

初期たわみを有する補強長方形板の自由振動特性に関する研究

有富, 正男

<https://doi.org/10.11501/3088186>

出版情報 : 九州大学, 1991, 博士 (工学), 論文博士
バージョン :
権利関係 :

第7章 片面補強板の振動特性

7.1 緒言

補強材が非補強板の片面のみに配置された片面補強板の場合，その中立面は非補強板の中央面とは一致せず，その結果，曲げと面内伸びの連成が生じる．本論文では，片面補強のような非対称補強板を，補強材1ピッチ間の補強板断面の図心を通る軸をそれぞれ中立軸とする直交異方性板に置き換え，その自由振動問題を取り扱ってきた．

本章では，第3章の一般的な補強長方形板の自由振動特性を解析するためのモード方程式と第4章の実験方法で得られた測定結果に基づき，片面補強板の線形固有振動数と固有振動モード，および固有振動数の振幅依存性のそれぞれに及ぼす偏心補強の影響を明らかにする．まず，9項モード近似を用いて計算した固有振動モードの等変位曲線が，レーザ・ホログラフィによる測定結果とよく一致し，しかも線形固有振動数の理論値も補強材の剛性や配置方法が異なるいずれの補強板に対しても実験値とよく一致することを示し，面内伸びと曲げの連成を考慮してsmeared out法を適用した本論文の方法が片面補強板の自由振動解析にも有効であることを述べる．また，同じ値の質量比と剛性比をもつ片面補強板と両面对称補強板の初期たわみに対する線形固有振動数の変化を比較し，線形固有振動数に及ぼす偏心補強による面内伸びと曲げの連成の影響を明らかにする．

次に非線形自由振動では，振動数比 ω^*/ω の実験値は面内不動周辺の理論曲線とよく一致し，逐次近似法で求めた振動数比 ω^*/ω の近似式は，片面補強板の非線形振動問題にも十分適用可能であることを述べる．最後に，同じ値の剛性比をもつ片面補強板と両面对称補強板の振幅 \bar{A}_2 に対する振動数比 ω^*/ω の変化を比較し， ω^*/ω の振幅依存性に及ぼす偏心補強の影響を明らかにする．

7.2 片面補強板の補強材パラメータ

図7.1のように補強材が非補強板の片面のみに配置された補強板では、第2章および第3章の中で下添字1を付記した補強材の諸量が全て0となる。そこで、補強材の諸量を改めて

$$\begin{aligned}
 e_{s2} &= e_s, & e_{r2} &= e_r, & A_{s2} &= A_s, & A_{r2} &= A_r \\
 I_{s2} &= I_s, & I_{r2} &= I_r, & J_{s2} &= J_s, & J_{r2} &= J_r \\
 E_{s2} &= E_s, & E_{r2} &= E_r, & G_{s2} &= G_s, & G_{r2} &= G_r \\
 \rho_{s2} &= \rho_s, & \rho_{r2} &= \rho_r
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

とおき、この関係を式(2.23)に代入すれば、非補強板の中央面から補強板断面の中立軸までの距離 \bar{c}_s , \bar{c}_r が

$$\bar{c}_s = \frac{c_s}{h} = \frac{e_s A_s}{h(h d_s + A_s)}, \quad \bar{c}_r = \frac{c_r}{h} = \frac{e_r A_r}{h(h d_r + A_r)}
 \tag{7.2}$$

と表され、同時に式(3.7)の無次元連成剛性 γ は

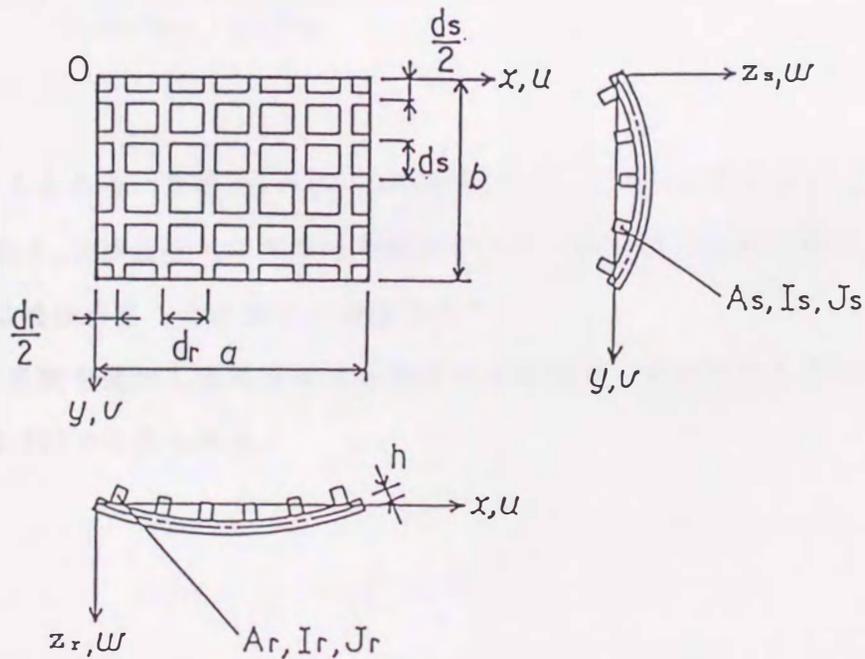


図 7.1 片面補強板

$$\gamma_s = 1/2 \{ \bar{c}_s - \alpha_s(\bar{e}_s - \bar{c}_s) \}, \quad \gamma_r = 1/2 \left\{ \frac{E_{22}}{E_{11}} \bar{c}_r - \alpha_r(\bar{e}_r - \bar{c}_r) \right\}$$

$$\gamma_{12} = \frac{1/2 E_{12}}{E_{11}} \bar{c}_s, \quad \gamma_{21} = \frac{1/2 E_{12}}{E_{11}} \bar{c}_r \quad (7.3)$$

$$\gamma_{sr} = 6 [(\bar{c}_s + \bar{c}_r) + 2 \{ \alpha_{sr}(\bar{e}_s - \bar{c}_s) + \alpha_{rs}(\bar{e}_r - \bar{c}_r) \}]$$

と簡単になる。ただし、無次元化された伸び剛性、曲げ剛性およびねじり剛性は式(3.7)で与えられ、これらの式中の各剛性比と式(3.5)の質量比 $\bar{\rho}$ は

$$\bar{\rho} = \left[\frac{\rho_s A_s}{d_s} + \frac{\rho_r A_r}{d_r} - \frac{m_{sr}}{a b} \right] / (\rho h)$$

$$\alpha_s = \frac{E_s A_s}{E_{11} h d_s}, \quad \alpha_r = \frac{E_r A_r}{E_{11} h d_r}, \quad \alpha_{sr} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_s A_s}{G h d_s}, \quad \alpha_{rs} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_r A_r}{G h d_r}$$

$$\beta_s = 1/2 \frac{E_s I_s}{E_{11} h^3 d_s}, \quad \beta_r = 1/2 \frac{E_r I_r}{E_{11} h^3 d_r}$$

$$\beta_{sr} = 3 \left[\frac{G_s J_s}{G h^3 d_s} + \frac{G_r J_r}{G h^3 d_r} \right] \quad (7.4)$$

と書き換えられる。ただし、 A_s と A_r は補強材各1本の断面積を表し、以下同様に $E_s I_s$ と $E_r I_r$ は補強材各1本の補強板断面の中立軸に関する曲げ剛性、 $G_s J_s$ と $G_r J_r$ は補強材各1本のねじり剛性を表す。

なお、実験で使用した片面補強板試験片の質量比、剛性比および無次元連成剛性は式(4.10)で与えられる。

7.3 線形振動

7.3.1 振動モード

数値計算は、振動変位を両対称補強板の場合と同様に式(5.6)の9項モードの形で近似して行う。この振動変位に対する片面補強板の線形振動のモード方程式は、式(3.47)から

$$\sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 Z_{mn} \left[q_{ij} \bar{A}_{mn, \tau\tau} + \frac{\pi^4}{1 + \bar{\rho}} \left\{ h_{ij} + {}^1\kappa_{ij} \bar{B} + ({}^1\mu_{ij} + \Lambda \cdot {}^1\nu_{ij}) \bar{B}^2 \right\} \bar{A}_{mn} \right] = 0 \quad (7.5)$$

で与えられる。これらの式はやはり、SS, SA, AS, AAの4種類の固有振動モードに対して、それぞれ未知の時間関数 $\bar{A}_{mn}(\tau)$ に関する連立線形常微分方程式を形成し、これらを解くと線形固有振動数 $\bar{\omega}_{mn}$ と対応する固有振動モードが得られる。

図7.2は補強材が曲面の曲率中心側にのみ格子状上に配置された片面二方向補強板の、また図7.3は補強材がx軸に平行な方向(紙面では水平方向)のみに配置された片面一方向補強板の、それぞれ9種類の振動モードの実験結果と面内不動周辺の場合の等変位曲線の計算結果を示したものである。ただし計算では、無次元変位の最大値を1とし、図7.2(a),(c)および図7.3(a),(b)以外の図では、実線と破線はそれぞれ $\pm 0.2, \pm 0.4, \pm 0.6, \pm 0.8$ の値の等変位曲線を示す。これに対して、図7.2(a),(c)および図7.3(a),(b)の実線は0.05, 0.2, 0.35, 0.5, 0.65, 0.8, 0.95の等変位曲線を、図7.2(c)と図7.3(b)の破線は-0.1, -0.25, -0.4, -0.55, -0.7, -0.85の等変位曲線をそれぞれ表す。

まず、図7.2の直交した二方向に同じ補強材を配置した二方向補強正方形板の場合、(a)図の基本振動の固有振動モードは両対称補強板と同様に初期たわみが大きくなると次第に板中心が平らな形となっている。また(b)図と(c)図の初期たわみのない($\bar{B} = 0$)補強板の実験結果には、理論解析で予測したモードの縮退は生じず、長方形板の場合と同様に節線が板の辺に平行な直線となる振動

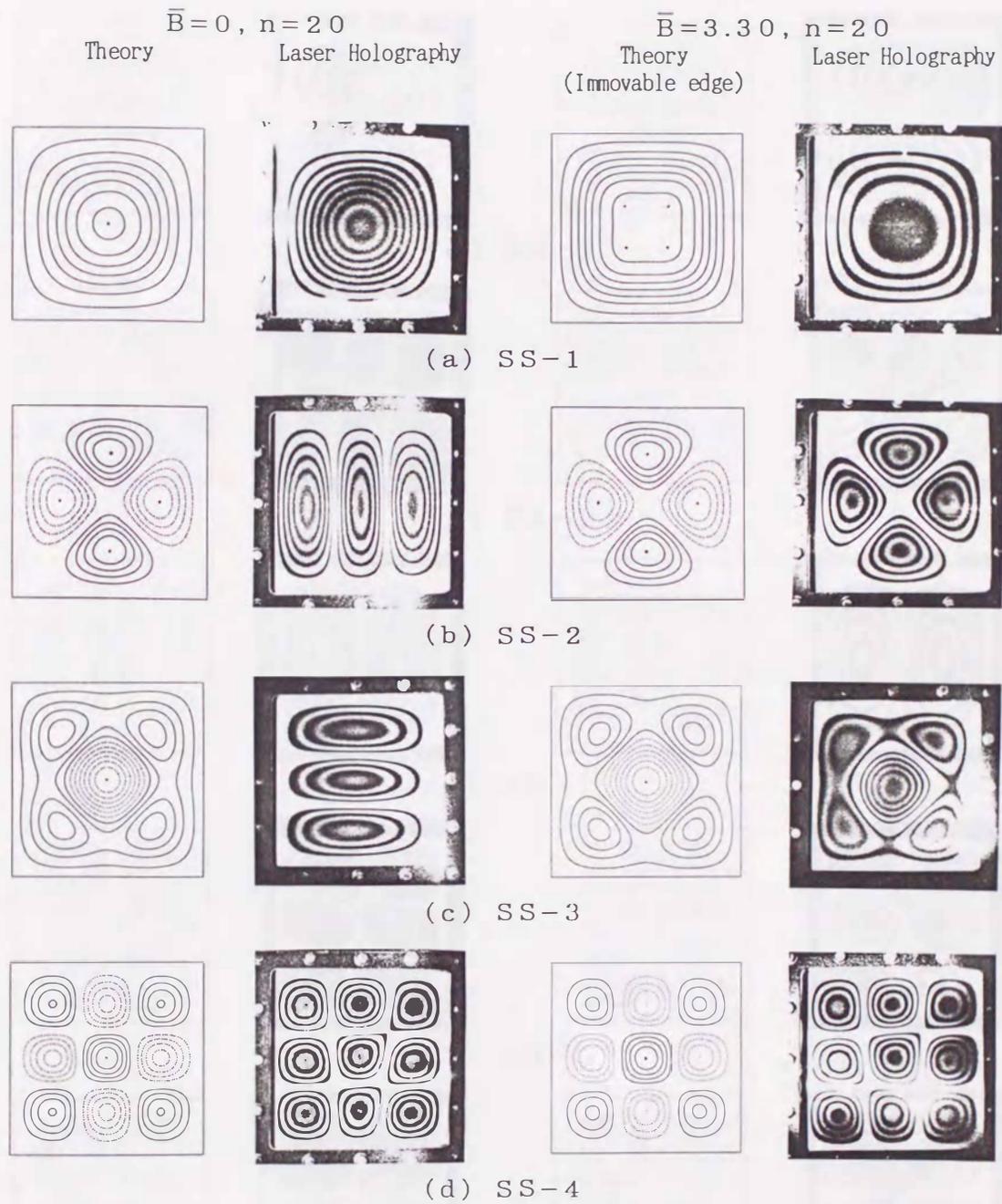


図 7.2 振動モードに及ぼす初期たわみの影響
(片面二方向補強板)

(次頁に続く)

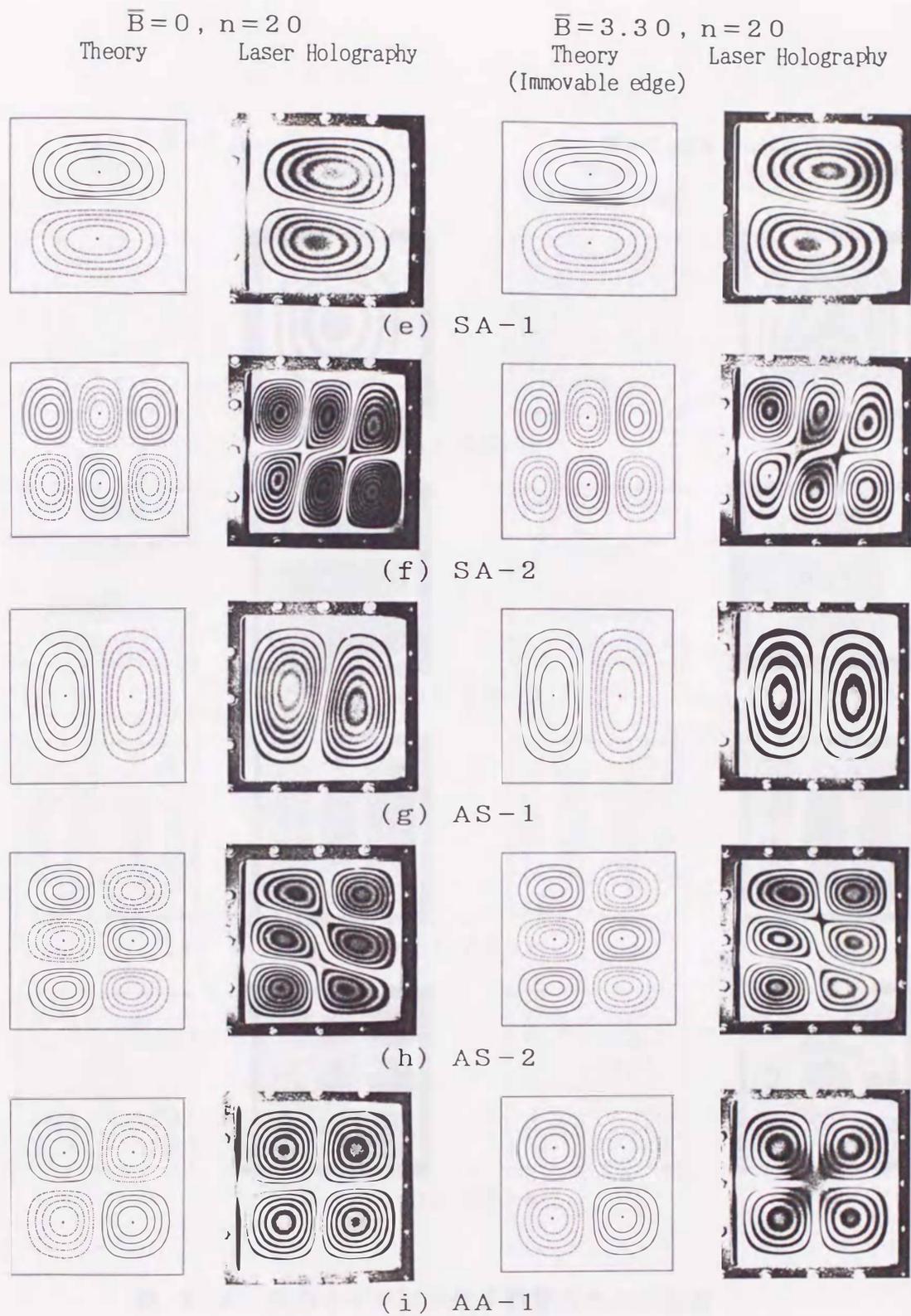


図 7.2 振動モードに及ぼす初期たわみの影響
(片面二方向補強板)

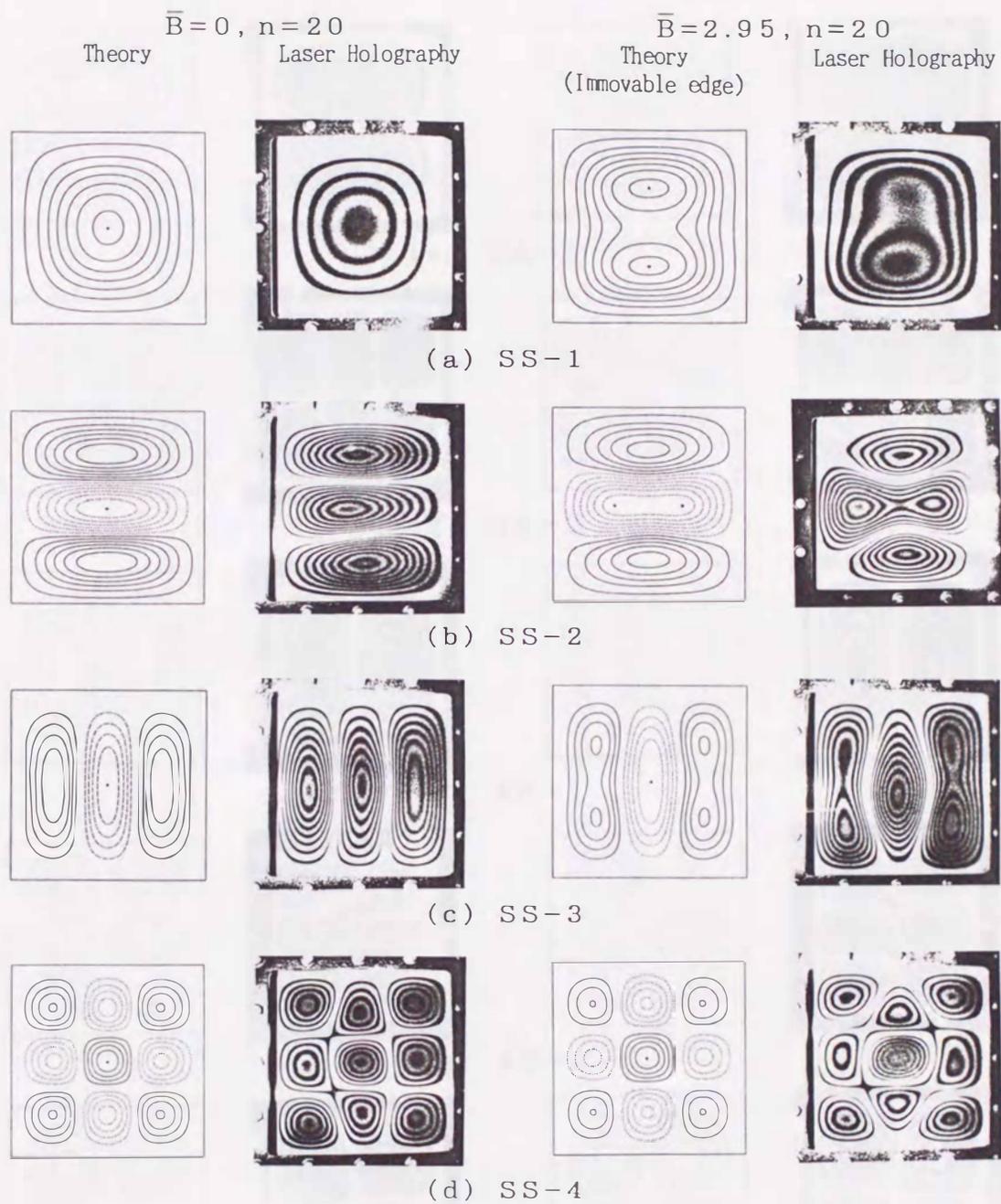


図 7.3 振動モードに及ぼす初期たわみの影響
(片面一方向補強板)

(次頁に続く)

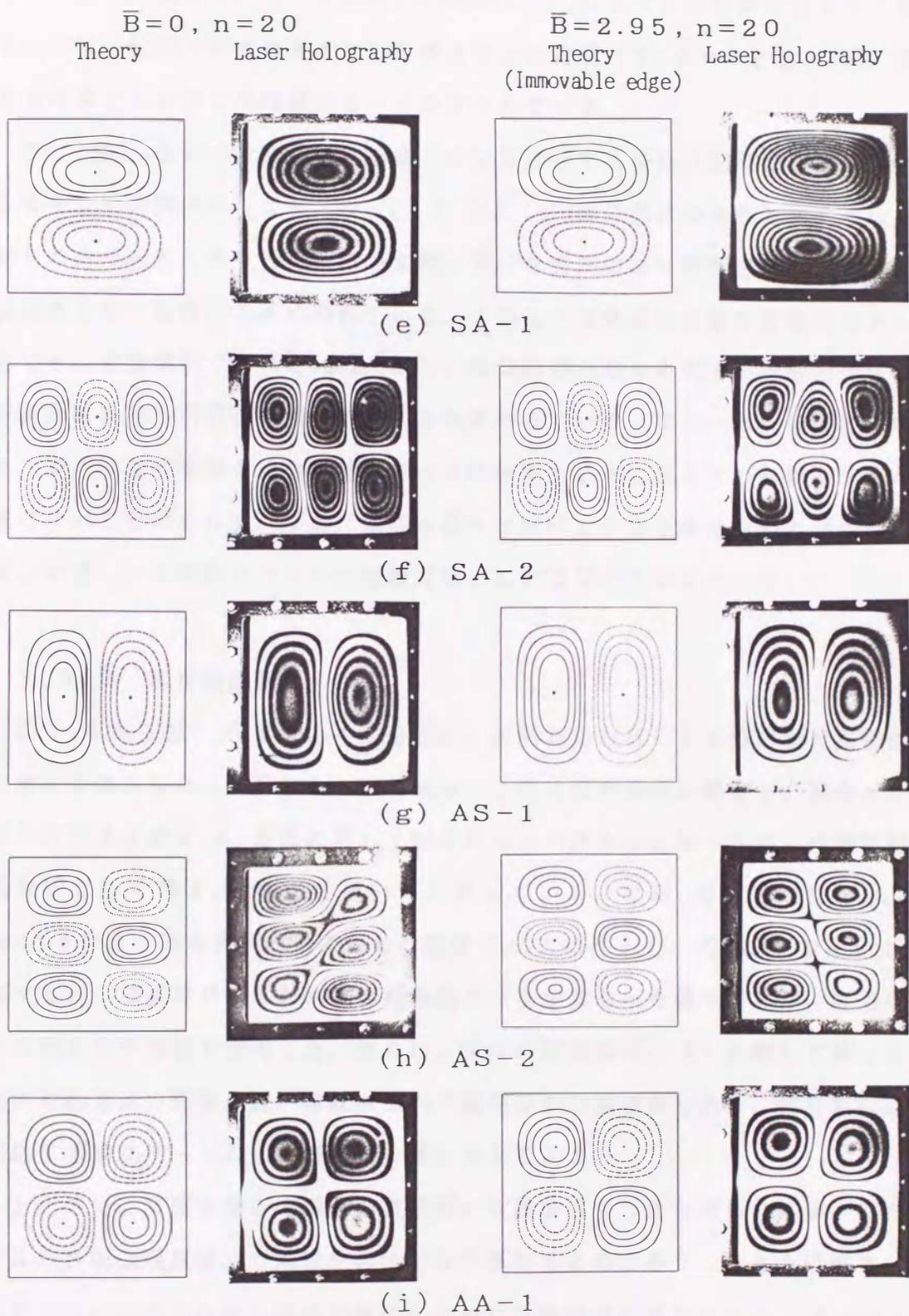


図 7.3 振動モードに及ぼす初期たわみの影響
(片面一方向補強板)

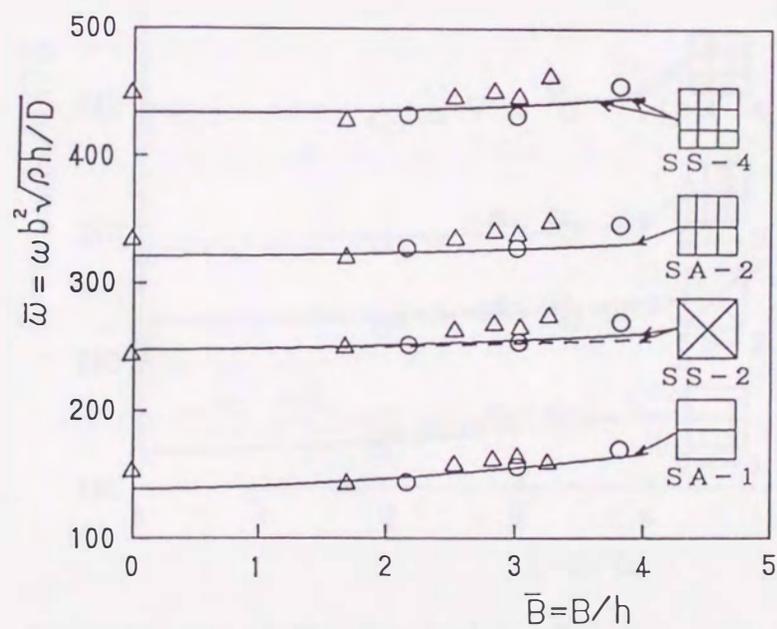
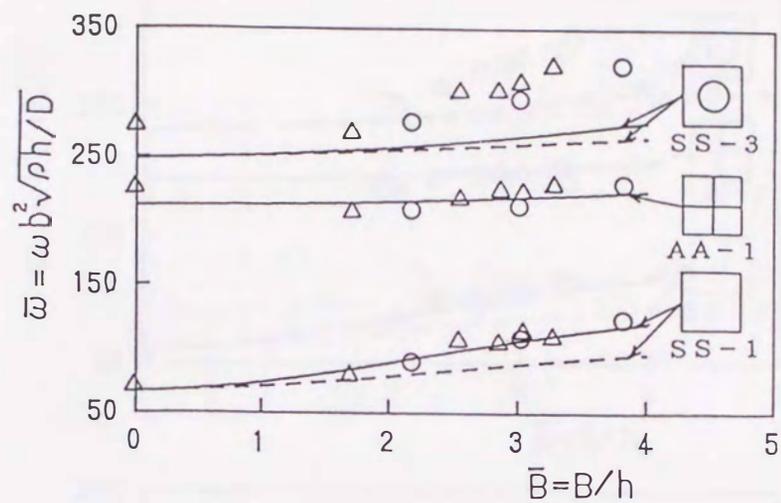
モードのみが現れている。さらに(e)図から(i)図までの逆対称な形を伴う振動モードは、初期たわみの大きさの影響をほとんど受けず、 $\bar{B} = 0$ と $\bar{B} = 3.30$ の場合ではほとんど同じ形の振動モードが得られている。

次に、図7.3の一方向補強板の場合は正方形板でも補強材配置による異方性のためモードの縮退は生じず、特に(a),(b),(c)図の低次のSSモードでは、初期たわみが大きくなると補強材がx軸に平行な方向のみに配置されたことによる直交異方性の影響が大きく現れている。このことは等変位曲線の計算結果でも確認でき、理論解析で用いたsmeared out法が初期たわみを有する片面補強板の曲げ振動解析でも有効な手法であることを裏付けている。また一方向補強板の場合も、逆対称な形を伴う場合の振動モードは初期たわみの大きさの影響をほとんど受けないことがわかる。なお、振幅が板厚に比べて小さな線形振動の場合には、偏心補強による振動モードへの影響はほとんど見受けられなかった。

7.3.2 固有振動数

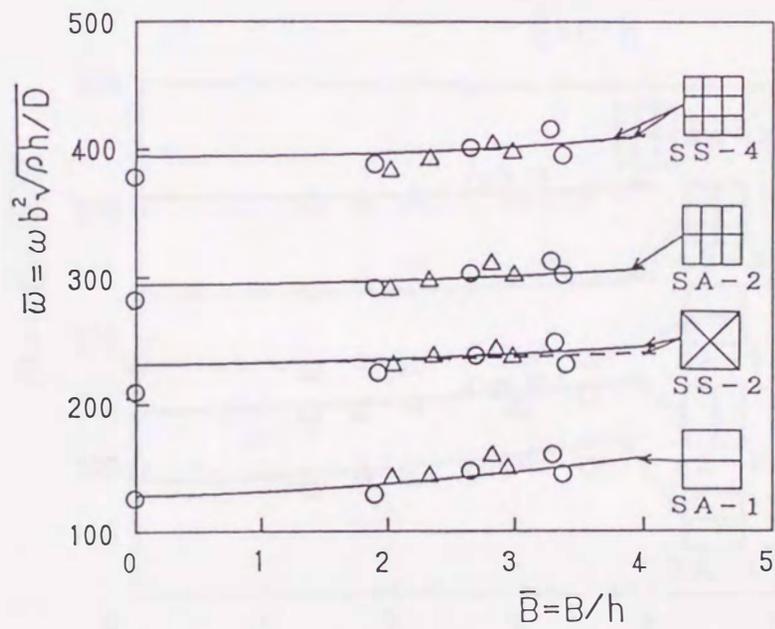
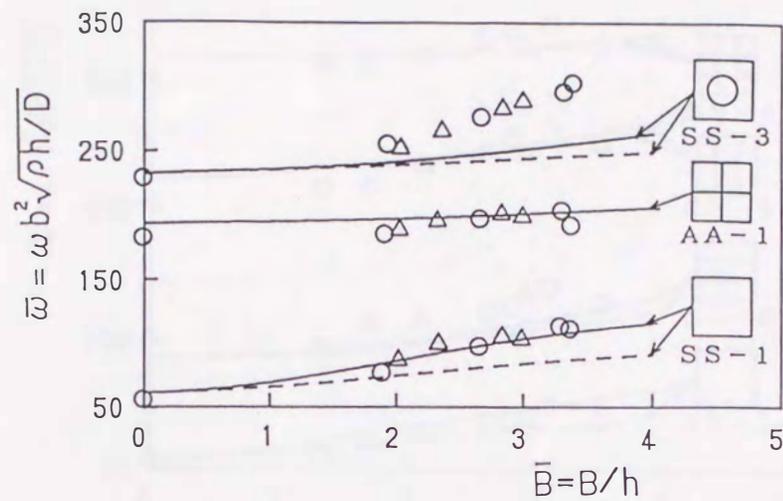
図7.4から図7.7までの4つの図は、初期たわみBによる線形固有振動数 ω の変化を無次元化して示したものである。この片面補強板の場合も、製作した試験片の寸法は表4.4の値に対して幾分ばらついたものとなったが、理論曲線は代表値として表4.4の値を用いて計算している。なお、ねじり剛性比 β_{sr} は表4.4の各寸法を式(4.11)のねじり定数 J_s の式に代入し、式(4.10)を用いて計算すると、補強材が10本と20本の補強板では多少異なった値となるが、理論計算では両者の平均値を採用した。さらに、図中の破線は式(7.5)を解いて得られた面内可動周辺の理論曲線、実線は面内不動周辺の理論曲線であり、各計算結果に対応する振動モードの節線様式も一緒に示してある。

ところで、片面補強板の場合の実験値にも幾分ばらつきが見られるが、これはやはり各補強板試験片で剛性比の値が多少異なるためであり、たとえば図7.4の $\bar{B} = 0$ の場合の試験片は曲げ剛性比とねじり剛性比がそれぞれ $\beta_s = \beta_r = 4.1$ 、 $\beta_{sr} = 8.0$ と理論計算で使用した値に比べて大きく、このためSS-2以外の各モ



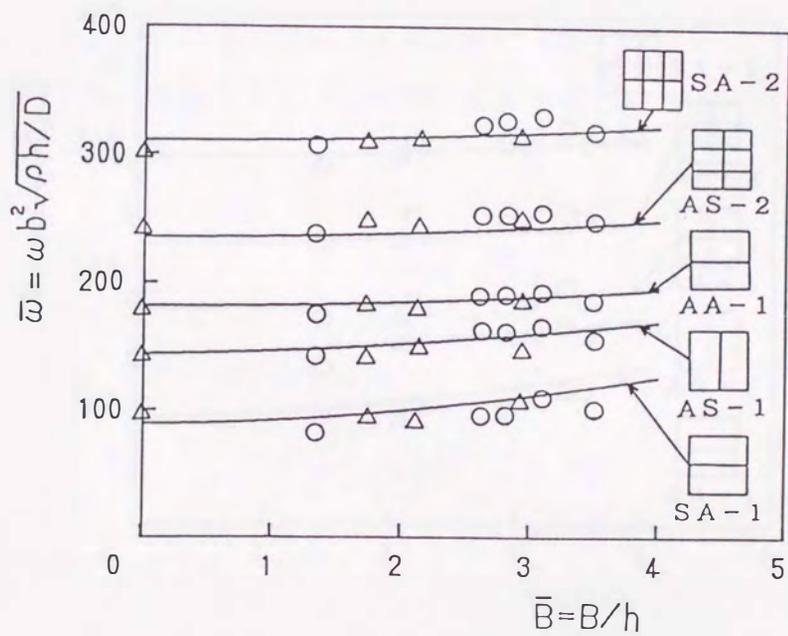
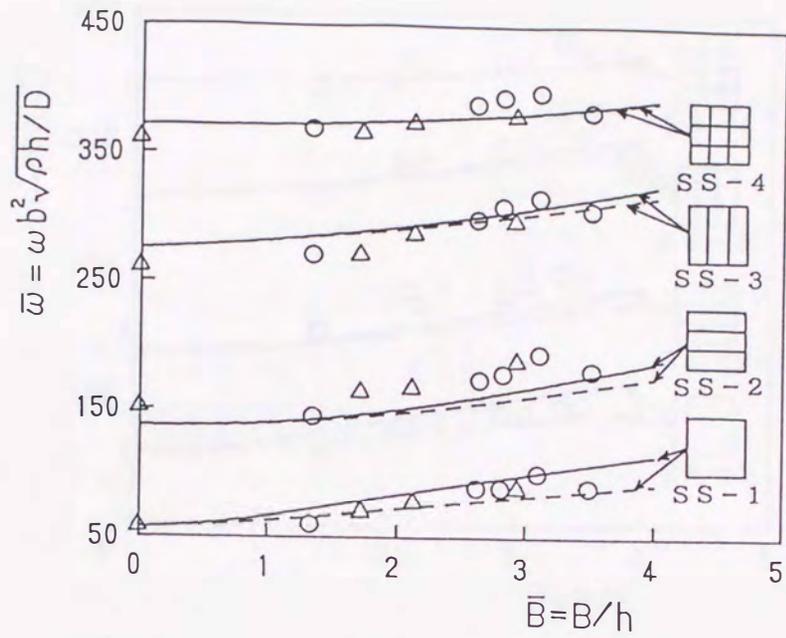
Theory ($\alpha_s = \alpha_r = 0.46$, $\beta_s = \beta_r = 3.6$, $\beta_{sr} = 7.1$
 $\gamma_s = \gamma_r = 0.38$, $\gamma_{sr} = 3.3$)
 - - - - Movable edge, ——— Immovable edge
 Experiment (O, Δ : $n = 10, 20$)

図 7.4 線形固有振動数 ω と初期たわみ B の関係
 (二方向補強板)



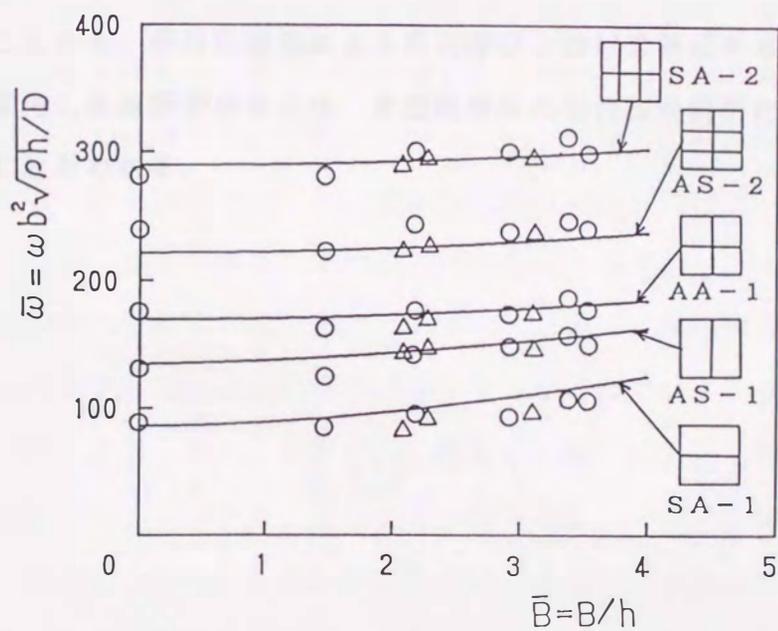
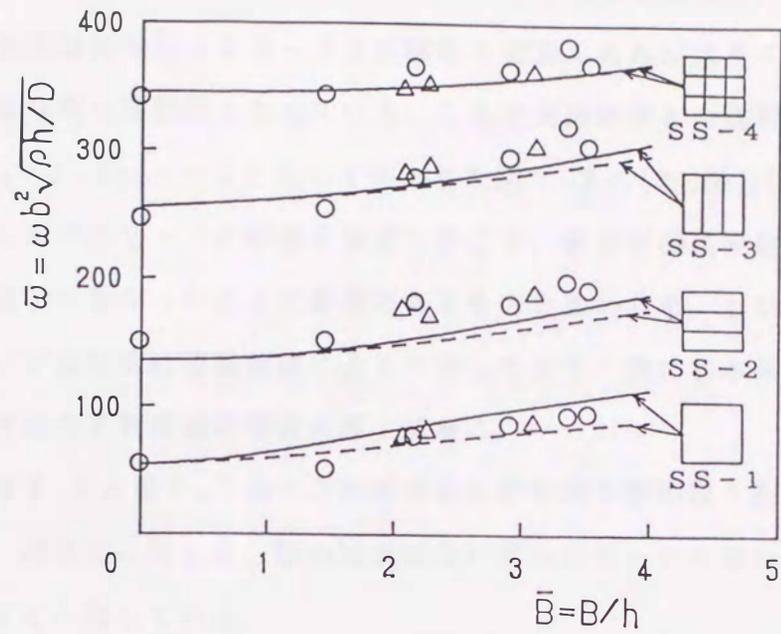
Theory ($\alpha_s = \alpha_r = 0.29$, $\beta_s = \beta_r = 2.8$, $\beta_{sr} = 4.4$
 $\gamma_s = \gamma_r = 0.27$, $\gamma_{sr} = 2.4$)
 --- Movable edge, ——— Immovable edge
 Experiment (○, △ : n = 10, 20)

図 7.5 線形固有振動数 ω と初期たわみ B の関係
 (二方向補強板)



Theory ($\alpha_r = \beta_r = \gamma_r = 0$, $\alpha_s = 0.58$, $\beta_s = 3.9$, $\beta_{sr} = 4.4$
 $\gamma_s = 0.44$, $\gamma_{sr} = 2.2$)
 - - - - Movable edge, ——— Immovable edge
 Experiment (○, △ : n = 10, 20)

図 7.6 線形固有振動数 ω と初期たわみ B の関係
 (一方向補強板)



Theory ($\alpha_r = \beta_r = \gamma_r = 0$, $\alpha_s = 0.38$, $\beta_s = 3.2$, $\beta_{sr} = 2.9$
 $\gamma_s = 0.33$, $\gamma_{sr} = 1.7$)

---- Movable edge, ——— Immovable edge

Experiment (O, Δ : $n = 10, 20$)

図 7.7 線形固有振動数 ω と初期たわみ B の関係
 (一方向補強板)

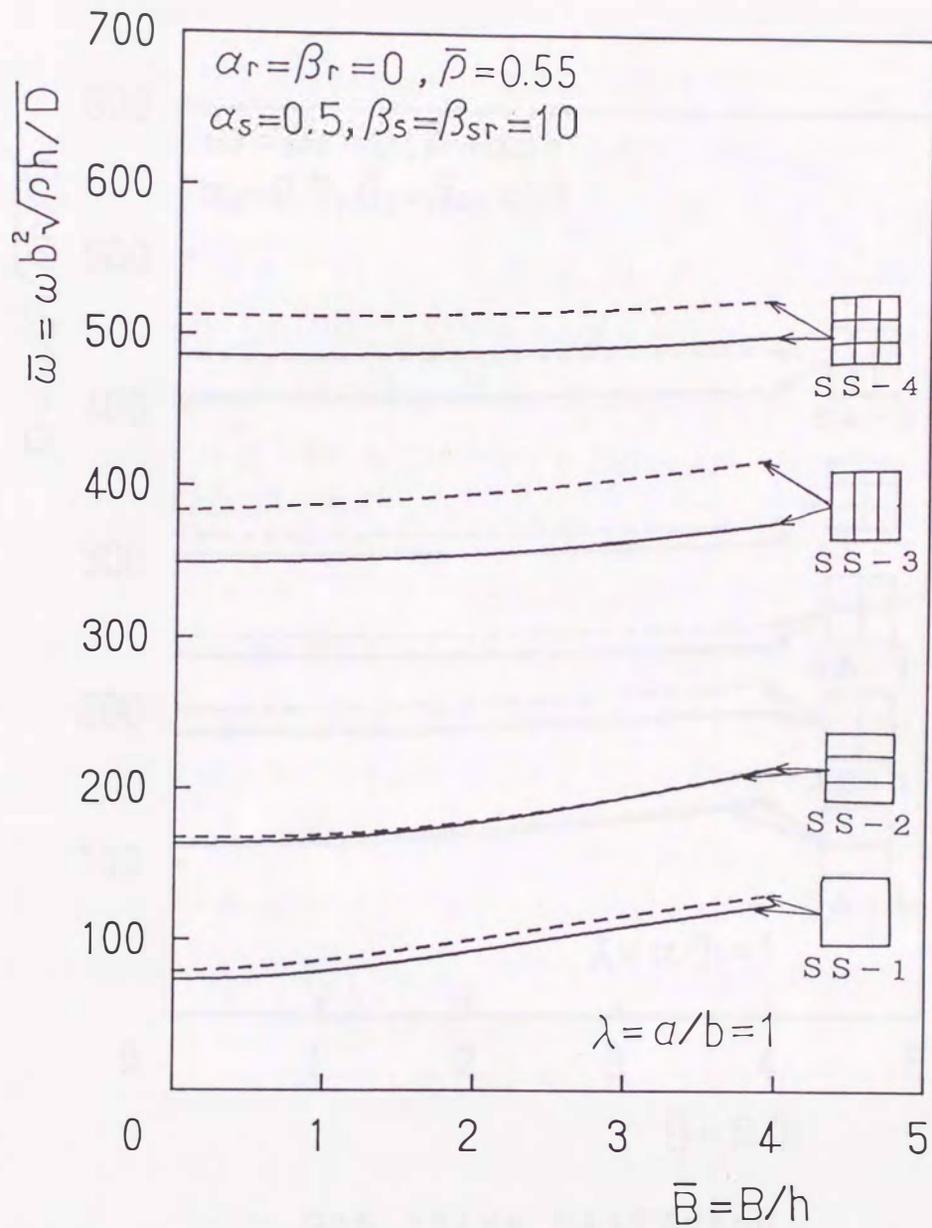
ードでは実験値が理論振動数よりも大きくなっている。また、図7.4と図7.5の剛性比の値が異なる二組の片面二方向補強板の場合をみると、両者とも両面対称補強板と同様にSS-3モードの実験値は初期たわみが大きくなると理論曲線よりもかなり高い振動数となっている。これは実験結果との比較における数値計算で、 $k_{13} = 1$ 、 $k_{31} = -1$ とおいて得られた図7.2の(b)図と(c)図の等変位曲線で示した形のモードの縮退を仮定したこと、および振動変位の式で採用した項数が9項と少なかったことに原因があるものと思われる。しかし、SS-3の場合を除けば実験値は理論曲線によく一致しており、特に基本振動(SS-1)の実験値は面内不動周辺の理論曲線上にある。

次に、図7.6と図7.7の一方向補強板の線形固有振動数と初期たわみの関係を見ると、剛性比の異なる二組の補強板のいずれのモードにおいても実験値は理論曲線とよく一致している。

以上のことから、非対称補強による面内伸びと曲げの連成を考慮して smeared out 法を適用した本研究の手法は、片面補強板の自由振動解析においても十分有効であることがわかる。

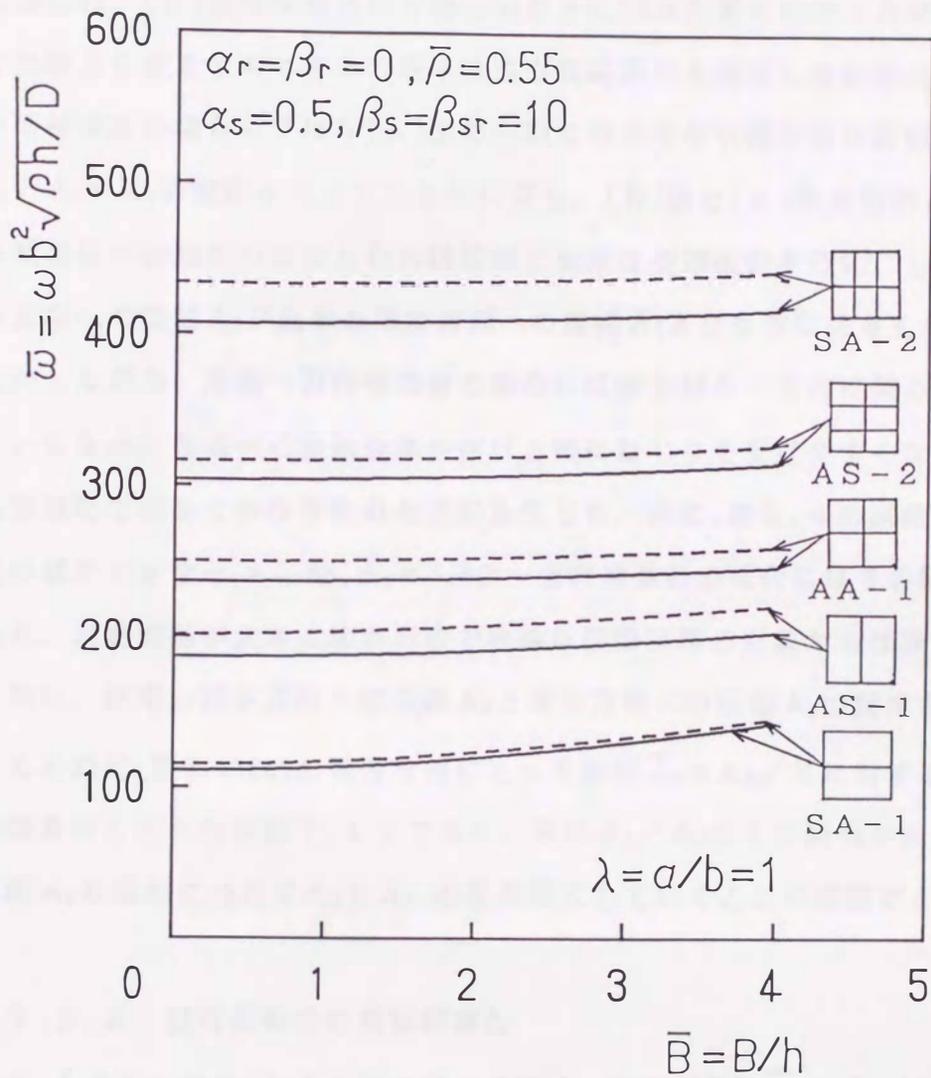
7.4 線形固有振動数に及ぼす偏心補強の影響

片面補強板の線形振動のモード方程式は式(7.5)で与えられ、その式の \bar{A}_{mn} の項の係数は両対称補強板のモード方程式(5.8)と比較すると、初期たわみ \bar{B} に比例した連成剛性 γ を含む ${}^1\kappa_{ij}$ の項だけ大きくなる。しかしながら、 \bar{A}_{mn} の係数の中で初期たわみがない $\bar{B} = 0$ の補強板の線形固有振動数を決定する h_{ij} と ${}^b h_{ij}$ (これは h_{ij} の中で非補強板の中央面から補強板断面の中立軸までの距離 \bar{c}_s , \bar{c}_r を0とおいた係数)の値は、付録IIIおよび式(3.15)の H_c, H_n, H_{cn} を一見してもどちらの補強板の場合が大きくなるかは簡単には判断できない。そこで、同じ値の質量比と剛性比をもつ片面一方向補強板と両対称一方向補強板の初期たわみ \bar{B} に対する線形固有振動数 $\bar{\omega}$ の変化を、面内不動周辺のSSモードの場合を例に上げて示したのが図7.8である。ただし、このような補強板の比較は、補強材断面の形状を変えて、両対称補強板の補強材2本一組の質量と断面積、および曲げ剛性とねじり剛性をもつ補強材を配置した片面補強板を考えれば可能となる。また図7.9は、同じ補強板の逆対称形を伴うモードの場合の計算結果である。これらの図をみると、節線が補強材を配置した水平方向のみに現れるSA-1とSS-2モードでは、偏心補強による線形固有振動数の値の変化はほとんど認められないが、補強材に垂直な方向に節線をもつモードでは、線形固有振動数の値は片面補強板の場合が両対称補強板の場合よりも偏心補強による面内伸びと曲げの連成のため高くなる。また、両者の間の線形固有振動数の差は補強材に垂直な方向の節線の数が多いモードほど大きくなる傾向にあり、特に計算した9種類のモードでは、補強材に垂直な方向に2本の節線をもつが、補強材方向には節線が現れないSS-3の場合が最も大きい。これは、片面補強板の場合が偏心補強による連成剛性のため、補強材の横振動時における曲げ剛性が見かけ上大きくなり、しかもその影響は補強材の振動波長が短いほど大きく表れるためと思われる。



..... One-Side Stiffened
 ($\gamma_s = 0.47, \gamma_{sr} = 1.3$)
 —— Both-Side Stiffened

図 7.8 線形振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ \bar{B} の関係
 (片面補強板と両対称補強板の比較, 面内不動周辺)



..... One-Side Stiffened
 ($\gamma_s = 0.47, \gamma_{sr} = 1.3$)
 ——— Both-Side Stiffened

図 7.9 線形振動数 $\bar{\omega}$ と初期たわみ \bar{B} の関係
 (片面補強板と両対称補強板の比較, 面内不動周辺)

7.5 非線形振動

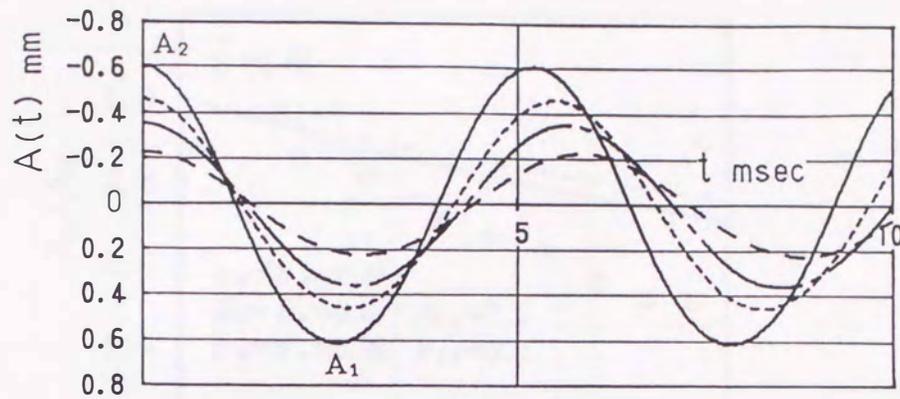
7.5.1 振動変位

図7.10の(a)図と(b)図は補強材が格子状に各20本と各10本配置された二方向補強板，(c)図は補強材がx軸方向のみに20本配置された一方向補強板について加振力を変えてそれぞれの板中央点の振動変位を測定した結果の一例である。片面補強板の場合もやはり(a)図の初期たわみのない補強板は振幅の大きさが等しい $A_1 = A_2$ の振動を行っているのに対し，(b)図と(c)図の初期たわみを有する補強板は初期たわみのたわみ線近傍で安定な周期振動を行い，しかも曲率の減少方向への振幅 A_2 が曲率の増加方向への振幅 A_1 よりも常に大きくなっている。しかしながら，片面一方向補強板の場合には補強材が一方向に偏心して配置されているため，振動中に非補強部が曲げと共にねじりを受けやすくなり，きれいな正弦波形ではなくかなり乱れた波形を生じた。特に，表4.4の試験片寸法で剛性比の値が大きな $\alpha_s = 0.58$ ， $\beta_s = 3.9$ の一方向補強板の場合にはその影響が大きく表れ，振動波形が大きく乱れたので非線形振動実験の対象からは除外した。

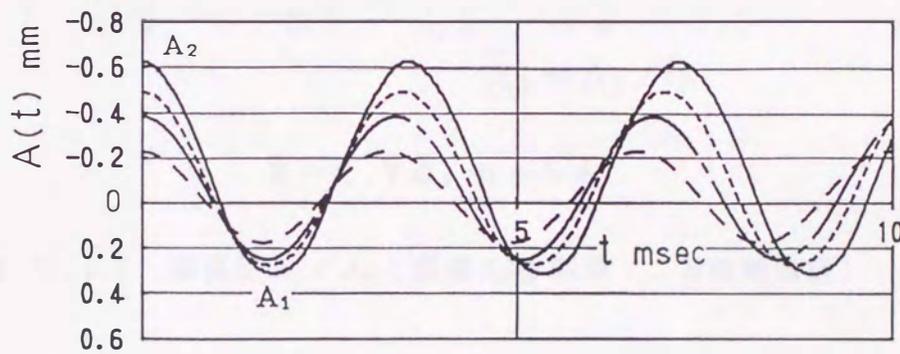
次に，曲率の減少方向への振幅 A_2 と増加方向への振幅 A_1 の関係をより明確にするために，図7.10(b)の場合を例にとって振幅 $\bar{A}_2 = A_2/h$ に対する A_1/A_2 の関係を示したものが図7.11であり，常に $A_1/A_2 \leq 1$ の関係が成立し，しかも振幅 A_2 の増加につれて A_2 と A_1 の差が増大していくことが確認できる。

7.5.2 固有振動数の振幅依存性

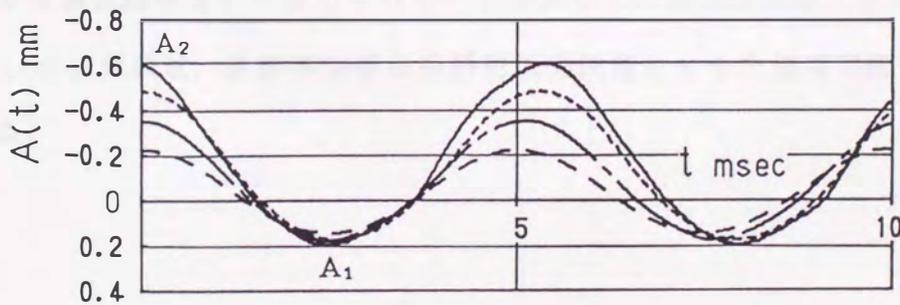
図7.12から図7.14までの3つの図は，無次元振幅 $\bar{A}_2 = A_2/h$ に対する振動数比 ω^*/ω の値を示したものである。これらの図をみると，片面補強板の場合もやはり初期たわみのない補強板の振動は，固有振動数 ω^* が振幅 \bar{A}_2 の増加につれて高くなる hardening spring type であり，しかも振動数の実験値は面内不動の理論曲線によく一致している。次に，初期たわみを有する場合には，実験を行った範囲の振幅では初期たわみのない場合とは異なり，振幅の増加につれて固有振動数は減少している。しかも振動数比 ω^*/ω と振幅 \bar{A}_2 の関係をみると，減



(a) 二方向補強板 ($\bar{B} = 0$, $n = 20$ 本)

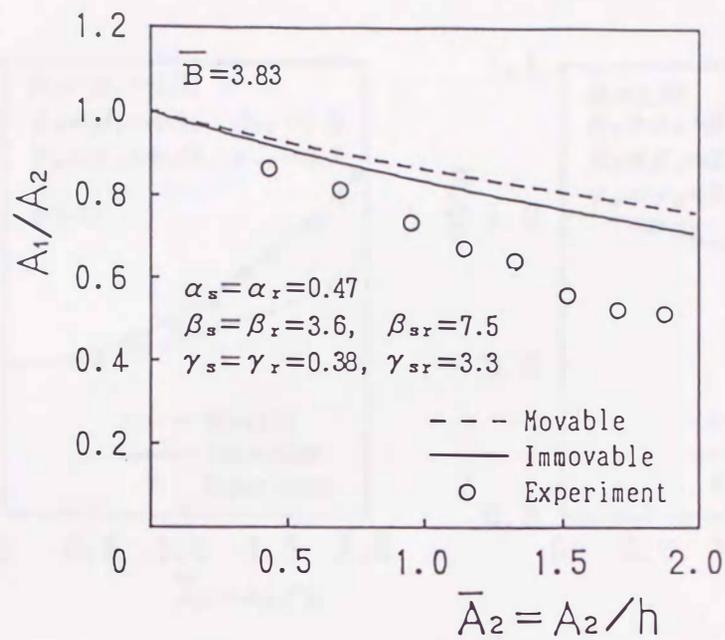


(b) 二方向補強板 ($\bar{B} = 3.83$, $n = 10$ 本)



(c) 一方向補強板 ($\bar{B} = 3.38$, $n = 20$ 本)

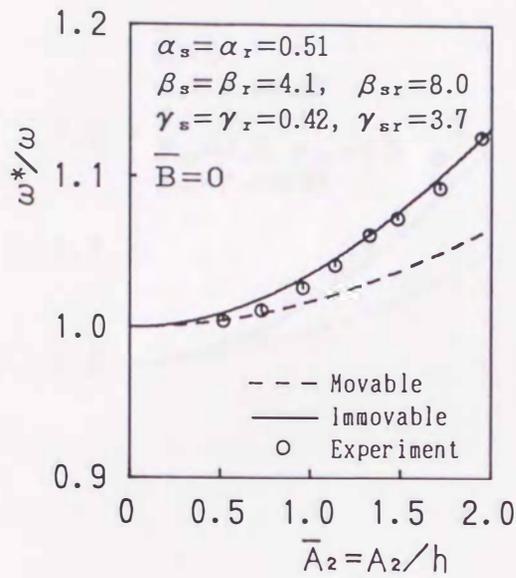
図 7.10 板中心点の振動変位 (一方向補強板)



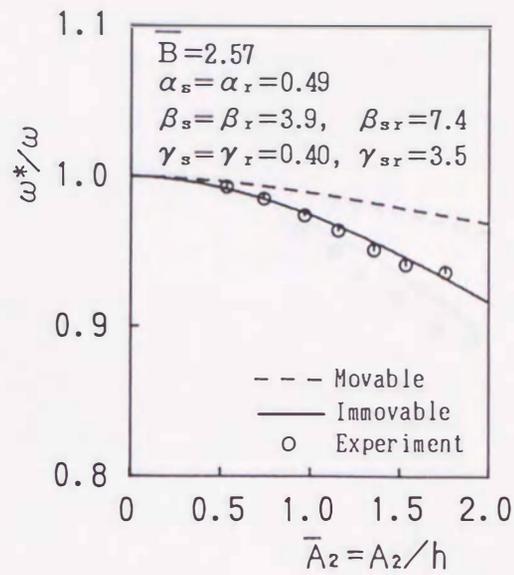
$\bar{B} = 3.70, n = 5$ 本

図 7.11 振幅比 A_1/A_2 と振幅 A_2 の関係 (二方向補強板)

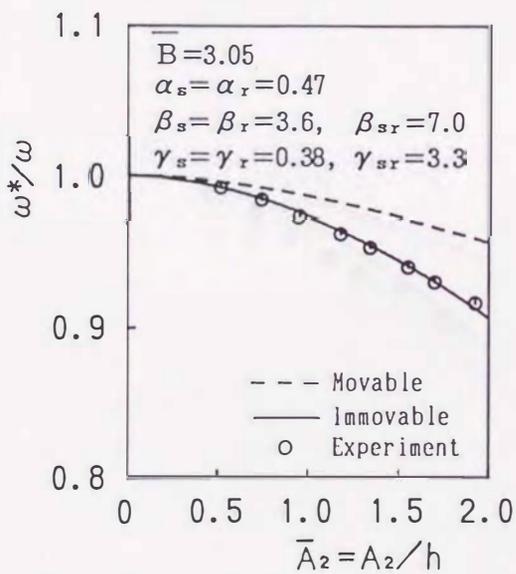
少傾向は実験値の方が理論曲線より幾分大きく表れているものの、実験値は面内不動周辺の理論曲線とよく一致している。したがって、逐次近似法で求めた振動数比 ω^*/ω の近似式は、片面補強板の非線形振動問題にも十分適用可能であることがわかる。



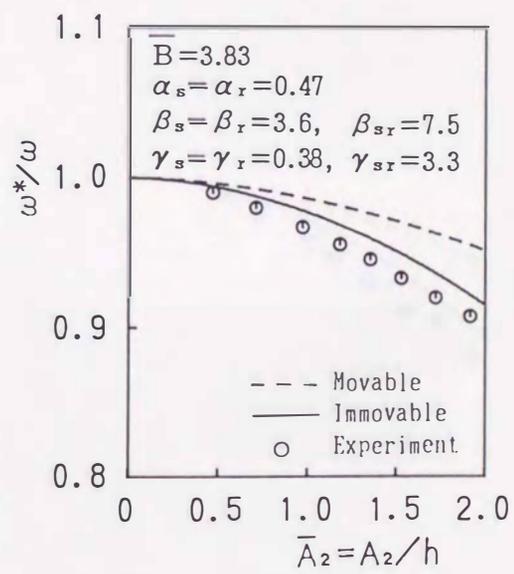
(a) $\bar{B} = 0$, $n = 20$ 本



(b) $\bar{B} = 2.57$, $n = 20$ 本

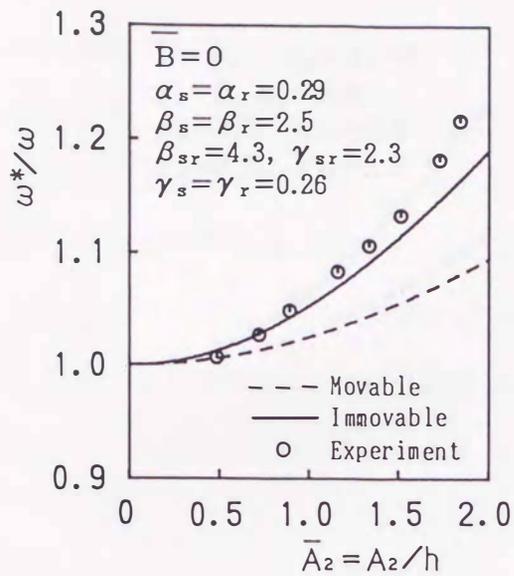


(c) $\bar{B} = 3.05$, $n = 20$ 本

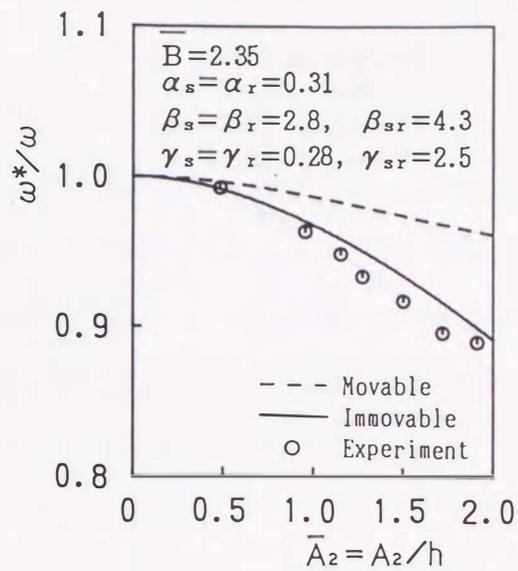


(d) $\bar{B} = 3.83$, $n = 10$ 本

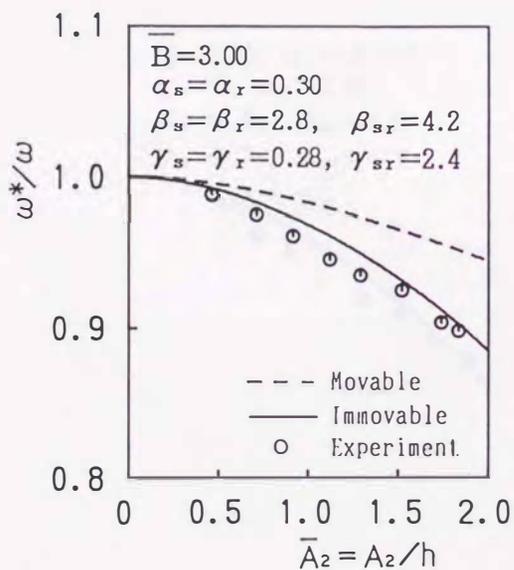
図 7.12 振動数比 ω^*/ω と振幅 \bar{A}_2 の関係 (二方向補強板)



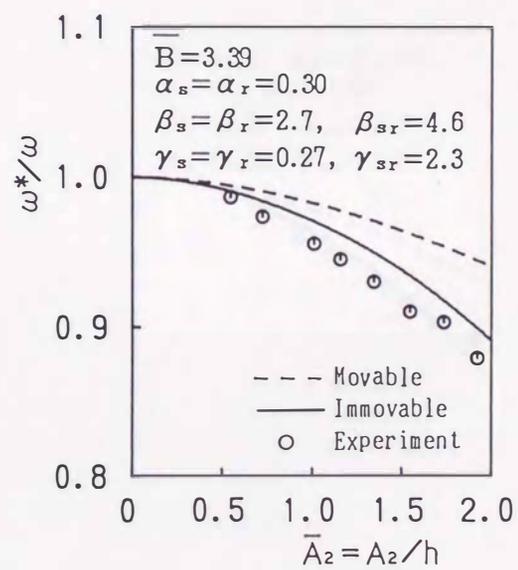
(a) $\bar{B} = 0$, $n = 10$ 本



(b) $\bar{B} = 2.35$, $n = 20$ 本

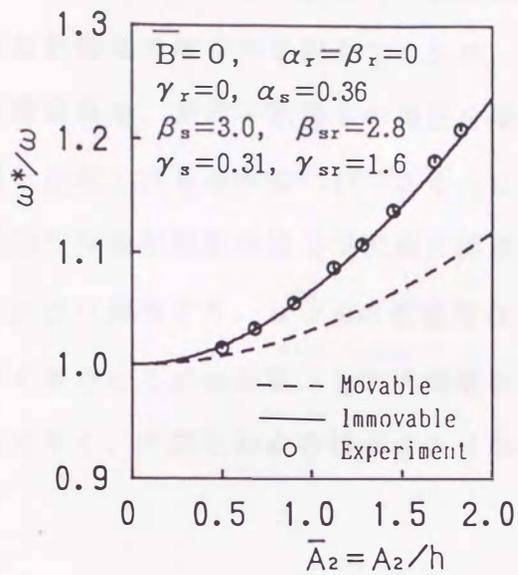


(c) $\bar{B} = 3.00$, $n = 20$ 本

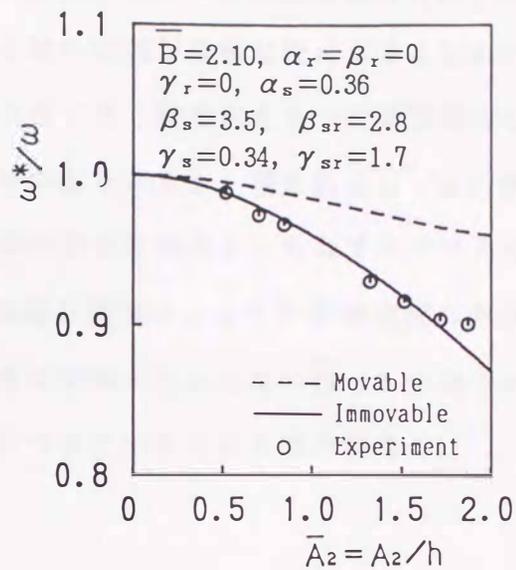


(d) $\bar{B} = 3.40$, $n = 10$ 本

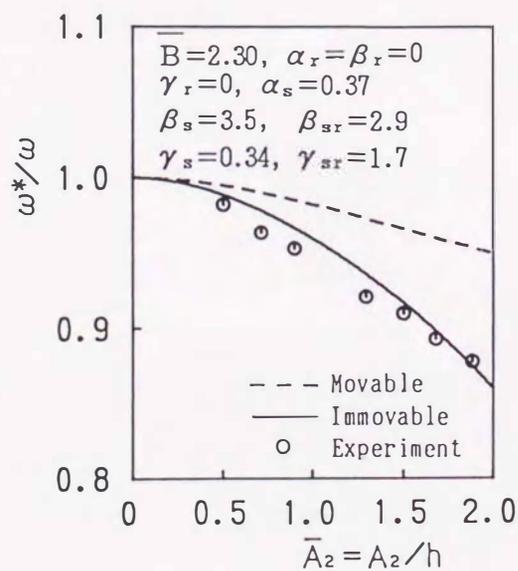
図 7.13 振動数比 ω^*/ω と振幅 \bar{A}_2 の関係 (二方向補強板)



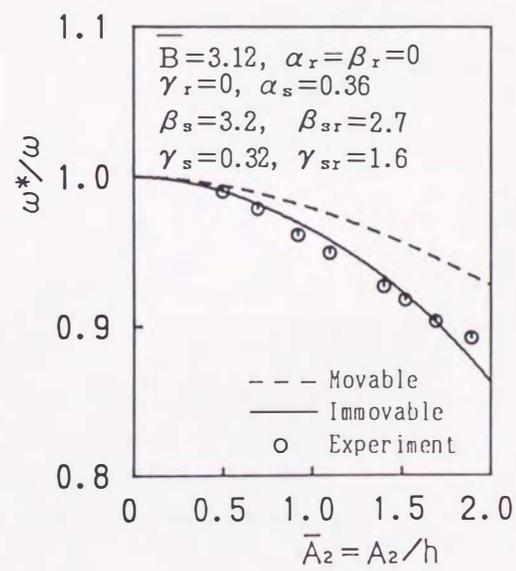
(a) $\bar{B} = 0$, $n = 10$ 本



(b) $\bar{B} = 2.10$, $n = 20$ 本



(c) $\bar{B} = 2.23$, $n = 20$ 本



(d) $\bar{B} = 3.12$, $n = 20$ 本

図 7.14 振動数比 ω^*/ω と振幅 \bar{A}_2 の関係 (一方向補強板)

7.6 固有振動数の振幅依存性に及ぼす偏心補強の影響

補強材を片面のみに配置した偏心補強が振動数比 ω^*/ω の振幅依存性にどのような影響を及ぼすかを調査するため、第6章の両対称補強板に対する図6.12の計算結果を、面内不動周辺の場合を取り上げて同じ剛性比をもつ片面補強板の結果と比較したものが図7.15である。これらの図をみると、振動数比 ω^*/ω の値は点線の片面補強板の場合が実線の両対称補強板の場合よりもわずかではあるが1に近い値をとり、 ω^*/ω の振幅依存性は偏心補強によって片面補強板の方が小さくなることがわかる。しかも両者の差異は初期たわみのない $\bar{B} = 0$ の場合が最も大きく、初期たわみの値が大きくなるにつれて小さくなる傾向にある。



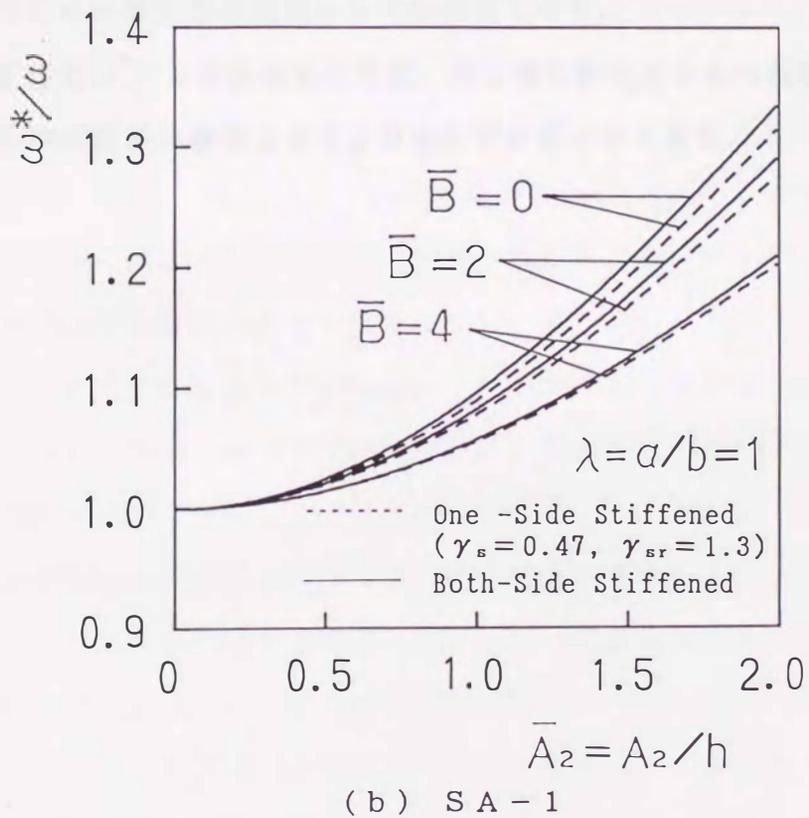
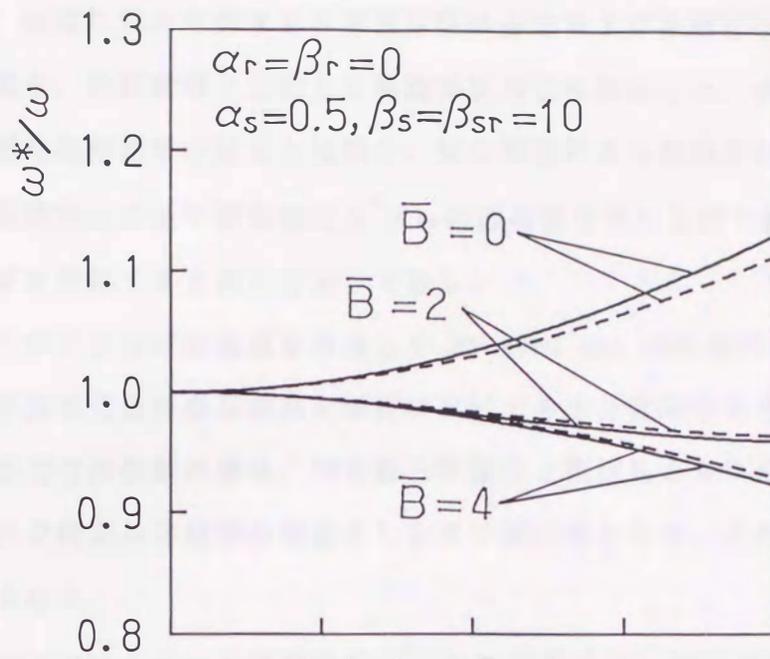


図 7.15 振動数比 ω^*/ω と振幅 A_2 の関係
 (片面補強版と両対称補強版の比較, 面内不動周辺)

7.7 結 言

本章では，初期たわみを有する片面補強板の線形および非線形振動について行った実験結果を，解析結果と比較して理論の妥当性を検証した．また，数値計算を行って両対称補強板の結果と比較し，偏心補強による面内伸びと曲げの連成が線形固有振動数 ω の値や振動数比 ω^*/ω の振幅依存性に及ぼす影響を検討した．得られた結果を要約すると次のとおりである．

(1) 面内伸びと曲げの連成を考慮して smeared out 法を適用した本論文の手法は，片面補強長方形板の自由振動解析においても十分有効である．

(2) 線形固有振動数の値は，同じ値の質量比と剛性比をもつ補強板では，片面補強の場合が両対称補強の場合よりも常に高い値となり，その差は振動モードによって異なる．

(3) 逐次近似法で求めた振動数比 ω^*/ω の近似式は，初期たわみを有する片面補強長方形板の非線形振動問題にも十分適用できる．

(4) 振動数比 ω^*/ω の振幅依存性は，同じ値の剛性比をもつ補強板では，片面補強の場合が両対称補強の場合よりもわずかに小さくなる．

第 8 章 結 論

軽量で剛性の高い補強薄板構造の基本構造要素である補強長方形板が，初期たわみを有する場合の線形および大振幅非線形の自由振動を研究した．曲げと面内伸びの連成を考慮して，初期たわみを有する非対称補強長方形板の自由振動問題を定式化し，その基礎方程式に基づいて線形振動特性や固有振動数の振幅依存性を考察するための理論解析を行い，理論結果の妥当性の検証のための振動実験を行った．得られた成果を要約すると以下のとおりである．

まず，非補強板の両面に板中央面に関して対称に配置された補強材をもつ両面対称補強板と片面のみに補強材を有する片面補強板の，両者の自由振動問題を同時に取り扱うため，非補強板の上面と下面とでは剛性の異なる補強材を配置した非対称直交補強板を取り上げた．この直交補強板を，smeared out 法により，補強材 1 ピッチ間の補強板断面の図心を通る軸を中立軸とし，しかも非補強板の各剛性に補強材の剛性を平均化して付加した相当剛性をもつ直交異方性板に置き換え，非対称補強による曲げと面内伸びの連成剛性を考慮した補強長方形板の構成方程式を求めた．そして Hamilton の原理を用いて，微小初期たわみを有する補強長方形板の非線形振動に対する運動方程式と境界条件を同時に求め，得られた運動方程式が大たわみ変形の影響を考慮した力とモーメントの釣合式から直接求められる式と一致することを述べた．さらに，平面弾性問題で用いられる応力関数を導入し，運動方程式とひずみの適合条件式を振動変位と応力関数を用いて無次元の連立偏微分方程式で表した．

次に，振動変位を周辺固定の面外境界条件を満足する多項モードの形で近似し，この振動変位と与えられた形状の初期たわみ，および適合条件式より得られた応力関数を運動方程式に代入し，Galerkin 法を適用して多自由度系の連立非線形常微分方程式の形のモード方程式を導いた．そしてこのモード方程式から，初期たわみを有する補強長方形板の自由振動特性は，補強材の伸び剛性を板のそれで割った伸び剛性比や同様な曲げ剛性比，ねじり剛性比，質量比，および無次元連成剛性の補強材パラメータと，初期たわみの大きさ，面内境界条件とに依存するこ

とを明らかにした。さらに非線形振動問題に対しては、モード方程式を1項モード近似による1自由度系の非線形常微分方程式に変換し、逐次近似法を使用して振動変位、および線形固有振動数に対する非線形固有振動数の比を振幅のべき級数の形で表し、この近似式から得られる振動波形が Runge-Kutta-Gill 法による計算結果と振幅、周期共に非常によく一致することを示し、振動変位と振動数比の近似式の妥当性を裏付けた。

実験はスピーカによる音響加振法で、線形振動については9種類のモードに対して、非線形振動については基本振動に対して行った。浅い曲面を有する補強正方形板試験片は、タフピッチ銅板をフォトエッチングにより腐食させ、それを理論解析で用いた初期たわみ曲面をもつ金型に挟んで電気炉内で加熱して製作したが、得られた試験片の初期たわみ形状はかなり正確なものであることを述べた。この補強曲面の固有振動モードは、レーザ・ホログラフィの時間平均法で測定した。また、薄板の線形固有振動数と固有振動モードを測定して理論結果と比較し、試験片取付枠に挟まれた試験片が全周辺固定の面外境界条件を満足していることを示すと同時に、面内境界条件は不動周辺に近い状態にあることを明らかにした。

次に、両対称補強板の線形振動特性を明らかにし、9項モード近似を用いた線形固有振動数と固有振動モードの理論結果は補強材本数に関係なく実験結果とよく一致し、理論解析で使用した smeared out 法が初期たわみを有する両対称補強板の自由振動問題に対する有効な手法となることを述べた。また、全く同じ補強材を格子状に配置した二方向補強正方形板ではモードの縮退が生じることを確認し、一方向補強による直交異方性が固有振動モードに及ぼす影響は、対称な SS モードにおいて初期たわみが大きくなると顕著に現れるが、板中心軸に関して逆対称な形を伴う SA, AS, AA モードでは、初期たわみの大きさが固有振動モードに及ぼす影響は小さいことを明らかにした。線形固有振動数は初期たわみが大きな補強板ほど高くなり、その増加の割合は振動モードによって異なることを述べ、補強材と板の質量比が小さく、伸び剛性比、曲げ剛性比およびねじり剛性比が大きな補強板ほど高くなることを明らかにした。また線形固有振動数は、

逆対称な形を伴う SA, AS, AA モードでは今回採用した面内境界条件とは無関係となるが, 対称な SS モードでは面内不動周辺の場合が面内可動周辺の場合よりも常に高い値となることを述べた。

両面对称補強板の基本振動について, 非線形振動実験を行ってその振動特性を調べ, 解析結果と比較して理論の妥当性を検証した。まず, 初期たわみのたわみ線から曲率の減少する方向への振幅は曲率の増加する方向への振幅よりも常に大きく, その差は初期たわみの増加につれて大きくなり, しかも振幅の増加によっても大きくなることを明らかにした。また, 非線形固有振動数 ω^* を線形固有振動数 ω で割った振動数比 ω^*/ω を, 曲率の減少する方向への振幅のべき級数の形で表した近似式は実験結果とよく一致し, この逐次近似法で求めた ω^*/ω の近似式が初期たわみを有する補強長方形板の非線形振動問題に十分適用可能であることを述べた。そして基本振動数は, 初期たわみが小さい場合には振幅の増加とともに高くなるが, 初期たわみが大きくなると逆に振幅の増加につれて低下することを示した。次に, 数値計算を行って, 振動モードや剛性比が振動数比 ω^*/ω の振幅依存性に及ぼす影響を検討した。そして, 板の中心軸に関して逆対称な形を伴う SA, AS, AA モードの振動は, 常に固有振動数が振幅の増加につれて高くなる hardening spring type となり, しかも振動数比 ω^*/ω の振幅依存性は初期たわみの値が小さな補強板ほど大きくなることを明らかにした。振動数比 ω^*/ω の値は質量比には無関係で, 伸び剛性比にはほとんど無関係となり, この ω^*/ω の振幅依存性は曲げ剛性比とねじり剛性比が大きな補強板ほど小さくなることを示した。また, 振動数比 ω^*/ω の値は面内不動周辺の場合には振幅や初期たわみの大きさによって大きく変化するが, 面内可動周辺の場合にはあまり変化せず, 1 に近い値をとることを述べた。

最後に, 片面補強板の線形および非線形の振動特性を理論と実験の両面から調査し, 偏心補強による曲げと面内伸びの連成が線形固有振動数 ω の値や振動数比 ω^*/ω の振幅依存性に及ぼす影響を検討した。その結果, 曲げと面内伸びの連成を考慮して smeared out 法を適用した本論文の手法は, 片面補強長方形板の自由

振動解析においても十分有効であり,さらに逐次近似法で求めた振動数比 ω^*/ω の近似式は初期たわみを有する片面補強長方形板の非線形振動問題にも適用可能であることが確認できた. また線形固有振動数の値は, 同じ値の質量比と剛性比をもつ補強板では, 片面補強の場合が両対称補強の場合よりも常に高い値となることを明らかにした. 振動数比 ω^*/ω の振幅依存性は, 同じ値の剛性比をもつ補強板では, 片面補強の場合が両対称補強の場合よりもわずかに小さくなることを述べた.

謝 辞

本研究を行うにあたり、終始御鞭撻、御指導を賜りました九州大学工学部航空工学科 角 誠之助 教授に深甚なる謝意を表します。

また、本論文をまとめるにあたって有益な御助言を賜りました九州大学工学部造船学科 大高 勝夫 教授、動力機械工学科 田村 英之 教授ならびに航空工学科 久能 和夫 教授に心からお礼申し上げます。

著者が本研究を遂行するにあたり、温かい激励と御援助をいただきました鹿児島大学工学部機械工学科 桐岡 健 教授と戸谷 眞之 助教授、ならびに貴重な意見をいただいた九州大学工学部航空工学科 室園 昌彦 助教授と山崎 正秀 助手に深く感謝の意を表します。

本研究に使用した実験装置の設計製作や基礎実験に関して、鹿児島大学大学院工学研究科在学中に御協力いただいた児玉 克 氏、中村 竜三 氏、豊丸 俊和 氏に感謝いたします。また、鹿児島大学工学部中央実験工場の皆様には試験片取付枠や金型の製作において、多大の御協力と御援助いただきました。厚くお礼申し上げます。

最後に、九州大学工学部航空工学科卒業生 林 裕二 氏ならびに鹿児島大学工学部機械工学科卒業生 西原 昭彦 氏にはレーザ・ホログラフィの実験に際し御協力いただきました。ここに記して感謝いたします。

参考文献

- 1) 栖原 二郎：平面板の自由振動および強制振動に及ぼす防撓材の影響について，造船協会会報，No.78 (1947)，pp.65-76.
- 2) C.S.Smith：Bending, Buckling and Vibration of Orthotropic Plate-Beam Structures, Journal of Ship Reseach, Vol.12 (1968), pp.249-268.
- 3) 清水 茂俊，佐藤 正視：防撓板の振動時における応力分布（第1報），日本造船学会論文集，No.123 (1968)，pp.224-243.
- 4) C.A.Mercer and Miss C.Seavey：Prediction of Natural Frequencies and Normal Modes of Skin-Stringer Panel Rows, Journal of Sound and Vibration, Vol.6, No.1 (1967), pp.149-162.
- 5) Y.K.Lin and B.K.Donaldson：A Brief Survey of Transfer Matrix Techniques with Special Reference to the Aanalysis of Aircraft Panels, Journal of Sound and Vibration, Vol.10, No.1 (1969), pp.103-143.
- 6) 斎藤 秀雄，山口 秀谷：粘弾性ばりを有する長方形弾性平板の振動，日本機械学会論文集（C編），Vol.46, No.403 (1980)，pp.237-244.
- 7) B.R.Long：Vibration of Eccentrically Stiffened Plates, Shock Vib. Bull., Vol.38 (1968), pp.44-52.
- 8) B.R.Long：A Stiffness-Type Analysis of the Vibration of a Class of Stiffened Plate, Journal of Sound and Vibration, Vol.16, No.3(1971), pp.323-335.
- 9) T.J.McDaniel and K.B.Eversole：A Combined Finite Element-Transfer Matrix Structural Analysis Method, Journal of Sound and Vibration, Vol.51, No.2 (1977), pp.157-169.
- 10) 樋口 道之助：防撓矩形板の自由振動について，造船協会論文集，No.88 (1950)，pp.135-143.
- 11) 樋口 道之助：電子計算機による防撓矩形板の固有振動数の計算（その1），造船協会論文集，No.120 (1966)，pp196-206.

- 12) 川上 益男 : 局部振動について, 造船協会誌, No.410 (1963), pp.391-403.
- 13) C.D.Michalopoulos and L.T.Wheeler: Deflection Analysis of Rectangular Plates Reinforced by Pretensioned Stiffeners, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.42 (1975), pp.901-903.
- 14) J.W.Nicholson : Free Vibration of Stiffened Rectangular Plates Using Green's Functions and Integral Equations, AIAA Journal, Vol.24, No.3 (1986), pp.485-491.
- 15) 大富 浩一 : 多数の補強はりをもつ長方形板の振動ならびに座屈問題, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.50, No.456 (1984), pp.1381-1389.
- 16) K.Ohtomi : Free Vibration of Rectangular Plates Stiffened with Viscoelastic Beams, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.52 (1985), pp.397-401.
- 17) C.L.Kirk : Vibration Characteristics of Stiffened Plates, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.2, No.3 (1960), pp.242-253.
- 18) C.L.Kirk : Vibration of Centrally Stiffened Rectangular Plates, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol.65(1961), pp.695-697.
- 19) C.L.Kirk : Natural Frequencies of Stiffened Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.13, No.4 (1970), pp.375-388.
- 20) S.Mahalingam : Vibrations of Stiffened Rectangular Plate, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol.67 (1963), pp.305-307.
- 21) S.Mahalingam : Flexural Vibration of Rectangular Plates with Stiffeners Parallel to the Edges, Journal of the Royal Aeronautical Society, Vol.67 (1963), pp.664-668.
- 22) R.B.Bhat : Letters to the Editor (Vibrations of Panels with Non-Uniformly Spaced Stiffeners), Journal of Sound and Vibration, Vol.84, No.3 (1982), pp.449-452.
- 23) T.Mizusawa, T.Kajita and M.Naruoka : Vibration of Stiffened Skew Plates by Using B-Spline Functions, Computers and Structures,

- Vol.10 (1979), pp.821-826.
- 24) P.A.A.Laura and R.H.Gutierrez : A Note on Transverse Vibrations of Stiffened Rectangular Plates with Edges Elastically Restrained Against Rotation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.78, No.1(1981), pp.139-144.
- 25) N.F.Madsen : Vibrations of Orthogonally Stiffened Panels, *Journal of Ship Research*, Vol.22, No.2 (1978), pp.100-109.
- 26) 道本 順一, 広渡 智雪, 村上 真一 : 防撓曲面板の振動について, *日本造船学会論文集*, No.154 (1983), pp329-336.
- 27) T.Wah : Vibration of Stiffened Plates, *The Aeronautical Quarterly*, Vol.15 (1964), pp.285-298.
- 28) G.Aksu and R.Ali : Determination of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates with Cutouts Using a Finite Difference Formulation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.44, No.1 (1976), pp.147-158.
- 29) G.Aksu : Free Vibration Analysis of Cross Stiffened Rectangular Plates, *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, Vol.9, No.2(1976), pp.209-226.
- 30) G.Aksu : Free Vibration Analysis of Stiffened Plates by Including the Effect of Inplane Inertia, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol.49 (1982), pp.206-212.
- 31) R.N.Yurkovich, J.H.Schmidt and A.R.Zak:Dynamic Analysis of Stiffened Panel Structures, *Journal of Aircraft*, Vol.8, No.3 (1971), pp.149-155.
- 32) M.D.Olson and G.M.Lindberg : Jet Noise Excitation of an Integrally Stiffened Panel, *Journal of Aircraft*, Vol.8, No.1 (1971), pp.847-855.
- 33) M.D.Olson : A Consistent Finite Element Method for Random Response Problems, *Computers and Structures*, Vol.2 (1972), pp.163-180.

- 34) M.D.Olson and C.R.Hazell : Vibration Studies on Some Integral Rib-Stiffened Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.50, No.1(1977), pp.43-61.
- 35) M.N.Bapu Rao, P.Guruswamy, M.Venkateshwara Rao and S.Pavithran : Studies on Vibration of Some Rib-Stiffened Cantilever Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.57, No.3 (1978), pp.389-402.
- 36) C.K.Ramesh and R.M.Belkune : Free Vibrations of Plate-Beam Systems, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, University of Tokyo Press, (1973), pp.357-370.
- 37) B.P.Shastry and G.Venkateswara Rao : Vibrations of Thin Rectangular Plates with Arbitrarily Oriented Stiffeners, Computers and Structures, Vol.7 (1977), pp.627-629.
- 38) R.M.Orris and M.Petyt : Random Response of Periodic Structures by a Finite Element Technique, Journal of Sound and Vibration, Vol.43, No.1 (1975), pp.1-8.
- 39) P.S.Nair and M.S.Rao : On Vibration of Plates with Varying Stiffener Length, Journal of Sound and Vibration, Vol.95, No.1(1984), pp.19-29.
- 40) A.Mukherjee and M.Mukhopadhyay : Finite Element Free Vibration of Eccentrically Stiffened Plates, Computers and Structures, Vol.30, No.6 (1988), pp.1303-1317.
- 41) 福地 信義 : 有限帯板法による防撓曲面板構造の解析, 日本造船学会論文集, No.135 (1974), pp.283-291.
- 42) 福地 信義 : 有限帯板法による防撓曲面板構造の解析(続報), 日本造船学会論文集, No.137 (1975), pp.332-340.
- 43) M.Petyt : Finite Strip Analysis of Flat Skin-Stringer Structures, Journal of Sound and Vibration, Vol.54, No.4 (1977), pp.537-547.
- 44) 道本 順一 : 防撓曲面板の固有振動について - 有限帯板法による計算 -, 西部造船会会報, No.79 (1989), pp.113-124.

- 45) W.H.Hoppmann,II : Bending of Orthogonally Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.22(1955), pp.267-271.
- 46) W.H.Hoppmann,II, N.J.Huffington and L.S.Magness : A Study of Orthogonally Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.23 (1956), pp.343-350.
- 47) W.H.Hoppmann,II and L.S.Magness : Nodal Patterns of the Free Flexural Vibrations of Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.24 (1957), pp.526-530.
- 48) N.J.Huffington : Theoretical Determination of Rigidity Properties of Orthogonally Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.23 (1956), pp.15-20.
- 49) R.L.Thorkildsen and W.H.Hoppmann : Effect of Rotatory Inertia on the Frequencies of Vibration of Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.26 (1959), pp.298-300.
- 50) W.G.Soper : Large Deflection of Stiffened Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.25 (1958), pp.444-448.
- 51) M.Naruoka and H.Yonezawa : A Study on the Period of the Free Lateral Vibration of the Beam Bridge by the Theory of the Orthotropic Rectangular Plate, Ingenieur-Archiv, Vol.26 (1958), pp.20-29.
- 52) H.Yonezawa : Moments and Free Vibrations in Curved Girder Bridges, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.88 (1962), pp.1-21.
- 53) C.P.Heins and R.L.Hailes : Behavior of Stiffened curved Plate Model, Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Vol.95 (1969), pp.2353-2370.
- 54) 成岡 昌夫, 大村 裕, 中川 建治, 山口 富夫 : 直格子斜桁橋の固有振動数に関する研究, 土木学会論文集, No.139 (1967), pp.1-8.

- 55) S.F.Ng and G.G.Kulkarni : On the Transverse Free Vibrations of Beam-Slab Type Highway Bridges, Journal of Sound and Vibration, Vol.21, No.3 (1972), pp.249-261.
- 56) S.S.Dey and N.Balasubramanian: Dynamic Response of Orthotropic Curved Bridge Decks Due to Moving Loads, Computers and Structures, Vol.18, No.1 (1984), pp.27-32.
- 57) M.Baruch and J.Singer : Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells Under Hydrostatic Pressure, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.5, No.1 (1963), pp.23-27.
- 58) J.Singer, M.Baruch and O.Harari : On the Stability of Eccentrically Stiffened Cylindrical Shells Under Axial Compression, International Journal of Solids and Structures, Vol.3 (1967), pp.445-470.
- 59) A.Rosen and J.Singer : Vibrations of Axially Loaded Stiffened Cylindrical Shells, Journal of Sound and Vibration, Vol.34, No.3 (1974), pp.357-378.
- 60) J.Singer and J.Prucz: Influence of Initial Geometrical Imperfections on Vibrations of Axially Compressed Stiffened Cylindrical Shells, Journal of Sound and Vibration, Vol.80, No.1 (1982), pp.117-143.
- 61) J.A.McElman, M.M.Mikulas and M.Stein : Static and Dynamic Effects of Eccentric Stiffening of Plates and Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol.4, No.5 (1966), pp.887-894.
- 62) R.S.Srinivasan and S.V.Ramachandran : Linear and Nonlinear Analysis of Stiffened Plates, International Journal of Solids and Structures, Vol.13 (1977), pp.897-912.
- 63) R.S.Srinivasan and V.Thiruvengkatachari : Static and Dynamic Analysis of Stiffened Plates, Computers and Structures, Vol.21, No.3 (1985), pp.395-403.

- 64) G.Prathap and T.K.Varadan : Large Amplitude Flexural Vibration of Stiffened Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.57, No.4(1978), pp.583-593.
- 65) 角 誠之助・有富 正男・桐岡 健：初期たわみを有する補強長方形板の非線形自由振動，（第1報）周辺単純支持板の理論解析，日本航空宇宙学会誌，Vol.36, No.416 (1988), pp.418-426.
- 66) 角 誠之助・有富 正男・竹内 健典：初期たわみを有する補強長方形板の非線形自由振動，（第2報）周辺固定板の理論解析，日本航空宇宙学会誌，Vol.38, No.439 (1990), pp.405-413.
- 67) 角 誠之助・有富 正男・桐岡 健：初期たわみを有する補強長方形板の非線形自由振動，（第3報）実験，日本航空宇宙学会誌，Vol.38, No.443 (1990), pp.660-668.
- 68) S.Sumii and M.Aritomi : Vibration Characteristics of Stiffened Rectangular Plates with an Initial Curvature, Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences , Vol.34, No.104 (1991), pp.71-87.
- 69) T.von Kármán : Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopadie der Mathematischen Wissenschaften, Vol.4, No.4 (1910), Chap.27, pp.311-385.
- 70) H.M.Berger : A New Approach to the Analysis of Large Deflections of Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.22 (1955), pp.465-472.
- 71) J.L.Nowinski and H.Ohnabe : On Certain Inconsistencies in Berger Equations for Large Deflections of Plastic Plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.14 (1972), pp.165-170.
- 72) C.P.Vendhan : A Study of Berger Equations Applied to Non-Linear Vibrations of Elastic Plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.17 (1975), pp.461-468.

- 73) Y.C.Fung, (大橋 義夫, 村上 澄男, 神谷 紀生 共訳) : 固体の力学 / 理論, (1974), pp.470-477, 培風館.
- 74) K.Marguerre : Zur Theorie der Gekrümmten Platte Grosser Formänderung, Proc. 5th Int. Cong. Appl. Mech. (1938), pp.93-101.
- 75) C.T.Wang, (猪瀬 寧雄 訳) : 応用弾性学, (1971), pp.91-96, 森北出版.
- 76) I.H.Shames and C.L.Dym, (砂川 恵 監訳) : 材料力学と変分法, (1977), pp.263-266, ブレイン図書出版.
- 77) N.Yamaki : Influence of Large Amplitudes on Flexural Vibrations of Elastic Plates, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol.41 (1961), pp.501-510.
- 78) 安田 仁彦, 浅野 武 : 縮退した振動モードをもつ長方形膜の非線形強制振動, 日本機械学会論文集 (C編), Vol.52, No.473 (1986), pp.62-69.
- 79) 林 毅 編 : 軽構造の理論とその応用, 上巻 (1966), pp.436-443, 日本科学技術連盟.
- 80) 榎木 義一 : 非線型振動論, (1959), pp.12-16, 共立出版.
- 81) 安井 淳 : 薄肉の長方形曲板の振動特性の研究, 日本機械学会論文集, Vol.38, No.316 (1972), pp.3119-3128.
- 82) I.G.Phillips and J.E.M.Jubb : The Effect of Distortion on the Lowest Natural Frequency of a Rectangular Steel Plate, Journal of Sound and Vibration, Vol.33, No.1 (1974), pp.41-48.
- 83) 鶴戸口 英善 : 弾性学, (1975), pp.65-73, 共立出版.
- 84) 角 誠之助 : 構造強度解析におけるレーザの応用, 日本航空宇宙学会誌, Vol.25, No.281 (1977), pp.259-268.
- 85) 西村源六郎 : 振動工学, (1969), pp.16-20, 誠文堂新光社.
- 86) 戸田 盛和, 渡辺 慎介 : 非線形力学, (1984), pp.79-82, 共立出版.
- 87) 坪井 忠二 : 振動論 (復刻版), (1976), pp.434-441, 現代工学社.
- 88) 林 毅 編 : 軽構造の理論とその応用, 上巻 (1966), pp.424-425, 日本科学技術連盟.

- 89) G.Herrmann : Influence of Large Amplitudes on Flexural Motions of Elastic Plates, National Advisory Committee for Aeronautics Technical Note 3578, (1956), pp.1-45.
- 90) H.N.Chu and G.Herrmann : Influence of Large Amplitudes on Free Flexural Vibrations of Rectangular Elastic Plates, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.23 (1956), pp.532-540.
- 91) 文献 77) と同じ.
- 92) H.F.Bauer : Nonlinear Response of Elastic Plates to Pulse Excitations, Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol.35 (1968), PP.47-52.
- 93) 八巻 昇, 永井 健一 : 一様分布周期横荷重をうける長方形板の非線形曲げ振動, 日本機械学会論文集, Vol.39, No.327 (1973), pp.3334-3341.
- 94) G.Prathap and T.K.Varadan : On the Non-Linear Vibrations of Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.56, No.4 (1978), pp.521-530.
- 95) J.L.Nowinski : Large-Amplitude Oscillations of Oblique Panels with an Initial Curvature, AIAA Journal, Vol.2, No.6 (1964), pp.1025-1031.
- 96) Z.Celep : Free Flexural Vibration of Initially Imperfect Thin Plates with Large Elastic Amplitudes, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol.56 (1976), pp.423-428.
- 97) 八巻 昇, 千葉 正克 : 初期たわみ, 初期面内応力を有するく形板の非線形曲げ振動 (第1報, 理論), 日本機械学会論文集 (C編), Vol.48, No.435 (1982), pp.1687-1694.
- 98) M.Sathyamoorthy and K.A.V.Pandalai : Nonlinear Flexural Vibrations of Orthotropic Rectangular Plates, Journal of the Aeronautical Society of India, Vol.22, No.4 (1970), pp.264-266.
- 99) M.K.Prabhakara and C.Y.Chia : Non-linear Flexural Vibrations of Orthotropic Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration,

- Vol.52, No.4 (1977), pp.511-518.
- 100) B.Banerjee : Large Amplitude Vibrations of a Clamped Orthotropic Square Plate Carrying a Concentrated Mass, Journal of Sound and Vibration, Vol.82, No.3 (1982), pp.329-333.
- 101) H.Eslami and O.A.Kandil: Nonlinear Forced Vibration of Orthotropic Rectangular Plates Using the Method of Multiple Scales, AIAA Journal, Vol.27, No.7 (1989), pp.955-960.
- 102) T.Wah : Large Amplitude Flexural Vibration of Rectangular Plates, International Journal of Mechanical Sciences, Vol.5 (1963), pp.425-438.
- 103) J.Mazumdar and R.Jones: A Simplified Approach to the Large Amplitude Vibration of Plates and Membranes, Journal of Sound and Vibration, Vol.50, No.3 (1977), pp.389-397.
- 104) M.M.Banerjee : On the Analysis of Large Amplitude Vibrations of Non-Uniform Rectangular Plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.58, No.4 (1978), pp.545-553.
- 105) A.P.Chauhan and D.G.Ashwell : On the Low-Frequency Drumming of Slightly Bowed Structures, Journal of Sound and Vibration, Vol.14, No.4 (1971), pp.475-489.
- 106) 文献 82) と同じ.
- 107) 八巻 昇, 大友 規矩雄, 千葉 正克 : 初期たわみ, 初期面内応力を有するく形板の非線形曲げ振動 (第2報, 実験), 日本機械学会論文集 (C編), Vol.48, No.435 (1982), pp.1695-1702.

[付録 I] 応力関数 (3.28) 中の係数 a_{pq} , c_{uv}

応力関数 (3.28) 中の係数 a_{pq} と c_{uv} を次の付表 1 と付表 2 に示す.

付表 1 応力関数 (3.28) 中の係数 a_{pq}

q \ p	m-3	m-1	m+1	m+3
n-3	$-(m-n)^2$	$(m-n-2)^2 + 2(m-1)^2$	$-(m+n-2)^2 - 2(m+1)^2$	$(m+n)^2$
n-1	$(m-n-2)^2 + 2(n-1)^2$	$-(m-n)^2 - 2\{(m-1)^2 + (n-1)^2\}$	$(m+n)^2 + 2\{(m+1)^2 + (n-1)^2\}$	$-(m+n+2)^2 - 2(n-1)^2$
n+1	$-(m+n-2)^2 - 2(n+1)^2$	$(m+n)^2 + 2\{(m-1)^2 + (n+1)^2\}$	$-(m-n)^2 - 2\{(m+1)^2 + (n+1)^2\}$	$(m-n+2)^2 + 2(n+1)^2$
n+3	$(m+n)^2$	$-(m+n+2)^2 - 2(m-1)^2$	$(m-n-2)^2 + 2(m+1)^2$	$-(m-n)^2$

付表 2 応力関数 (3.28) の中の係数 C_{uv}

$v \backslash u$	$m-M-2$	$m-M$	$m-M+2$	$m+M-2$	$m+M$	$m+M+2$
$n-N-2$	$(m-1)(N+1) \times \{(M+1)(n-1) - (m-1)(N+1)\}$	$-2(N+1) \times \{(mM+1)(n-1) - (m^2+1)(N+1)\}$	$(m+1)(N+1) \times \{(M-1)(n-1) - (m+1)(N+1)\}$	$(m-1)(N+1) \times \{(M-1)(n-1) + (m-1)(N+1)\}$	$-2(N+1) \times \{(mM-1)(n-1) + (m^2+1)(N+1)\}$	$(m+1)(N+1) \times \{(M+1)(n-1) + (m+1)(N+1)\}$
$n-N$	$-2(m-1) \times \{(M+1)(nN+1) - (m-1)(N^2+1)\}$	$4\{(mM+1)(nN+1) - (m^2+1)(N^2+1)\}$	$-2(m+1) \times \{(M-1)(nN+1) - (m+1)(N^2+1)\}$	$-2(m-1) \times \{(M-1)(nN+1) + (m-1)(N^2+1)\}$	$4\{(mM-1)(nN+1) + (m^2+1)(N^2+1)\}$	$-2(m+1) \times \{(M+1)(nN+1) + (m+1)(N^2+1)\}$
$n-N+2$	$(m-1)(N-1) \times \{(M+1)(n+1) - (m-1)(N-1)\}$	$-2(N-1) \times \{(mM+1)(n+1) - (m^2+1)(N-1)\}$	$(m+1)(N-1) \times \{(M-1)(n+1) - (m+1)(N-1)\}$	$(m-1)(N-1) \times \{(M-1)(n+1) + (m-1)(N-1)\}$	$-2(N-1) \times \{(mM-1)(n+1) + (m^2+1)(N-1)\}$	$(m+1)(N-1) \times \{(M+1)(n+1) + (m+1)(N-1)\}$
$n+N-2$	$(m-1)(N-1) \times \{(M+1)(n-1) + (m-1)(N-1)\}$	$-2(N-1) \times \{(mM+1)(n-1) + (m^2+1)(N-1)\}$	$(m+1)(N-1) \times \{(M-1)(n-1) + (m+1)(N-1)\}$	$(m-1)(N-1) \times \{(M-1)(n-1) - (m-1)(N-1)\}$	$-2(N-1) \times \{(mM-1)(n-1) - (m^2+1)(N-1)\}$	$(m+1)(N-1) \times \{(M+1)(n-1) - (m+1)(N-1)\}$
$n+N$	$-2(m-1) \times \{(M+1)(nN-1) + (m-1)(N^2+1)\}$	$4\{(mM+1)(nN-1) + (m^2+1)(N^2+1)\}$	$-2(m+1) \times \{(M-1)(nN-1) + (m+1)(N^2+1)\}$	$-2(m-1) \times \{(M-1)(nN-1) - (m-1)(N^2+1)\}$	$4\{(mM-1)(nN-1) - (m^2+1)(N^2+1)\}$	$-2(m+1) \times \{(M+1)(nN-1) - (m+1)(N^2+1)\}$
$n+N+2$	$(m-1)(N+1) \times \{(M+1)(n+1) + (m-1)(M+1)\}$	$-2(N+1) \times \{(mM+1)(n+1) + (m^2+1)(N+1)\}$	$(m+1)(N+1) \times \{(M-1)(n+1) + (m+1)(N+1)\}$	$(m-1)(N+1) \times \{(M-1)(n+1) - (m-1)(N+1)\}$	$-2(N+1) \times \{(mM-1)(n+1) - (m^2+1)(N+1)\}$	$(m+1)(N+1) \times \{(M+1)(n+1) - (m+1)(N+1)\}$

[付録 II] 応力関数 (3.40) の中の係数 \tilde{c}_{uv} , \tilde{c}_{RS}

応力関数 (3.40) の中の係数 \tilde{c}_{uv} と \tilde{c}_{RS} を次の付表 3 と付表 4 に示す.

付表 3 応力関数 (3.40) の中の係数 \tilde{c}_{uv}

v \ u	0	2	2(m-1)	2m	2(m+1)
0	0	$8(n^2+1)$	$-4(m-1)^2(n^2+1)$	$8m^2(n^2+1)$	$-4(m+1)^2(n^2+1)$
2	$8(m^2+1)$	$-8(m^2+n^2)$	$4n^2(m-1)^2$	$-8(m^2n^2+1)$	$4(m+1)^2n^2$
2(n-1)	$-4(m^2+1)(n-1)^2$	$4m^2(n-1)^2$	0	$4(n-1)^2$	0
2n	$8(m^2+1)n^2$	$-8(m^2n^2+1)$	$4(m-1)^2$	$-8(m^2+n^2)$	$4(m+1)^2$
2(n+1)	$-4(m^2+1)(n+1)^2$	$4m^2(n+1)^2$	0	$4(n+1)^2$	0

付表 4 応力関数 (3.40) の中の係数 \tilde{c}_{RS}

R \ S	m-n-2	m-n	m-n+2	m+n-2	m+n	m+n+2
m-n-2	$-(m+n)^2 \times (m-n-2)^2/2$	$-2(mn+1) \times (m-1)(n+1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n+1)^2$	$-(m^2-n^2)^2/2$	$\{m(m-2)+n^2\}^2/2$	$-2(mn-1) \times (m-1)(n+1) - (m^2+1)(m-1)^2 - (n^2+1)(n+1)^2$	$\{m^2+n(n+2)\}^2/2$
m-n	$-2(mn+1) \times (m-1)(n+1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n+1)^2$	$-2(m-n)^2 \times \{(m+n)^2+2\}$	$-2(mn+1) \times (m+1)(n-1) + (m^2+1)(m+1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$-2(mn+1) \times (m-1)(n-1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$2(m^2+n^2) \times (m^2+n^2+2)$	$-2(mn+1) \times (m+1)(n+1) - (m^2+1)(m+1)^2 - (n^2+1)(n+1)^2$
m-n+2	$-(m^2-n^2)^2/2$	$-2(mn+1) \times (m+1)(n-1) + (m^2+1)(m+1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$-(m+n)^2 \times (m-n+2)^2/2$	$\{m^2+n(n-2)\}^2/2$	$-2(mn-1) \times (m+1)(n-1) - (m^2+1)(m+1)^2 - (n^2+1)(n-1)^2$	$\{m(m+2)+n^2\}^2/2$
m+n-2	$\{m(m-2)+n^2\}^2/2$	$-2(mn+1) \times (m-1)(n-1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$\{m^2+n(n-2)\}^2/2$	$-(m-n)^2 \times (m+n-2)^2/2$	$-2(mn-1) \times (m-1)(n-1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$-(m^2-n^2)^2/2$
m+n	$-2(mn-1) \times (m-1)(n+1) - (m^2+1)(m-1)^2 - (n^2+1)(n+1)^2$	$2(m^2+n^2) \times (m^2+n^2+2)$	$-2(mn-1) \times (m+1)(n-1) - (m^2+1)(m+1)^2 - (n^2+1)(n-1)^2$	$-2(mn-1) \times (m-1)(n-1) + (m^2+1)(m-1)^2 + (n^2+1)(n-1)^2$	$-2(m+n)^2 \times \{(m-n)^2+2\}$	$-2(mn-1) \times (m+1)(n+1) + (m^2+1)(m+1)^2 + (n^2+1)(n+1)^2$
m+n+2	$\{m^2+n(n+2)\}^2/2$	$-2(mn+1) \times (m+1)(n+1) - (m^2+1)(m+1)^2 - (n^2+1)(n+1)^2$	$\{m(m+2)+n^2\}^2/2$	$-(m^2-n^2)^2/2$	$-2(mn-1) \times (m+1)(n+1) + (m^2+1)(m+1)^2 + (n^2+1)(n+1)^2$	$-(m-n)^2 \times (m+n+2)^2/2$

[付録Ⅲ] 線形振動のモード方程式(3.47)の各係数

モード方程式(3.47)の各係数は次のように表される.

$$q_{ij} = (1 + k_{mn}k_{ij})\Phi_0(i,m)\Phi_0(j,n) + (k_{mn} + k_{ij})\Phi_0(i,n)\Phi_0(j,m)$$

$$h_{ij} = [\Phi_4(i,m)\Phi_0(j,n) + k_{mn}\Phi_4(i,n)\Phi_0(j,m) + k_{ij}\Phi_0(i,n)\Phi_4(j,m) \\ + k_{mn}k_{ij}\Phi_0(i,m)\Phi_4(j,n)] (H_\zeta/\lambda^4) \\ + [(1 + k_{mn}k_{ij})\Phi_2(i,m)\Phi_2(j,n) + (k_{mn} + k_{ij})\Phi_2(i,n)\Phi_2(j,m)] (2H_\zeta\eta/\lambda^2) \\ + [\Phi_0(i,m)\Phi_4(j,n) + k_{mn}\Phi_0(i,n)\Phi_4(j,m) + k_{ij}\Phi_4(i,n)\Phi_0(j,m) \\ + k_{mn}k_{ij}\Phi_4(i,m)\Phi_0(j,n)] H_\eta$$

$$+ \lambda^2 \sum_p \sum_q (-1)^d [(\chi_{pq}^2 b_{pq} + k_{mn}k_{ij}\chi_{qp}^2 b_{qp})\Delta_1(i,p)\Delta_1(j,q) \\ + (k_{ij}\chi_{pq}^2 b_{pq} + k_{mn}\chi_{qp}^2 b_{qp})\Delta_1(i,q)\Delta_1(j,p)]$$

$${}^1\kappa_{ij} = -\frac{1}{4} \left\{ \sum_p \sum_q [(a_{pq}\chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}k_{ij}a_{qp}\chi_{qp} b_{qp})\Delta_5(i,p)\Delta_5(j,q) \\ + (k_{ij}a_{pq}\chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}a_{qp}\chi_{qp} b_{qp})\Delta_5(i,q)\Delta_5(j,p)] \right. \\ \left. + \sum_p \sum_q (-1)^d [(\chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}k_{ij}\chi_{qp} b_{qp})\Psi_2(i,j,p,q) \right. \\ \left. + (k_{ij}\chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}\chi_{qp} b_{qp})\Psi_2(i,j,q,p)] \right\}$$

$${}^1\mu_{ij} = \frac{1}{16\lambda^2} \sum_p \sum_q [(a_{pq} b_{pq} + k_{mn}k_{ij}a_{qp} b_{qp})\Psi_6(i,j,p,q) \\ + (k_{ij}a_{pq} b_{pq} + k_{mn}a_{qp} b_{qp})\Psi_6(i,j,q,p)]$$

$${}^1\nu_{ij} = \frac{1}{4\lambda^2(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)} [(\delta_{1i} - \delta_{3i})(3\delta_{1j} - \delta_{3j})(\frac{p\zeta_1}{\lambda^2} + k_{ij}p\eta_1) \\ + (3\delta_{1i} - \delta_{3i})(\delta_{1j} - \delta_{3j})(k_{ij}\frac{p\zeta_1}{\lambda^2} + p\eta_1)]$$

$\Phi(i,m)$, $\Delta(i,p)$ および $\Psi(i,j,p,q)$ は, 付録Vに示す Kronecker のデルタ群である.

[付録Ⅳ] 一項モード近似による非線形振動のモード方程式(3.50)の各係数

モード方程式(3.50)の各係数は次式で与えられる.

$$q_{mn} = (1 + k_{mn}^2) \Phi_0(m, m) \Phi_0(n, n) + 2 k_{mn} \{\Phi_0(m, n)\}^2$$

$$h_{mn} = T_4(m, n) \frac{H \zeta}{\lambda^4} + [(1 + k_{mn}^2) \Phi_2(m, m) \Phi_2(n, n) + 2 k_{mn} \Phi_2(m, n) \Phi_2(n, m)] \frac{2 H \zeta \eta}{\lambda^2} + T_4(n, m) H \eta$$

$$+ \lambda^2 \sum_p \sum_q (-1)^d [(\chi_{pq}^2 b_{pq} + k_{mn}^2 \chi_{qp}^2 b_{qp}) \Delta_1(m, p) \Delta_1(n, q) + k_{mn} (\chi_{pq}^2 b_{pq} + \chi_{qp}^2 b_{qp}) \Delta_1(m, q) \Delta_1(n, p)]$$

$${}^1 k_{mn} = -\frac{1}{4} \left\{ \sum_p \sum_q [(a_{pq} \chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}^2 a_{qp} \chi_{qp} b_{qp}) \Delta_5(m, p) \Delta_5(n, q) + k_{mn} (a_{pq} \chi_{pq} b_{pq} + a_{qp} \chi_{qp} b_{qp}) \Delta_5(m, q) \Delta_5(n, p)] + \sum_p \sum_q (-1)^d [(\chi_{pq} b_{pq} + k_{mn}^2 \chi_{qp} b_{qp}) \Psi_2(m, n, p, q) + k_{mn} (\chi_{pq} b_{pq} + \chi_{qp} b_{qp}) \Psi_2(m, n, q, p)] \right\}$$

$${}^1 \mu_{mn} = \frac{1}{16 \lambda^2} \sum_p \sum_q [(a_{pq} b_{pq} + k_{mn}^2 a_{qp} b_{qp}) \Psi_6(m, n, p, q) + k_{mn} (a_{pq} b_{pq} + a_{qp} b_{qp}) \Psi_6(m, n, q, p)]$$

$${}^1 v_{mn} = \frac{1}{4 \lambda^2 (K_{11} K_{22} - K_{12}^2)} [(\delta_{1m} - \delta_{3m})(3\delta_{1n} - \delta_{3n}) \left(\frac{p \zeta_1}{\lambda^2} + k_{mn} p \eta_1 \right) + (3\delta_{1m} - \delta_{3m})(\delta_{1n} - \delta_{3n}) \left(k_{mn} \frac{p \zeta_1}{\lambda^2} + p \eta_1 \right)]$$

$$\begin{aligned}
{}^2\kappa_{mn} = & -\frac{1}{4} \left[\sum_u \sum_v [(\tilde{c}_{uv}\chi_{uv}b_{uv} + k_{mn}^3 \tilde{c}_{vu}\chi_{vu}b_{vu})\Delta_1(m,u)\Delta_1(n,v) \right. \\
& + k_{mn}(\tilde{c}_{uv}\chi_{uv}b_{uv} + k_{mn}\tilde{c}_{vu}\chi_{vu}b_{vu})\Delta_1(m,v)\Delta_1(n,u)] \\
& + 2k_{mn} \sum_R \sum_S \tilde{c}_{RS}\chi_{RS}b_{RS} [\Delta_5(m,R)\Delta_5(n,S) + k_{mn}\Delta_5(m,S)\Delta_5(n,R)] \\
& \left. - \sum_p \sum_q (-1)^d [\chi_{pq}b_{pq}\Pi(m,n,p,q) + k_{mn}\chi_{qp}b_{qp}\Pi(m,n,q,p)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2\mu_{mn} = & \frac{1}{16\lambda^2} \left[\sum_u \sum_v [(\tilde{c}_{uv}b_{uv} + k_{mn}^2 \tilde{c}_{vu}b_{vu})\Psi_2(m,n,u,v) \right. \\
& + k_{mn}(\tilde{c}_{uv}b_{uv} + \tilde{c}_{vu}b_{vu})\Psi_2(m,n,v,u)] \\
& + 2k_{mn} \sum_R \sum_S \tilde{c}_{RS}b_{RS} [\Psi_9(m,n,R,S) + k_{mn}\Psi_9(m,n,S,R)] \\
& \left. - \sum_p \sum_q [a_{pq}b_{pq}\Pi(m,n,p,q) + k_{mn}a_{qp}b_{qp}\Pi(m,n,q,p)] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^2\nu_{mn} = & \frac{1}{8\lambda^2(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)} \left[(\delta_{1m} - \delta_{3m})(3\delta_{1n} - \delta_{3n}) \left(\frac{\tilde{p}_{\zeta 2}}{\lambda^2} + k_{mn}\tilde{p}_{\eta 2} \right) \right. \\
& + (3\delta_{1m} - \delta_{3m})(\delta_{1n} - \delta_{3n}) \left(k_{mn} \frac{\tilde{p}_{\zeta 2}}{\lambda^2} + \tilde{p}_{\eta 2} \right) \\
& \left. + 2 \left[T_2(m,n) \frac{p_{\zeta 1}}{\lambda^2} + T_2(m,n) p_{\eta 1} \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^3\mu_{mn} = & -\frac{1}{16\lambda^2} \left[\sum_u \sum_v [\tilde{c}_{uv}b_{uv}\Pi(m,n,u,v) + k_{mn}\tilde{c}_{vu}b_{vu}\Pi(m,n,v,u)] \right. \\
& \left. + 2k_{mn} \sum_R \sum_S \tilde{c}_{RS}b_{RS}\Pi(m,n,R,S) \right]
\end{aligned}$$

$${}^3\nu_{mn} = \frac{1}{8\lambda^2(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)} [T_2(m,n) \frac{\tilde{p}_{\zeta 2}}{\lambda^2} + T_2(m,n)\tilde{p}_{\eta 2}]$$

$\Phi(m,n)$, $T(m,n)$, $\Delta(m,n)$, $\Psi(m,n,p,q)$ および $\Pi(m,n,p,q)$ は、付録Vに示す Kronecker のデルタ群である。

[付録V] 付録IIIと付録IVで使用した Kronecker のデルタ群

付録IIIと付録IVで使用した Kronecker のデルタに関する記号は次のとおりである.

$$\Phi_f(i, j) = \{(j-1)^f + (j+1)^f\} \delta_{ij} + (j-1)^f \{\delta_{-i(j-2)} - \delta_{i(j+2)}\} - (j+1)^f \delta_{i(j+2)}$$

$$T_f(i, j) = \Phi_f(i, i)\Phi_0(j, j) + k_{mn} \{\Phi_f(i, j) + \Phi_f(j, i)\} \Phi_0(i, j) + k_{mn}^2 \Phi_f(j, j)\Phi_0(i, i)$$

$$\Psi_k(i, j, p, q) = p^2 \Delta_{k+2}(i, p)\Delta_k(j, q) + 2pq\Delta_{k+1}(i, p)\Delta_{k+1}(j, q) + p^2 \Delta_k(i, p)\Delta_{k+2}(j, q)$$

$$\begin{aligned} \Pi(m, n, p, q) = & [q^2 \Omega_2(m, m, p)\Omega_0(n, n, q) + 2pq\Omega_1(m, m, p)\Omega_1(n, n, q) \\ & + p^2 \Omega_0(m, m, p)\Omega_2(n, n, q)] \\ & + k_{mn} [q^2 \{\Omega_2(m, n, p) + \Omega_2(n, m, p)\} \Omega_0(m, n, q) \\ & + 2pq \{\Omega_1(m, n, p)\Omega_1(n, m, q) + \Omega_1(n, m, p)\Omega_1(m, n, q)\} \\ & + p^2 \{\Omega_2(n, m, q) + \Omega_2(m, n, q)\} \Omega_0(n, m, p)] \\ & + k_{mn}^2 [q^2 \Omega_2(n, n, p)\Omega_0(m, m, q) + 2pq\Omega_1(n, n, p)\Omega_1(m, m, q) \\ & + p^2 \Omega_0(n, n, p)\Omega_2(m, m, q)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_l(m, n, p) = & (n-1)^l \{(-1)^l \delta_{-(m+n-2)p} + \delta_{(m+n-2)p} - \delta_{-(m-n+2)p} - (-1)^l \delta_{(m-n+2)p}\} \\ & + (n+1)^l \{(-1)^l \delta_{-(m+n+2)p} + \delta_{(m+n+2)p} - \delta_{-(m-n-2)p} - (-1)^l \delta_{(m-n-2)p}\} \\ & + \{(n-1)^l + (n+1)^l\} \\ & \times \{(-1)^l \delta_{-(m+n)p} + \delta_{(m+n)p} - \delta_{-(m-n)p} - (-1)^l \delta_{(m-n)p}\} \end{aligned}$$

ここで 下添字 f, k, l は

$$f = 0, 2, 4$$

$$k = 2, 6, 9$$

$$l = 0, 1, 2$$

であり, $\Delta(i, p)$ は

$$\Delta_0(i,p) = \delta_{-(i-3)p} + \delta_{(i-3)p} - \delta_{(i+3)p}$$

$$\Delta_1(i,p) = \delta_{-(i-1)p} + \delta_{(i-1)p} - \delta_{(i+1)p}$$

$$\Delta_2(i,p) = \Delta_0(i,p) - \Delta_1(i,p)$$

$$\Delta_3(i,p) = -\delta_{-(i-3)p} + \delta_{(i-3)p} + \delta_{-(i-1)p} - \delta_{(i-1)p} - \delta_{(i+1)p} + \delta_{(i+3)p}$$

$$\Delta_4(i,p) = 3\Delta_1(i,p) - \Delta_0(i,p)$$

$$\Delta_5(i,p) = \Delta_1(i,p) - \delta_{-(i+1)p}$$

$$\Delta_6(i,p) = \Delta_2(i,p) + \delta_{-(i+1)p}$$

$$\Delta_7(i,p) = \Delta_3(i,p) + \delta_{-(i+1)p}$$

$$\Delta_8(i,p) = \Delta_4(i,p) - 3\delta_{-(i+1)p}$$

$$\Delta_9(i,p) = \Delta_6(i,p) + \delta_{-(i+3)p}$$

$$\Delta_{10}(i,p) = \Delta_7(i,p) - \delta_{-(i+3)p}$$

$$\Delta_{11}(i,p) = \Delta_8(i,p) + \delta_{-(i+3)p}$$

[付録VI] 逐次近似法による式(3.50)の解法

まず，式(3.50)のモード方程式を次のように書き換える．

$$\overline{A_{mn}} \cdot \tau \tau + \nu_1 \cdot \overline{A_{mn}} + \nu_2 \cdot \overline{A_{mn}}^2 + \nu_3 \cdot \overline{A_{mn}}^3 = 0 \quad (\text{A.1})$$

ここで

$$\nu_1 = \pi^4 \{ h_{mn} + {}^1\kappa_{mn} \overline{B} + ({}^1\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^1\nu_{mn}) \overline{B}^2 \} / \{ (1 + \overline{\rho}) q_{mn} \}$$

$$\nu_2 = \pi^4 \{ {}^2\kappa_{mn} + ({}^2\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^2\nu_{mn}) \overline{B} \} Z_{mn} / \{ (1 + \overline{\rho}) q_{mn} \}$$

$$\nu_3 = \pi^4 ({}^3\mu_{mn} + \Lambda \cdot {}^3\nu_{mn}) Z_{mn}^2 / \{ (1 + \overline{\rho}) q_{mn} \}$$

上式は楕円関数を用いて解くことができるが，その解は一般的にきわめて複雑である．したがって，本研究では全体的な見通しの可能な解を得るために，解析的解法の一つである逐次近似法を採用した．以下その解法について説明する．

まず，

$$\xi = \sqrt{\nu_1} \tau \quad (\text{A.2})$$

の変換を行うと，式(A.1)は

$$\overline{A_{mn}} \cdot \xi \xi + \overline{A_{mn}} + \mu_1 \cdot \overline{A_{mn}}^2 + \mu_2 \cdot \overline{A_{mn}}^3 = 0 \quad (\text{A.3})$$

となる．ここで， μ_1 と μ_2 は

$$\mu_1 = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \quad \mu_2 = \frac{\nu_3}{\nu_1} \quad (\text{A.4})$$

である．さらに

$$\xi = \sqrt{1+\phi} \quad \xi = (\sqrt{\nu_1} \cdot \sqrt{1+\phi}) \tau = \omega^2 \cdot \tau \quad (\text{A.5})$$

とおくと，式(A.3)は

$$(1 + \phi) \overline{A_{mn, \zeta \zeta}} + \overline{A_{mn}} = -(\mu_1 \cdot \overline{A_{mn}^2} + \mu_2 \cdot \overline{A_{mn}^3}) \quad (\text{A.6})$$

と書き換えられる。本式は垂直変位 $\overline{A_{mn}}$ についての運動方程式であるが，この振動は図3.1に示すように振幅の最大値 $\overline{A_1}$ および最小値 $\overline{A_2}$ を有する。そこで ϕ および $\overline{A_{mn}}$ を，曲率の減少する方向の振幅 $\overline{A_2}$ のべき級数で次のように展開する。

$$\phi = -\phi_1 \overline{A_2} + \phi_2 \overline{A_2^2} - \phi_3 \overline{A_2^3} + \phi_4 \overline{A_2^4} - \dots \quad (\text{A.7})$$

$$\overline{A_{mn}} = -\eta_1(\xi) \cdot \overline{A_2} + \eta_2(\xi) \cdot \overline{A_2^2} - \eta_3(\xi) \cdot \overline{A_2^3} + \eta_4(\xi) \cdot \overline{A_2^4} - \dots \quad (\text{A.8})$$

式(A.7)および式(A.8)を式(A.6)に代入して，両辺における $\overline{A_2}$ の同じべきの係数を等値すると次式が得られる。

$$\eta_{1, \zeta \zeta} + \eta_1 = 0 \quad (\text{A.9.a})$$

$$\eta_{2, \zeta \zeta} + \eta_2 = -\phi_1 \eta_{1, \zeta \zeta} - \mu_1 \eta_1^2 \quad (\text{A.9.b})$$

$$\eta_{3, \zeta \zeta} + \eta_3 = -\phi_2 \eta_{1, \zeta \zeta} - \phi_1 \eta_{2, \zeta \zeta} - 2\mu_1 \eta_1 \eta_2 - \mu_2 \eta_1^3 \quad (\text{A.9.c})$$

$$\begin{aligned} \eta_{4, \zeta \zeta} + \eta_4 = & -\phi_3 \eta_{1, \zeta \zeta} - \phi_2 \eta_{2, \zeta \zeta} - \phi_1 \eta_{3, \zeta \zeta} \\ & - \mu_1 (2\eta_1 \eta_3 + \eta_2^2) - 3\mu_2 \eta_1^2 \eta_2 \end{aligned} \quad (\text{A.9.d})$$

$$\begin{aligned} \eta_{5, \zeta \zeta} + \eta_5 = & -\phi_4 \eta_{1, \zeta \zeta} - \phi_3 \eta_{2, \zeta \zeta} - \phi_2 \eta_{3, \zeta \zeta} - \phi_1 \eta_{4, \zeta \zeta} \\ & - 2\mu_1 (\eta_1 \eta_4 + \eta_2 \eta_3) - 3\mu_2 (\eta_1^2 \eta_3 + \eta_1 \eta_2^2) \end{aligned} \quad (\text{A.9.e})$$

.....

さらに，ここでは自由振動を論じているので式(3.51)の初期条件，すなわち

$$\overline{A_{mn}}(0) = -\overline{A_2}, \quad \overline{A_{mn, \tau}}(0) = 0$$

を採用すると，式(A.8)から

$$\begin{aligned}\eta_1(0) &= 1, & \eta_2(0) &= \eta_3(0) = \eta_4(0) = \dots = 0 \\ \eta_{1,\zeta}(0) &= \eta_{2,\zeta}(0) = \eta_{3,\zeta}(0) = \eta_{4,\zeta}(0) = \dots = 0\end{aligned}\tag{A.10}$$

の条件が成立する.

そこでまず，式(A.10)の初期条件を考慮して式(A.9.a)を解けば， η_1 は

$$\eta_1 = \cos \xi\tag{A.11}$$

となる. この η_1 を式(A.9.b)に代入すると

$$\eta_{2,\zeta\zeta} + \eta_2 = \phi_1 \cos \xi - \frac{1}{2} \mu_1 (1 + \cos 2\xi)\tag{A.12}$$

の関係式が求まる. 上式より得られる解に永年項(secular term)が出現しないためには

$$\phi_1 = 0\tag{A.13}$$

とならなければならない. この条件を式(A.12)に代入し，式(A.10)の初期条件を考慮すると， η_2 は

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{3} \mu_1 \cos \xi + \frac{1}{6} \mu_1 \cos 2\xi\tag{A.14}$$

の形で与えられる. 以下，同様にして永年項が出現しないように式(A.9)を逐次解いて行くと，次の諸式が得られる.

$$\eta_1 = \cos \xi$$

$$\eta_2 = -\frac{1}{2} \mu_1 + \frac{1}{3} \mu_1 \cos \xi + \frac{1}{6} \mu_1 \cos 2\xi$$

$$\eta_3 = -\frac{1}{3}\mu_1^2 + \left(-\frac{1}{32}\mu_2 + \frac{29}{144}\mu_1^2\right)\cos\xi + \frac{1}{9}\mu_1^2\cos 2\xi$$

$$+ \left(\frac{1}{32}\mu_2 + \frac{1}{48}\mu_1^2\right)\cos 3\xi$$

$$\eta_4 = \left(\frac{21}{32}\mu_1\mu_2 - \frac{25}{48}\mu_1^3\right) + \left(-\frac{35}{96}\mu_1\mu_2 + \frac{119}{432}\mu_1^3\right)\cos\xi$$

$$+ \left(-\frac{1}{3}\mu_1\mu_2 + \frac{2}{9}\mu_1^3\right)\cos 2\xi + \left(\frac{1}{32}\mu_1\mu_2 + \frac{1}{48}\mu_1^3\right)\cos 3\xi$$

$$+ \left(\frac{1}{96}\mu_1\mu_2 + \frac{1}{432}\mu_1^3\right)\cos 4\xi$$

$$\eta_5 = \left(\frac{29}{24}\mu_1^2\mu_2 - \frac{25}{36}\mu_1^4\right) + \left(\frac{23}{1024}\mu_2^2 - \frac{1607}{2304}\mu_1^2\mu_2 + \frac{7103}{20736}\mu_1^4\right)\cos\xi$$

$$+ \left(-\frac{5}{9}\mu_1^2\mu_2 + \frac{8}{27}\mu_1^4\right)\cos 2\xi + \left(-\frac{3}{128}\mu_2^2 + \frac{11}{384}\mu_1^2\mu_2 + \frac{31}{576}\mu_1^4\right)\cos 3\xi$$

$$+ \left(\frac{1}{72}\mu_1^2\mu_2 + \frac{1}{648}\mu_1^4\right)\cos 4\xi + \left(\frac{1}{1024}\mu_2^2 + \frac{5}{2304}\mu_1^2\mu_2 + \frac{5}{20736}\mu_1^4\right)\cos 5\xi$$

.....
(A.15)

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = -\frac{3}{4}\mu_2 - \frac{5}{6}\mu_1^2, \quad \phi_3 = \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 - \frac{5}{9}\mu_1^3$$

$$\phi_4 = -\frac{3}{128}\mu_2^2 + \frac{185}{96}\mu_1^2\mu_2 - \frac{235}{288}\mu_1^4$$

.....
(A.16)

以上の結果により、 \bar{A}_{mn} を \bar{A}_2 のべき級数で展開した式(A.8)は、式(A.5)により
 ξ を $\bar{\omega}^* \cdot \tau$ で書き換えると、本文の式(3.52)のように表される。式(3.52)が式
(3.50)の近似解であり、非線形振動の場合の固有振動数 $\bar{\omega}^*$ は線形固有振動数 ω

($=\sqrt{\nu_1}$) との比 ω^*/ω の形で表すと、式(A.5)より

$$\frac{\omega^*}{\omega} = \sqrt{1+\phi} \quad (\text{A.17})$$

と書くことができる。ただし、 ϕ は式(A.7)に式(A.16)の結果を代入すれば

$$\begin{aligned} \phi = & \left(-\frac{3}{4}\mu_2 - \frac{5}{6}\mu_1^2 \right) A_2^2 - \left(-\frac{1}{2}\mu_1\mu_2 - \frac{5}{9}\mu_1^3 \right) A_2^3 \\ & + \left(-\frac{3}{128}\mu_2^2 + \frac{185}{96}\mu_1^2\mu_2 - \frac{235}{288}\mu_1^4 \right) A_2^4 - \dots \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となり、これを式(A.17)の ϕ に代入すれば、振動数比 ω^*/ω は本文中の式(3.54)の形で与えられる。

[付録Ⅶ] 補強板試験片の各剛性比と最大初期たわみ

両面对称補強板の剛性比と初期たわみの値を付表5と付表6に、片面補強板の剛性比と初期たわみの値を付表7と付表8にそれぞれ示す。

付表5 両面对称二方向補強板の剛性比と初期たわみ

試験片番号	伸び剛性比		曲げ剛性比		ねじり剛性比	初期たわみ	無次元初期たわみ
	NO.	α_s	α_r	β_s			
B2 5-0	0.75	0.75	8.71	8.74	18.67	0	0
B2 5-1	0.76	0.76	8.88	8.97	19.10	0.68	1.95
B2 5-2	0.75	0.76	8.77	8.81	18.81	1.30	3.70
B2 10-0	0.71	0.72	8.20	8.25	16.64	0	0
B2 10-1	0.77	0.77	9.59	9.59	19.49	0.80	2.37
B2 10-2	0.76	0.76	9.37	9.37	18.99	1.41	4.15
B2 15-0	0.72	0.72	8.53	8.53	16.27	0	0
B2 15-1	0.74	0.75	9.16	9.18	17.57	0.93	2.75
B2 15-2	0.79	0.80	10.01	10.14	19.40	1.46	4.39
B2 20-0	0.74	0.74	9.18	9.15	16.53	0	0
B2 20-1	0.75	0.75	9.47	9.53	17.08	0.54	1.63
B2 20-2	0.76	0.75	9.87	9.81	17.62	1.18	3.60
B2 30-0	0.69	0.69	9.00	9.00	13.56	0	0
B2 30-1	0.63	0.64	7.66	7.78	11.46	0.46	1.35
B2 30-2	0.71	0.71	9.59	9.59	14.33	1.01	3.17

付表6 両対称一方補強板の剛性比と初期たわみ

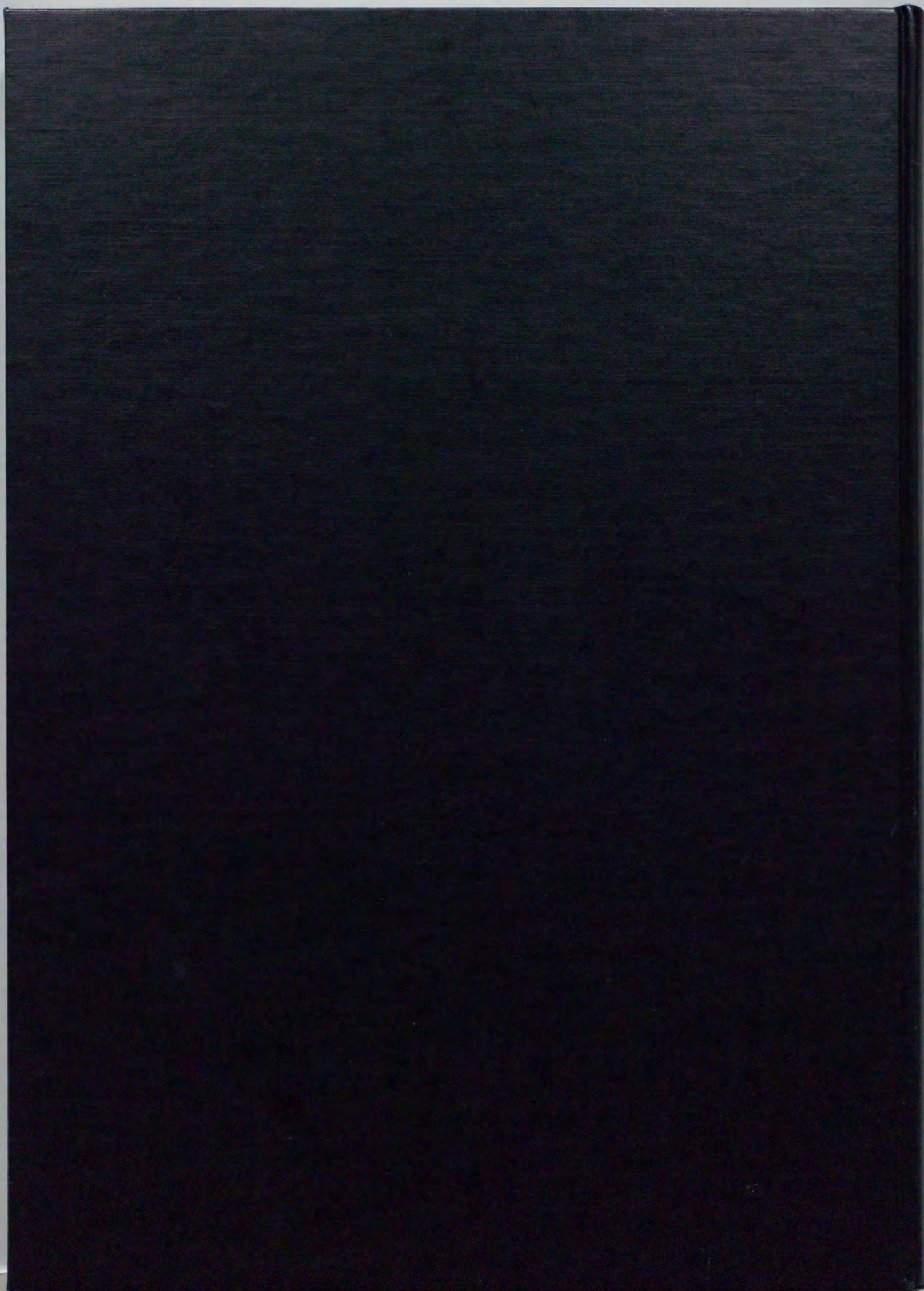
試験片番号	伸び剛性比	曲げ剛性比	ねじり剛性比	初期たわみ	無次元初期たわみ
NO.	α_s	β_s	β_{sr}	B (mm)	B/h
B1 5-0	0.91	9.99	10.76	0	0
B1 5-1	0.85	8.89	9.58	0.35	0.89
B1 5-2	0.91	10.02	10.80	1.38	3.68
B1 10-0	0.91	10.09	10.44	0	0
B1 10-1	0.91	10.13	10.49	0.54	1.42
B1 10-2	0.93	10.54	10.92	1.46	3.96
B1 15-0	0.91	10.24	10.17	0	0
B1 15-1	0.92	10.41	10.34	0.81	2.20
B1 15-2	0.90	10.10	10.02	1.16	3.10
B1 20-0	0.90	9.78	9.32	0	0
B1 20-1	0.90	9.74	9.30	0.47	1.25
B1 20-2	0.91	9.91	9.45	1.22	3.22
B1 30-0	0.96	11.21	9.75	0	0
B1 30-1	0.96	11.23	9.77	0.86	2.37
B1 30-2	0.99	12.23	10.58	1.20	3.44

付表7 片面二方向補強板の剛性比と初期たわみ

試験片番号	伸び剛性比		曲げ剛性比		ねじり剛性比	無次元連成剛性			初期たわみ	無次元初期たわみ
	NO.	α_s	α_r	β_s	β_r	β_{sr}	γ_s	γ_r	γ_{sr}	B (mm)
02 10-1-1	0.46	0.45	3.48	3.45	7.14	0.38	0.37	3.23	0.72	2.19
02 10-1-2	0.45	0.45	3.40	3.40	7.05	0.37	0.37	3.20	0.94	2.84
02 10-1-3	0.46	0.45	3.43	3.41	7.08	0.37	0.37	3.21	1.00	3.03
02 10-1-4	0.47	0.47	3.58	3.62	7.47	0.38	0.38	3.33	1.25	3.83
02 20-1-0	0.51	0.51	4.14	4.15	7.99	0.42	0.43	3.68	0	0
02 20-1-1	0.46	0.46	3.49	3.51	6.72	0.38	0.38	3.27	0.56	1.71
02 20-1-2	0.49	0.48	3.87	3.87	7.41	0.40	0.40	3.50	0.82	2.57
02 20-1-3	0.47	0.48	3.70	3.72	7.12	0.39	0.39	3.40	0.92	2.88
02 20-1-4	0.47	0.48	3.59	3.65	6.96	0.38	0.39	3.35	0.99	3.05
02 20-1-5	0.50	0.50	4.07	4.02	7.78	0.42	0.42	3.62	1.03	3.30
02 10-2-0	0.29	0.29	2.53	2.49	4.37	0.26	0.26	2.25	0	0
02 10-2-1	0.31	0.30	2.76	2.73	4.80	0.28	0.28	2.41	0.64	1.92
02 10-2-2	0.31	0.31	2.86	2.88	5.00	0.28	0.29	2.47	0.88	2.68
02 10-2-3	0.30	0.30	2.67	2.67	4.65	0.27	0.27	2.35	1.01	3.12
02 10-2-4	0.32	0.31	2.99	2.94	5.20	0.30	0.29	2.55	1.07	3.31
02 10-2-5	0.30	0.30	2.66	2.65	4.63	0.27	0.27	2.34	1.14	3.39
02 20-2-0	0.29	0.29	2.62	2.60	3.96	0.27	0.26	2.30	0	0
02 20-2-1	0.29	0.29	2.65	2.66	4.02	0.27	0.27	2.32	0.69	2.05
02 20-2-2	0.31	0.31	2.84	2.86	4.34	0.28	0.28	2.45	0.78	2.35
02 20-2-3	0.31	0.31	2.95	2.96	4.48	0.29	0.29	2.50	0.92	2.85
02 20-2-4	0.31	0.32	2.94	3.04	4.57	0.29	0.30	2.54	0.96	2.95
02 20-2-5	0.30	0.30	2.80	2.76	4.23	0.28	0.28	2.41	0.99	3.00

付表8 片面一方向補強板の剛性比と初期たわみ

試験片番号	伸び剛性比	曲げ剛性比	ねじり剛性比	無次元連成剛性		初期たわみ	無次元初期たわみ
				γ_s	γ_{sr}		
N0.	α_s	β_s	β_{sr}	γ_s	γ_{sr}	B (mm)	B/h
01 10-1-1	0.58	3.88	4.51	0.44	2.21	0.45	1.36
01 10-1-2	0.59	4.04	4.71	0.45	2.27	0.85	2.64
01 10-1-3	0.62	4.47	5.18	0.48	2.42	0.89	2.83
01 10-1-4	0.64	4.56	5.37	0.49	2.47	0.97	3.12
01 10-1-5	0.56	3.75	4.35	0.43	2.16	1.15	3.52
01 20-1-0	0.55	3.66	3.90	0.42	2.10	0	0
01 20-1-1	0.56	3.79	4.04	0.43	2.15	0.58	1.75
01 20-1-2	0.53	3.52	3.72	0.40	2.04	0.73	2.12
01 20-1-3	0.59	4.21	4.52	0.46	2.32	0.69	2.15
01 20-1-4	0.58	3.99	4.28	0.44	2.24	0.98	2.95
01 10-2-0	0.36	2.99	2.80	0.31	1.57	0	0
01 10-2-1	0.36	3.05	2.86	0.32	1.60	0.49	1.48
01 10-2-2	0.39	3.50	3.30	0.35	1.77	0.69	2.18
01 10-2-3	0.38	3.32	3.12	0.34	1.70	0.94	2.93
01 10-2-4	0.40	3.70	3.47	0.36	1.83	1.05	3.38
01 10-2-5	0.37	3.22	3.00	0.33	1.66	1.14	3.54
01 20-2-0	0.34	3.05	2.48	0.31	1.56	0	0
01 20-2-1	0.37	3.52	2.88	0.34	1.73	0.42	1.36
01 20-2-2	0.36	3.47	2.79	0.34	1.70	0.66	2.10
01 20-2-3	0.37	3.46	2.86	0.34	1.72	0.72	2.30
01 20-2-4	0.36	3.24	2.66	0.32	1.64	1.00	3.12

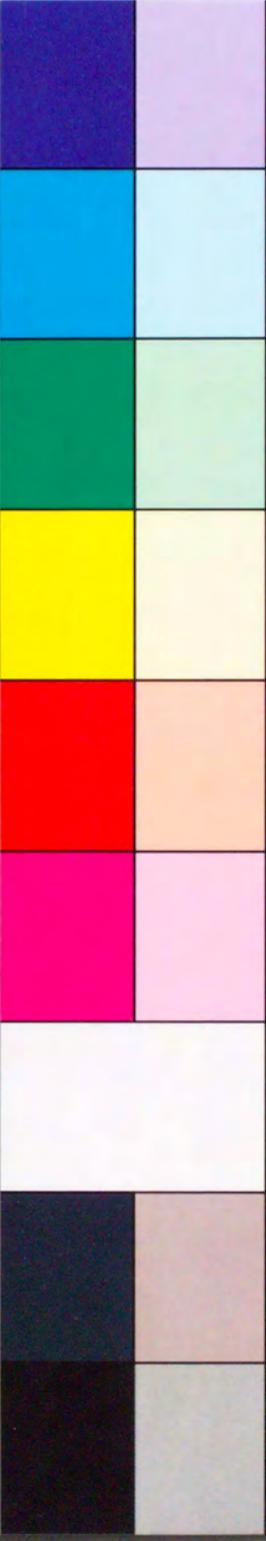


Inches 1 2 3 4 5 6 7 8
cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

Kodak Color Control Patches

© Kodak, 2007 TM: Kodak

Blue Cyan Green Yellow Red Magenta White 3/Color Black



Kodak Gray Scale



© Kodak, 2007 TM: Kodak

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

