Study on the large time behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equations under the slip boundary condition

アハット, アブリズ

出版情報：Kyushu University, 2018, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：アハット　アブリズ

論 文 名　：Study on the large time behavior of solutions of the compressible Navier-Stokes equations under the slip boundary condition
（スリップ境界条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の長時間挙動の研究）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

本論文はスリップ境界条件下での層状領域および柱状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間無限大における漸近挙動を考察したものである。圧縮性 Navier-Stokes 方程式は圧縮性流体の運動を記述する流体の基礎方程式である。ここではバロトロピー流に対する圧縮性 Navier-Stokes 方程式を扱う。圧縮性 Navier-Stokes 方程式は準線形の双曲-放物型連立方程式に分類される非線形偏微分方程式であり、その放物型的側面と双曲型的側面とにより解は興味深い挙動を示す。

流体方程式の解の挙動は境界条件に大きく影響されるが、境界上でのすべりを許すスリップ境界条件やすべりを許さない粘着条件がしばしば考えられる。粘着境界条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動に関して多くの研究が行われてきた[2, 3, 4, 5]。圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の漸近挙動について、[4]では静止状態の摂動は１次元の線形熱方程式の解のように振る舞うことが示された。[5]では平行流の漸近安定性が考察され、Reynolds 数と Mach 数が十分小さければ、平行流の摂動の漸近挙動は１次元 Burgers 方程式の解のように振る舞うことが示された。時間周期平行流の場合も同様に、摂動の漸近挙動は１次元 Burgers 方程式によって記述されることが示された[2, 3]。これら[2--5]の研究では、粘着境界条件下での漸近主要部に純粋な拡散現象が現れることが示されている。

本論文の第一部においては、境界が平らな２次元層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式のスリップ境界条件下での解の時間無限大における漸近挙動を考察した。十分小さな摂動に対して静止状態は漸近安定であり、摂動のL^2ノルムは１次元の熱核と同じ減衰率で減衰することを示した。さらに、より詳細な摂動の漸近挙動を調べ、スリップ条件のときは粘着条件の場合と全く異なり、その解の漸近挙動は１次元の非線形拡散波の重ね合わせによって記述されることを証明した。このような挙動は方程式の双曲型の側面によるものであり、粘着条件の場合とは全く異なるものである。

この結果は以下のようにして証明した。解析の第一歩として、まず線形化半群の漸近挙動の解析を行った。Fourier 変換を用いて、解の減衰の遅い部分である低周波部分と解の減衰の早い部分である高周波部分に分解し、低周波部分は Fourier 変換を通じた線形化半群のスペクトルを調べて必要な評価を導出した。高周波部分は Matsumura-Nishida のエネルギー法（[7]）を用い、必要な評価を導出した。それらによって、非線形問題に対して時間大域的解が一意的に存在することを示すとともに、摂動の時間減衰評価を導出した。さらに漸近挙動については、摂動方程式を保存則系

に書き換えて、摂動が１次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解で近似されることを示し、次いで１次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する Kawashima の手法([6])を用いて、非線形拡散波の重ね合わせによって記述されることを証明した。

本論文の第二部においては、柱状領域におけるスリップ境界条件下での圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の時間無限大における漸近挙動を考察した。柱状領域上の問題に関しては粘着条件の場合にすでに Aoyama-Kagei による先行研究([1])があり、平行流の摂動が時間無限大で１次元 Burgers 方程式の解で近似されることが示されている。本論文では、スリップ条件の場合は、初期攪乱が十分小さければ、解は時間無限大において、領域の無限に広がる方向へ伝播しながら拡散的に減衰する非線形拡散波と領域の断面に関して剛体的に回転しながら拡散的に減衰する非圧縮流れの重ね合わせで近似されることを証明した。

この結果は以下のようにして証明した。まず方程式を摂動の方程式に書き換えて、線形化問題の解の漸近挙動の解析を行う。Fourier 変換を用いて、解の減衰の遅い部分である低周波部分と解の減衰の早い部分である高周波部分に分解する。低周波部分は線形化半群のスペクトル解析を用い、主要部が線形拡散波の部分と拡散的に減衰する剛体回転部分に分解されることを示した。結果として、低周波部分は１次元の熱核を同じく、つまりk 階微分がL^2ノルムで $O(t^{-\frac{1}{4}-\frac{k}{2}})$ で減衰する。非線形問題に関する減衰評価を行うために、低周波部分に対して速度場のかわりに運動量を導入し、方程式を保存形に書き換える。このことにより、減衰の遅い非線形項が取り扱い可能となる。高周波部分に関しては、Matsumura-Nishida のエネルギー法を用い、Korn 型の不等式を有効に利用し、必要な評価を導出した。低周波部分と高周波部分の評価を合わせることで、解のH^2ノルムの評価を得る。次いで、摂動が１次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解で近似されることを示し、１次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式に関する Kawashima の手法を用いて、時間無限大における漸近挙動を示した。

[1] R. Aoyama, Y. Kagei, Large time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equations around a parallel flow in a cylindrical domain, Nonlinear Anal., 127 (2015), pp. 362--396.

[2] J. Brezina, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around a time-periodic parallel flow, SIAM J. Math. Anal., 45 (2013), pp. 3514--3574.

[3] J. Brezina and Y. Kagei, Decay properties of solutions to the linearized compressible Navier-Stokes equation around time-periodic parallel flow, Math. Models Methods Appl. Sci., 22 (2012), 1250007, 53 pp.

[4] Y. Kagei, Large time behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation in an infinite layer, Hiroshima Math. J., 38 (2008), pp. 95--124.

[5] Y. Kagei, Asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around a parallel flow, Arch. Rational Mech. Anal., 205 (2012), pp. 585--650.

[6] S. Kawashima, Large-time behaviour of solutions to hyperbolic-parabolic systems of conservation laws and applications, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 106A (1987), pp. 169--194.

[7] A. Matsumura, T. Nishida, Initial Boundary Value Problem for the Equations of Motion of Compressible Viscous and Heat-Conductive Fluids, Comm. Math. Phys., 89 (1983), pp. 445--464.