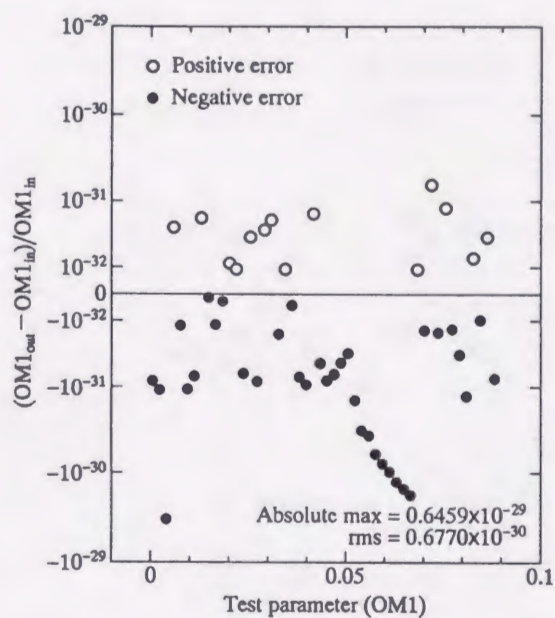


(a) 等差スキャン

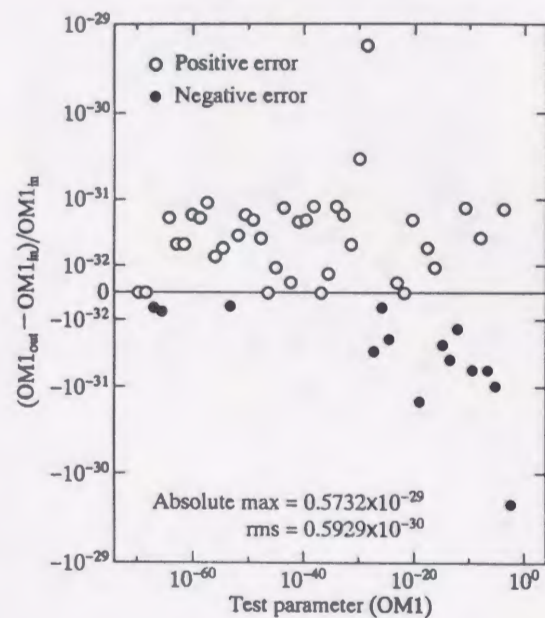


(b) 等比スキャン

図 A.3 テストパラメータ = D0 における計算誤差

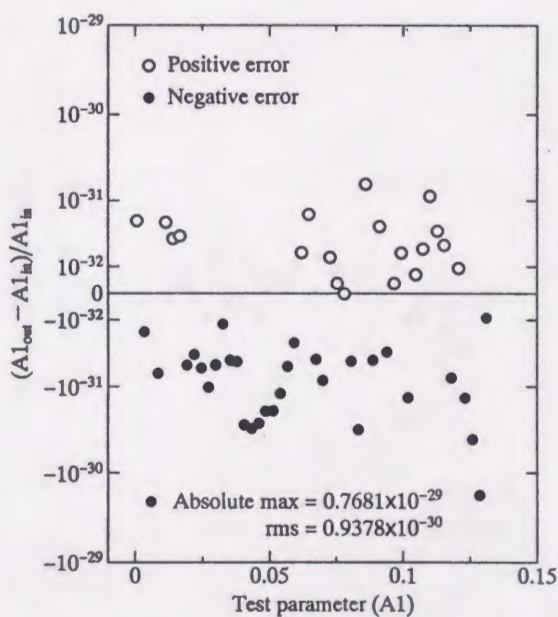


(a) 等差スキャン

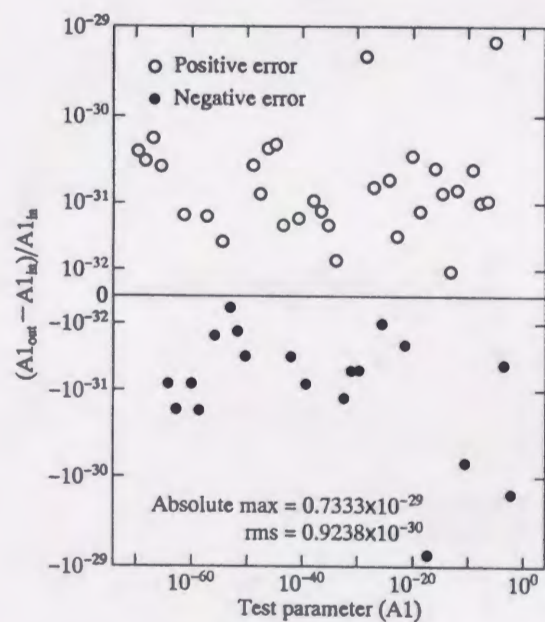


(b) 等比スキャン

図 A.4 テストパラメータ = OM1 における計算誤差

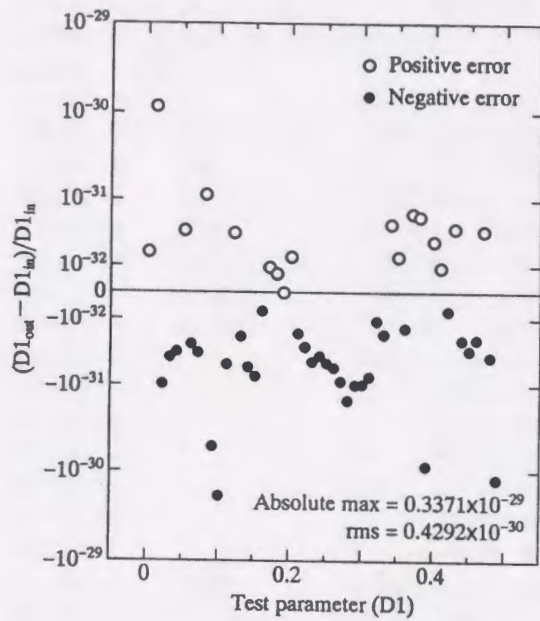


(a) 等差スキャン

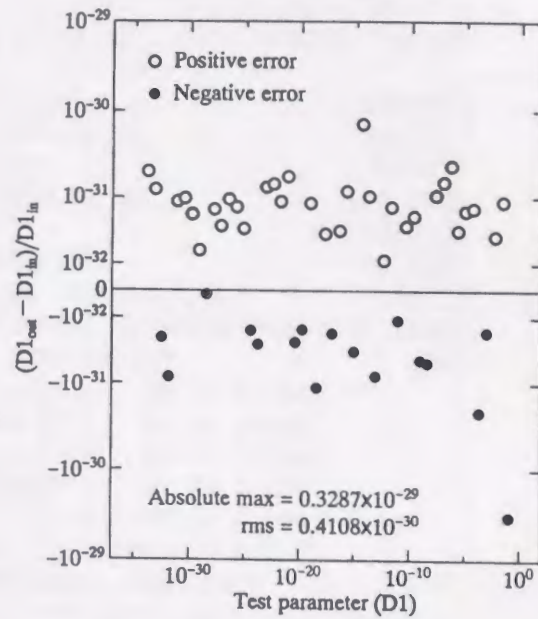


(b) 等比スキャン

図 A.5 テストパラメータ = A1 における計算誤差

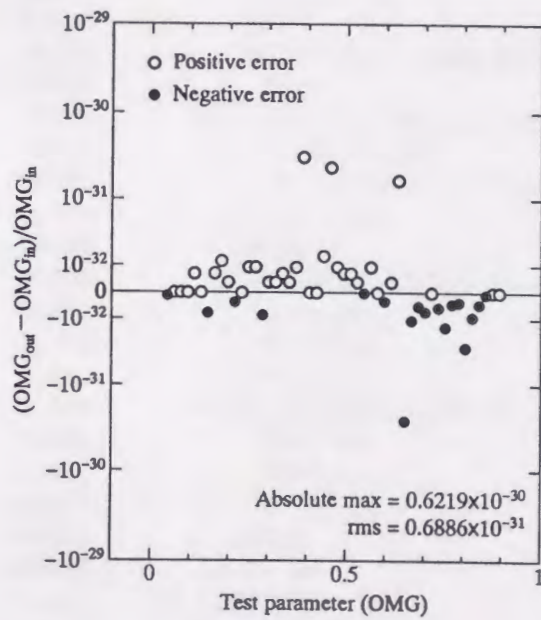


(a) 等差スキャン

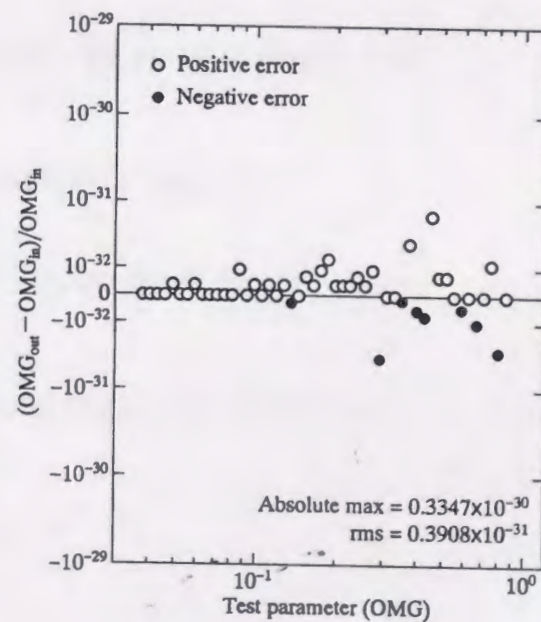


(b) 等比スキャン

図 A.6 テストパラメータ = D1 における計算誤差



(a) 等差スキャン



(b) 等比スキャン

図 A.7 テストパラメータ = OMG における計算誤差


```

00010 *-----TOP OF FILE=QUADR-----941226
00020 *EXACT SOLUTIONS OF THE FREE OSCILLATION IN A NONLINEAR OSCILLATOR
00030 * WITH SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM AND A QUADRATIC SPRING FUNCTION
00040 *-----PARAMETER LIST-----
00050 *   AO           : MAX. OF DISPLACEMENT           (IN/OUT)
00060 *   A1=1/2-AO   : COMPLEMENTARY VALUES OF AO     (IN/OUT)
00070 *   -DO          : MIN. OF DISPLACEMENT           (IN/OUT)
00080 *   D1=1-DO      : COMPLEMENTARY VALUES OF DO     (IN/OUT)
00090 *   OMG          : NATURAL FREQUENCY               (IN/OUT)
00100 *   OM1=1-OMG    : COMPLEMENTARY FREQUENCY         (IN/OUT)
00110 *   HA(NN)       : HARMONIC AMPLITUDES (NN=0,1,2,3,...) (OUT)
00120 *   AS(NN)       : FOURIER COEFF. OF CN(*) ; ELLIPTIC FUNCTION (OUT)
00130 *   ISW         : DIRECTION OF THE COMPUTATION     (IN)
00140 *           10 : INPUT AO (1Q-70 < AO <= 0.366)
00150 *           11 : INPUT A1 (1Q-70 < A1 <= 0.134)
00160 *           20 : INPUT DO (1Q-70 < DO <= 0.500)
00170 *           21 : INPUT D1 (1Q-70 < D1 <= 0.500)
00180 *           30 : INPUT OMG (1Q-70 < OMG <= 0.910)
00190 *           31 : INPUT OM1 (1Q-70 < OM1 <= 0.090)
00200 *   ICON        : CONDITION CODE (0=NORMAL TERMINATE ) (OUT)
00210 *-----
00220 SUBROUTINE QUADR(AO,A1,DO,D1,OMG,OM1,HA,AS,NN,ER,ISW,ICON)
00230 IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00240 DIMENSION HA(0:NN),AS(0:NN)
00250 ICON=0
00260 IND=0
00270 IF(ISW.EQ.10.AND.AO.GT.1Q-70.AND.AO.LE.0.366Q0) THEN
00280 SS=(1+AO)*AO/0.75Q0
00290 CALL SOLMQ(IND,2*SS/(1+SS+QSQRT((1-SS)*(1+3*SS))),Z)
00300 GO TO 50
00310 ENDIF
00320 IF(ISW.EQ.11.AND.A1.GT.1Q-70.AND.A1.LE.0.134Q0) THEN
00330 IND=1
00340 SS=(2-A1)*A1/0.75Q0
00350 CC=QSQRT(SS)
00360 CALL SOLMQ(IND,2*CC/(CC+QSQRT(4-3*SS)),Z)
00370 GO TO 50
00380 ENDIF
00390 IF(ISW.EQ.20.AND.DO.GT.1Q-70.AND.DO.LE.0.50Q0) THEN
00400 D1=1-DO
00410 GO TO 22
00420 ENDIF
00430 IF(ISW.EQ.21.AND.D1.GT.1Q-70.AND.D1.LE.0.50Q0) THEN
00440 DO=1-D1
00450 IND=1
00460 GO TO 22
00470 ENDIF
00480 GO TO 33
00490 22 CONTINUE
00500 SS=DO*D1/0.75Q0
00510 CC=1+SS
00520 CALL SOLMQ(IND,2*SS/(CC+QABS(DO-D1)*QSQRT(CC)),Z)
00530 GO TO 50
00540 33 CONTINUE
00550 IF(ISW.EQ.30.AND.OMG.GT.1Q-70.AND.OMG.LE.0.910Q0) THEN

```



```

00560      IND=1
00570      CALL OMGAJ(OMG,Z)
00580      GO TO 50
00590      ENDIF
00600      IF(ISW.EQ.31.AND.OM1.GT.1Q-70.AND.OM1.LE.0.090Q0) THEN
00610          CALL OM1Q0(OM1)
00620          GO TO 50
00630      ENDIF
00640      ICON=90000
00650      RETURN
00660 50 CONTINUE
00670      CALL PRSET(H2,EM,OM1,FI,RO,1)
00680      AS(2)=ABS(AS(0))+1Q-35
00690      OMG=1-OM1
00700      IF(IND.EQ.0) THEN
00710          CALL AMPLH(EM,H2,AS,NN,RO,AO,DO,A1,D1,OM1,FI)
00720      ENDIF
00730      IF(IND.EQ.1) THEN
00740          CALL AMPLJ(EM, Z,AS,NN,RO,A1,D1,AO,DO,OMG,OM1)
00750      ENDIF
00760      CALL AMPLT(IND,HA,AS,NN,H2,Z,OMG,DO,EM,ER)
00770      RETURN
00780      END
00790 *-----
00800      SUBROUTINE SOLMQ(IND,EM,Z)
00810      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00820      EXTERNAL SUBR1
00830      CALL APRXH(EM,H2)
00840      CALL PUTE(EM)
00850      CALL REGUL(H2,H2*1.01+1Q-30,SUBR1,EF,KOUNT)
00860      IF(IND.EQ.1) THEN
00870          Z=-4.93480220054467930941724549993807Q0/QLQG(H2)
00880      ENDIF
00890      RETURN
00900      END
00910 *-----
00920      SUBROUTINE APRXH(EM,HH)
00930      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
00940      HH=0
00950      DO 10 I=10,1,-1
00960          HH=(HH+1Q0/I)*EM
00970 10 CONTINUE
00980      HH=HH/16
00990      RETURN
01000      END
01010 *-----
01020      SUBROUTINE SUBR1(H2,F)
01030      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01040      CALL QANDM(H2,EM,QK,P,SP,FI,O)
01050      F=(EM+1Q-70)/QM-1
01060      RETURN
01070      ENTRY PUTE(PUT)
01080      QM=PUT+1Q-70
01090      RETURN
01100      END

```



```
01110 *-----
01120     SUBROUTINE OMGAJ(OMG,Z)
01130     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01140     DATA PAI/3.14159265358979323846264338327950Q0/
01150     EXTERNAL SUBR2
01160     QM=QEXP(-PAI/OMG)
01170     CALL PRSET(QM,EM,DT,FI,R,O)
01180     IF(1-DT.EQ.1Q0) GO TO 1
01190     CALL PUTQM(QM)
01200     CALL REGUL(DT,DT*1.01+1Q-30,SUBR2,EF,KOUNT)
01210     1 CONTINUE
01220     Z=PAI*OMG/2/(1-DT)
01230     RETURN
01240     END
01250 *-----
01260     SUBROUTINE SUBR2(DLT,F)
01270     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01280     DATA EPS/1Q-70/
01290     CALL PRSET(QM/QM**DLT,EM,DLO,FI,R,O)
01300     F=(EPS+DLO)/(EPS+DLT)-1
01310     RETURN
01320     ENTRY PUTQM(PUT)
01330     QM=PUT
01340     RETURN
01350     END
01360 *-----
01370     SUBROUTINE PRSET(H2,EM,UH,FI,RO,K)
01380     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01390     CALL QANDM(H2,EM,QK,P,SP,FI,K)
01400     R2=1-(1-EM)*EM
01410     RO=QSQRT(R2)
01420     QKR=QK*QSQRT(RO)
01430     UH=16/(QKR*(1+QKR*(1+QKR*(1+QKR))))
01440     UH=UH*((1-EM)*(FI+SP)+(2*R2*(3+8*(1+P)*P)*P+EM*EM)*P)
01450     RETURN
01460     END
01470 *-----
01480     SUBROUTINE OM1Q0(OM1)
01490     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01500     EXTERNAL SUBR3
01510     CALL APROH(OM1,H2)
01520     CALL PUTOM(OM1)
01530     CALL REGUL(H2,H2*1.01+1Q-30,SUBR3,EF,KOUNT)
01540     RETURN
01550     END
01560 *-----
01570     SUBROUTINE SUBR3(H2,F)
01580     IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01590     CALL PRSET(H2,EM,UOM,FI,R,O)
01600     IF(H2.EQ.OQ0) THEN
01610         F=0
01620         RETURN
01630     ENDIF
01640     F=(UOM+1Q-70)/OM1-1
01650     RETURN
```



```

01660      ENTRY PUTOM(PUT)
01670      OM1=PUT+1Q-70
01680      RETURN
01690      END
01700 *-----
01710      SUBROUTINE APROH(OM1,H2)
01720      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01730      DIMENSION F(5)
01740      DATA F/1Q0,141Q0,15434Q0,1.421342Q6,1.13676594Q8/
01750      UH=OM1/60
01760      H2=0
01770      DO 10 I=5,1,-1
01780          H2=(H2+F(I))*UH
01790 10      CONTINUE
01800      H2=QSQRT(H2)
01810      RETURN
01820      END
01830 *-----
01840      SUBROUTINE AMPLH(EM,H2,AS,NN,RO,AO,DO,A1,D1,OM1,FI)
01850      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
01860      DIMENSION AS(0:NN)
01870      EMR=EM+RO
01880      YO=1+EMR
01890      YI=EM*EMR/2/(1+RO)
01900      AO=1.5Q0*EM/YO/RO
01910      DO=AO*EMR
01920      A1=0.5Q0-AO
01930      D1=1-DO
01940      H =QSQRT(H2)
01950      DO 10 N=1,NN,2
01960          HN=H**N
01970          AS(N)=2*HN/(1+HN*HN)
01980 10      CONTINUE
01990      EO=24*(FI+H2*(YI-OM1*(2-OM1)*(1+YI)-EM*(2+H2)/16))
02000      EM=EO/(1+H2)**2/YO-1.5Q0*EM*EM/YO/RO
02010      AS(2)=2*QLOG(AS(2))/QLOG(H2+1Q-70)+1
02020      RETURN
02030      END
02040 *-----
02050      SUBROUTINE AMPLJ(EM, Z,AS,NN,RO,A1,D1,AO,DO,OMG,OM1)
02060      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02070      DIMENSION AS(0:NN)
02080      DATA RG1096/1.982271233039568413363722376877577Q0/
02090      DATA RG1012/1.079181246047624827722505692704100Q0/
02100      DATA P2BL10/4.286314729961157049467190900226729Q0/
02110      DATA P2B2L1/2.143157364980578524733595450113363Q0/
02120      EMR=EM+RO
02130      A1=EM**2*0.75Q0/(1-EM/2+RO)/RO
02140      D1=EM*EMR*1.5Q0/(1+EMR) /RO
02150      AO=0.5Q0-A1
02160      DO=1-D1
02170      IF(Z.LE.OQ0) GO TO 1
02180      IF(A1.LE.OQ0) A1=RG1096-P2BL10/Z
02190      IF(D1.LE.OQ0) D1=RG1012-P2B2L1/Z
02200 1      CONTINUE

```



```

02210      OMG=OMG*Z*0.636619772367581343075535053490058Q0
02220      OM1=1-OMG
02230      DO 10 N=1,NN,2
02240          AS(N)=1/QCOSH(MIN(N*Z,160Q0))
02250 10      CONTINUE
02260      AS(2)=-QLOG(QTAN(AS(2)*QATAN(QEXP(-Z))))/Z
02270      RETURN
02280      END
02290 *-----
02300      SUBROUTINE AMPLT(IND,AN,AS,NN,H2,Z,OMG,DO,EM,ER)
02310      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02320      DIMENSION AN(0:NN),AS(0:NN)
02330      DO 10 N=0,NN,2
02340          K1=1
02350          IF(IND.EQ.0.AND.N.EQ.0) K1=3
02360          AN(N)=0
02370          DO 20 K=K1,NN-N,2
02380              AN(N)=AN(N)+AS(IABS(K-N))*AS(K+N)
02390 20      CONTINUE
02400 10      CONTINUE
02410      DO 11 N=1,NN,2
02420          AN(N)=AS(N)**2/2
02430          DO 21 K=2,NN-N,2
02440              AN(N)=AN(N)+AS(IABS(K-N))*AS(K+N)
02450 21      CONTINUE
02460 11      CONTINUE
02470      CALL ERROR(IND,H2,Z,NN*1Q0,ER)
02480      OM3=3*OMG**2
02490      IF(IND.EQ.0) AN(0)=OM3*AN(0)+EM
02500      IF(IND.EQ.1) AN(0)=OM3*AN(0)-DO
02510      OM6=OM3*2
02520      DO 40 N=1,NN
02530          AN(N)=AN(N)*OM6
02540 40      CONTINUE
02550      IF(AS(2).LT.30000) AS(2)=MAX(2,INT(AS(2)))*1.00001
02560      RETURN
02570      END
02580 *-----
02590      SUBROUTINE ERROR(IND,H2,ZO,EN,ER)
02600      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02610      EO=QSQRT(H2)+1Q-70
02620      IF(IND.EQ.1) EO=QEXP(-ZO)
02630      IF(IND.EQ.0) ZO=-QLOG(EO)
02640      EL=EO*QEXP(-MIN(160,(EN+1)*ZO))
02650      DP1=EL/(1+EL*EL)
02660      PP1=EO/(1+EO*EO)
02670      DP2=QATAN(EL)
02680      PP2=QATAN(EO)
02690      ER=(DP1*ZO+DP2)/(PP1*ZO+PP2)
02700      RETURN
02710      END
02720 *-----
02730      SUBROUTINE QANDM(SQ,YM,QE,PG,PZ,FA,ID)
02740      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
02750      IF(ID.NE.0) GO TO 3

```



```
02760      H2=SQ
02770      P1=OQO
02780      R1=H2
02790      S1=H2
02800      P2=H2**2
02810      R2=P2
02820      S2=P2
02830      SS=P2
02840  21 CONTINUE
02850      S1=S1*SS
02860      R1=R1*S1
02870      S2=S2*SS
02880      R2=R2*S2
02890      PP=P1+R1
02900      IF(PP.EQ.P1) GO TO 22
02910      P1=PP
02920      P2=P2+R2
02930      GO TO 21
02940  22 CONTINUE
02950      P3=H2+P1
02960      EM=16*H2*((1+P2)/(1+2*P3))**4
02970      SP=P3*P3+P1
02980      P=H2+SP
02990      QK=1+4*P
03000      PS=(P3-P2/2)/(1+2*P3)
03010      PS1=1-PS
03020      FI=8*H2*PS1*(1-2*PS1*PS)*PS
03030  3 CONTINUE
03040      SQ=H2
03050      YM=EM
03060      QE=QK
03070      PG=P
03080      PZ=SP
03090      FA=FI
03100      RETURN
03110      END
03120  *-----
03130      SUBROUTINE REGUL(XX,X2,SUB,FF,KOUNT)
03140      IMPLICIT REAL*16(A-H,O-Z)
03150      DATA EP3,EP7/1Q-30,1Q-70/
03160      EXTERNAL SUB
03170      CALL SUB(XX,F1)
03180      IF(ABS(F1).LE.EP3) RETURN
03190      CALL SUB(X2,F2)
03200      KOUNT=0
03210      FB=1/EP7
03220      Z1=XX
03230      Z2=X2
03240  1 CONTINUE
03250      Z12=ABS(Z1+Z2)+EP7
03260      F21=F2-F1
03270      F21=F21+SIGN(EP7,F21)
03280      G2 =F2/F21
03290      G1 =F1/F21
03300      XX =Z1*G2-Z2*G1
```



```
03310      CALL SUB(XX,FF)
03320          IF(ABS(XX-Z1)/Z12.LE.EP3) RETURN
03330          IF(ABS(XX-Z2)/Z12.LE.EP3) RETURN
03340      ABSFF=ABS(FF)
03350          IF(ABSFF.LE.EP3) RETURN
03360          IF(ABSFF.GE. FB) KOUNT=KOUNT+1
03370          IF(KOUNT.GE. 33) RETURN
03380      FB=ABSFF
03390      Z1=Z2
03400      F1=F2
03410      Z2=XX
03420      F2=FF
03430      GO TO 1
03440      END
03450 *-----END OF FILE=QUADR-----941226
```


付録B 定常振動問題の解と安定判別のための数値解法プログラム

| 連立常微分方程式の数値特解法 |
|--|
| CALL DSHOOT(Y,F,T,P,Q,N,M,ISW,S,EPS,SUB,VW,ICON) |

(1) 機能

連立一階常微分方程式

$$\left. \begin{array}{l} dx/dt = X \\ t : \text{独立変数 (実スカラー)} \\ \mathbf{x}, \mathbf{X} : n \text{次元ベクトル} \\ \mathbf{x} \equiv {}^t(x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \\ \mathbf{X} \equiv {}^t(X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n) \\ \text{左片号“}t\text{”は転置を表す} \end{array} \right\} \quad (\text{B.1})$$

において次の境界条件

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}(T) = \mathbf{P}\mathbf{x}(0) + \mathbf{Q} \\ \mathbf{P} : n \text{次正方行列} \\ \mathbf{Q} : n \text{次元ベクトル} \end{array} \right\} \quad (\text{B.2})$$

を満足する解を求め、その解の安定性を調べる。

(2) パラメータ

Y... 入力. t の初期値と \mathbf{x} の適当な初期値を与える。

$Y(0:N+N*N,0:M)$ なる 2 次元配列. 入力の与え方は次のとおりとする。

$Y(0,0) : t$ の初期値 t_0

$Y(I,0) : x_i \ (i=1, \dots, n)$ の適当な初期値

出力. $t_j = t_0 + j(T/m) \ (j=0, \dots, m)$ における定常周期解 $x_i \ (i=1, \dots, n)$ の値. 出力のしかたは次のとおりとする。

$Y(0,J) : t_j$

$Y(I,J) : x_i(t_j)$

配列の一部は作業領域として使われる。

F... 出力. $t_j = t_0 + j(T/m) \ (j=0, \dots, m)$ における $X_i \ (i=1, \dots, n)$ の値。

$F(0:N+N*N,0:M)$ なる 2 次元配列. 出力のしかたは次のとおりとする。

$F(0,J) : t_j$

$F(I,J) : X_i(t_j)$

配列の一部は作業領域として使われる。

T... 入力. 周期 T またはその推定値。

P... 入力. 境界条件を表す行列 P .

$P(N,N)$ なる 2 次元配列. 入力の与えかたは次のとおりとする.

$P(I,J) : p_{ij}$ (ただし, p_{ij} は P の i 行 j 列成分)

Q... 入力. 境界条件を表すベクトル Q .

大きさ n の 1 次元配列. 入力の与えかたは次のとおりとする.

$Q(I) : q_i$ (ただし, q_i は Q の第 i 成分)

N... 入力. 連立常微分方程式の元数 n .

M... 入力. 1 周期のキザミ数 m .

ISW... 入力. 既知パラメータの指定.

ISW=0 周期 T が既知 (非自律形など).

ISW=1 $X_i (i = 1, \dots, n)$ が既知 (自励系など).

S... 出力. 安定判別値. 表 B.1 参照

EPS... 入力. 収束判定値.

出力. 計算を打ち切った時点での x の初期値と 1 周期後の値の相対誤差.

$$EPS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i(0) - x_i(T))^2}{\sum_{i=1}^n (x_i(0)^2 + x_i(T)^2)}}$$

SUB... 入力. 式 (B.1) における X とヤコビアンマトリクス $\partial X / \partial x$ を計算する副プログラム名.

[副プログラムの用意のしかた]

SUBROUTINE SUB(YY,FF,DJM)

パラメータ

YY... 入力. $YY(0)=t$, $YY(I)=x_i (i=1, \dots, n)$ の対応を持つ $YY(0:N)$ なる 1 次元配列.

FF... 出力. $FF(I)=X_i (i=1, \dots, n)$ の対応を持つ $FF(0:N)$ なる 1 次元配列.
なお $FF(0)$ には何も代入してはならない.

DJM... 出力. $DJM(I,J)=\partial X_i / \partial x_j (i,j=1, \dots, n)$ の対応を持つ $DJM(N,N)$ なる 2 次元配列.

VW... 作業領域. 大きさ $n(3n+4)$ の 1 次元配列.

ICON... 出力. コンディションコード. 大きさ 2 の 1 次元配列.

表 B.2, B.3 参照

表 B.1 安定判別値

| 安定判別値 | 意 味 |
|----------------|-----|
| $0 < S \leq 1$ | 安定 |
| $S > 1$ | 不安定 |
| $S = -1$ | 不定 |

表 B.2 コンディションコード 1

| ICON(1) | 意 味 | 処 理 内 容 |
|---------|--------------|---------|
| 0 | 収束 | |
| 20000 | 発散 | 処理を打ち切る |
| 30000 | パラメータエラー | 処理を打ち切る |
| 40000 | DLAX でエラー発生 | 処理を打ち切る |
| 50000 | DLAXR でエラー発生 | 処理を打ち切る |
| 60000 | DBLNC でエラー発生 | 処理を打ち切る |
| 70000 | DHES1 でエラー発生 | 処理を打ち切る |
| 80000 | DHSQR でエラー発生 | 処理を打ち切る |

表 B.3 コンディションコード 2

| ICON(1) | ICON(2) の意味 |
|-----------------|---|
| 0 | 反復計算数 |
| 20000 | 10000 : 相対誤差が 10^2 を越えた |
| | 20000 : 反復計算において相対誤差が 前回のものより大きくなるこ とが5回を越えた. |
| | 30000 : 反復計算数が 32 回を越えた. |
| 30000 | 返り値なし |
| 40000~ 80000 | エラーの発生した副プログラム (SSLII) のコンディションコード |

(3) 使用上の注意

a. 使用する副プログラム

- ① FORTRAN 基本関数… DSQRT
- ② SSLII… DLAX, DLAXR, DBLNC, DHES1, DHSQR

- ③ 本プログラム中… SHINI, EQCAL, SHRKG, SHSUB, MKTRM, NXCAL,
MKMTX, MKNX, STCAL, NMCAL

b. 注意

- ① 本サブルーチンで用いる実数の変数及び配列はすべて倍精度である.
- ② 初期値と1周期後の値の相対誤差が収束判定値よりも小さくなれば収束したとし, 安定判別を行う.
- ③ 以下の場合, 解が発散したとし, 処理を中断する.
 1. 反復計算数が32回を越えた場合.
 2. 相対誤差が 10^2 を超えた場合.
 3. 反復計算において相対誤差が前回のものより大きくなることが5回を越えた場合.


```

00010      SUBROUTINE DSHOOT(Y,F,T,P,Q,N,M,ISW,S,EPS,SUB,VW,ICON)
00020      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00030      DIMENSION Y(0:N+N*N,0:M),F(0:N+N*N,0:M),P(N,N),Q(N)
00040      DIMENSION VW(N*(3*N+4)),ICON(2)
00050      EXTERNAL SUB
00060 C
00070      NN1 = 1
00080      NN2 = NN1+N*N
00090 C      VW(NN1..NN2-1) = TRM(N,N)      VW(NN2...LAST) = VW1(2*N*(N+2))
00100 C
00110      IF(T.LE.ODO.OR.N.LT.1.OR.M.LT.1.OR.
00120 & ISW.LT.0.OR.ISW.GT.N.OR.EPS.LE.ODO) THEN
00130          ICON(1) = 30000
00140          RETURN
00150      ENDIF
00160      CALL SHINI(Y,N,RNML,MMM,ICON)
00170      DO 10 I=1,32
00180          CALL EQCAL(Y,F,VW(NN1),T,N,M,SUB,VW(NN2))
00190          IF(ICON(1).NE.0) RETURN
00200          CALL NMCAL(Y,P,Q,N,M,RNM)
00210          IF(RNM.LT.EPS) THEN
00220              CALL STCAL(VW(NN1),N,S,VW(NN2),ICON)
00230              EPS = RNM
00240              ICON(2) = I-1
00250              RETURN
00260          ELSE IF(RNM.GT.1D2) THEN
00270              ICON(1) = 20000
00280              ICON(2) = 10000
00290              RETURN
00300          ELSE IF(RNM.GT.RNML) THEN
00310              IF(MMM.GT.5) THEN
00320                  ICON(1) = 20000
00330                  ICON(2) = 20000
00340                  RETURN
00350              ENDIF
00360              MMM = MMM+1
00370          ENDIF
00380          RNML = RNM
00390          CALL NXCAL(Y,F,P,Q,T,VW(NN1),N,M,ISW,VW(NN2),ICON)
00400          IF(ICON(1).NE.0) RETURN
00410      10 CONTINUE
00420          ICON(1) = 20000
00430          ICON(2) = 30000
00440          RETURN
00450      END
00460 C-----
00470      SUBROUTINE SHINI(Y,N,RNML,MMM,ICON)
00480      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00490      DIMENSION Y(0:N+N*N),ICON(2)
00500 C
00510      DO 10 I=1,N
00520          DO 10 J=1,N
00530              IF(I.EQ.J) THEN
00540                  Y(I*N+J) = 1D0
00550              ELSE

```



```

00560          Y(I*N+J) = ODO
00570          ENDIF
00580      10 CONTINUE
00590          RNML      = ODO
00600          MMM        = 0
00610          ICON(1) = 0
00620          RETURN
00630          END
00640 C-----
00650          SUBROUTINE EQCAL(Y,F,TRM,T,N,M,SUB,VW)
00660          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00670          DIMENSION Y(0:N+N*N,0:M),F(0:N+N*N,0:M),TRM(N,N),VW(1+N+2*N*N)
00680          EXTERNAL SUB
00690 C
00700          CALL SHRKG(Y,F,N,T/M,M,SUB,VW)
00710          CALL MKTRM(Y,TRM,N,M)
00720          RETURN
00730          END
00740 C-----
00750          SUBROUTINE SHRKG(Y,F,N,H,M,SUB,VW)
00760          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
00770          DIMENSION Y(0:N+N*N,0:M),F(0:N+N*N,0:M),VW(0:N+2*N*N)
00780          DIMENSION A(0:3),B(0:3),C(0:3)
00790          EXTERNAL SUB
00800          DATA A/ 0.5000000000000000D+00, 0.2928932188134525D+00,
00810          &      0.1707106781186547D+01, 0.1666666666666667D+00/
00820          DATA B/ 2D0, 1D0, 1D0, 2D0/
00830          DATA C/ 0.5000000000000000D+00, 0.2928932188134525D+00,
00840          &      0.1707106781186547D+01, 0.5000000000000000D+00/
00850 C
00860          L      = N+N*N
00870 C          NN1 = 0
00880          NN2 = 1+L
00890 C          VW(NN1..NN2-1) = Q(0:L)      VW(NN2...LAST) = VW1(N*N)
00900 C
00910          F(0,0) = 1D0
00920          DO 10 I=0,L
00930              VW(I) = ODO
00940      10 CONTINUE
00950          DO 30 K=1,M
00960              CALL SHSUB(Y(0,K-1),F(0,K-1),N,SUB,VW(NN2))
00970              DO 20 I=0,L
00980                  DK      = H*F(I,K-1)
00990                  R      = A(0)*(DK-B(0)*VW(I))
01000                  YY     = Y(I,K-1)
01010                  Y(I,K) = YY+R
01020                  VW(I) = VW(I)+3D0*(Y(I,K)-YY)-C(0)*DK
01030      20 CONTINUE
01040          F(0,K) = 1D0
01050          DO 30 J=1,3
01060              CALL SHSUB(Y(0,K),F(0,K),N,SUB,VW(NN2))
01070              DO 30 I=0,L
01080                  DK      = H*F(I,K)
01090                  R      = A(J)*(DK-B(J)*VW(I))
01100                  YY     = Y(I,K)

```



```

01110          Y(I,K) = YY+R
01120          VW(I) = VW(I)+3DO*(Y(I,K)-YY)-C(J)*DK
01130      30 CONTINUE
01140          CALL SHSUB(Y(O,M),F(O,M),N,SUB,VW(NN2))
01150          RETURN
01160          END
01170 C      -----
01180          SUBROUTINE SHSUB(YY,FF,N,SUB,VW)
01190          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
01200          DIMENSION YY(O:N+N*N),FF(O:N+N*N),VW(N,N)
01210          EXTERNAL SUB
01220 C
01230          CALL SUB(YY,FF,VW)
01240          DO 10 I=1,N
01250              DO 10 J=1,N
01260                  FF(I*N+J) = ODO
01270                  DO 10 K=1,N
01280                      FF(I*N+J) = FF(I*N+J)+VW(J,K)*YY(I*N+K)
01290      10 CONTINUE
01300          RETURN
01310          END
01320 C      -----
01330          SUBROUTINE MKTRM(Y,TRM,N,M)
01340          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
01350          DIMENSION Y(O:N+N*N,O:M),TRM(N,N)
01360 C
01370          DO 10 I=1,N
01380              DO 10 J=1,N
01390                  TRM(J,I) = Y(I*N+J,M)
01400      10 CONTINUE
01410          RETURN
01420          END
01430 C      -----
01440          SUBROUTINE NXCAL(Y,F,P,Q,T,TRM,N,M,ISW,VW,ICON)
01450          IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
01460          DIMENSION Y(O:N+N*N,O:M),F(O:N+N*N,O:M),P(N,N),Q(N)
01470          DIMENSION TRM(N,N),VW(2*N*(N+2)),ICON(2)
01480 C
01490          NN1 = 1
01500          NN2 = NN1+N*N
01510          NN3 = NN2+N
01520          NN4 = NN3+N*N
01530          NN5 = NN4+N
01540          NN6 = NN5+N
01550 C          VW(NN1..NN2-1) = FA(N,N)          VW(NN2..NN3-1) = DX(N)
01560 C          VW(NN3..NN4-1) = A(N,N)          VW(NN4..NN5-1) = B(N)
01570 C          VW(NN5..NN6-1) = IP(N)          VW(NN6...LAST) = VW1(N)
01580 C
01590          CALL
01600          & MKMTX(Y,F,P,Q,TRM,VW(NN1),VW(NN2),VW(NN3),VW(NN4),N,M,ISW)
01610          CALL
01620          & DLAX(VW(NN1),N,N,VW(NN2),ODO,1,IS,VW(NN6),VW(NN5),ICON(2))
01630          IF(ICON(2).NE.O) THEN
01640              ICON(1) = 40000
01650          RETURN

```



```

01660      ENDIF
01670      CALL DLAXR(VW(NN2),VW(NN3),N,N,
01680      &          VW(NN1),VW(NN4),VW(NN5),VW(NN6),ICON(2))
01690      IF(ICON(2).NE.0) THEN
01700          ICON(1) = 50000
01710          RETURN
01720      ENDIF
01730      CALL MKNX(Y,T,VW(NN2),N,ISW)
01740      RETURN
01750      END
01760 C -----
01770      SUBROUTINE MKMTX(Y,F,P,Q,TRM,FA,DX,A,B,N,M,ISW)
01780      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
01790      DIMENSION Y(0:N+N*N,O:M),F(0:N+N*N,O:M),TRM(N,N),P(N,N),Q(N)
01800      DIMENSION FA(N,N),DX(N),A(N,N),B(N)
01810 C
01820      DO 10 I=1,N
01830          DX(I) = Q(I)-Y(I,M)
01840          DO 10 J=1,N
01850              DX(I) = DX(I)+P(I,J)*Y(J,O)
01860              IF(J.EQ.ISW) THEN
01870                  FA(I,J) = F(I,M)
01880              ELSE
01890                  FA(I,J) = TRM(I,J)-P(I,J)
01900              ENDIF
01910      10 CONTINUE
01920      DO 20 I=1,N
01930          B(I) = DX(I)
01940          DO 20 J=1,N
01950              A(I,J) = FA(I,J)
01960      20 CONTINUE
01970      RETURN
01980      END
01990 C -----
02000      SUBROUTINE MKNX(Y,T,DX,N,ISW)
02010      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
02020      DIMENSION Y(0:N+N*N),DX(N)
02030 C
02040      DO 10 I=1,N
02050          IF(I.EQ.ISW) THEN
02060              T = T+DX(I)
02070          ELSE
02080              Y(I) = Y(I)+DX(I)
02090          ENDIF
02100      10 CONTINUE
02110      RETURN
02120      END
02130 C -----
02140      SUBROUTINE STCAL(TRM,N,S,VW,ICON)
02150      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
02160      DIMENSION TRM(N,N),VW(2*N),ICON(2)
02170 C
02180      NN1 = 1
02190      NN2 = NN1+N
02200 C      VW(NN1..NN2-1) = ER(N) ETC.      VW(NN2...LAST) = EI(N)

```



```
02210 C
02220 CALL DBLNC(TRM,N,N,VW(NN1),ICON(2))
02230 IF(ICON(2).EQ.30000) THEN
02240     ICON(1) = 60000
02250     RETURN
02260 ENDIF
02270 CALL DHES1(TRM,N,N,VW(NN1),ICON(2))
02280 IF(ICON(2).EQ.30000) THEN
02290     ICON(1) = 70000
02300     RETURN
02310 ENDIF
02320 CALL DHSQR(TRM,N,N,VW(NN1),VW(NN2),M,ICON(2))
02330 IF(ICON(2).GE.20000) THEN
02340     ICON(1) = 80000
02350     RETURN
02360 ENDIF
02370 S = ODO
02380 DO 10 I=0,M-1
02390     EE = DSQRT(VW(NN1+I)**2+VW(NN2+I)**2)
02400     IF(S.LT.EE) S = EE
02410 10 CONTINUE
02420 RETURN
02430 END
02440 C-----
02450 SUBROUTINE NMCAL(Y,P,Q,N,M,RNM)
02460 IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
02470 DIMENSION Y(0:N+N*N,O:M),P(N,N),Q(N)
02480 C
02490 SUM1 = ODO
02500 SUM2 = ODO
02510 DO 20 I=1,N
02520     YY = Q(I)
02530     DO 10 J=1,N
02540         YY = YY+P(I,J)*Y(J,O)
02550 10 CONTINUE
02560     SUM1 = SUM1+(YY-Y(I,M))**2
02570     SUM2 = SUM2+YY**2+Y(I,M)**2
02580 20 CONTINUE
02590 RNM = DSQRT(SUM1/SUM2)
02600 RETURN
02610 END
```