

## 変数のショック入力による誘発の評価をめぐる現状 と課題：解析手法の比較分析と非線形モデル導入を 中心として

時永, 祥三  
九州大学大学院経済学研究院：経済工学部門

岸川, 善紀  
宇部高等専門学校経営情報学科

<https://doi.org/10.15017/19853>

---

出版情報：経済學研究. 77 (5/6), pp.42-72, 2011-03-31. 九州大学経済学会  
バージョン：  
権利関係：

# 変数のショック入力による誘発の評価をめぐる現状と課題

— 解析手法の比較分析と非線形モデル導入を中心として —

時 永 祥 三  
岸 川 善 紀

## 1 まえがき

景気浮揚政策や金融政策をはじめとしてさまざまな政策の実施を評価することは、中央政府や地方自治体をはじめとして、金融機関など半ば公的な機関においても、重要な課題である。特に政策に関する事項の整理ではなく、定量的な評価手法においては、モデルの設定とシミュレーションによる分析をもとにした、事後の評価が重視されている。しかしながら一方では、政権の交代や急激な経済情勢の変化などにより、政策評価が本格的に実施されることは、それほど多くはないと思われる。また評価がなされたとしても、すでに政策実施は過去のものとなり、これを現在の政策へと反映することも直接的にはなされない。このような課題はありながら、すでに述べたように政策実施の主体にとっては、重要な課題であり、これまで多数の研究と成果報告がなされている。本論文では、政策を記述する変数のショック入力による誘発評価をめぐる現状と課題を取り上げるが、特にモデルの比較分析による基礎的考察および非線形モデル導入を中心として議論を行う。具体的には、変数のショック入力による誘発の評価の応用代表的な事例としてインパルス応答に注目し、これまでのモデル分析の手法を比較分析する。この場合、最近の日本における経済データを用いた考察を行う。またこの枠組みにおけるショック分析を、非線形モデルに拡張する可能性を議論する。

政策を記述する変数のショック入力による状態の変化をモデル化する代表的な方法として、ベクトル自己回帰 (Vector Auto-Regressive modeling:VAR) モデルによる分析 [1]-[12]、確率的動学一般均衡 (Dynamic Stochastic General Equilibrium:DSGE) モデルによる分析 [13][14]、およびこれらの双方を総合したモデルがある [15]-[19]。第 1 番目の VAR モデルに関しては、伝統的な線形モデルの VAR モデルに加えて、これを期間ごとに区分して統合するモデルなどが提案されている。一方では、VAR モデルにおける明示的には定義されない変数の相互関係の変動における課題を解決する目的で、第 2 番目の DSGE が提案されている。またモデルを導出する場合に、均衡モデルにもとづいて行うことにより、モデルを拡張したモデルを用いる方法も提案されている。しかしながら、実際のデータにこれら进行分析方法を適用して政策評価を行う場合に、相互に問題点が指摘される結果となっており、決定的な方法論が存在しないのが現状である。したがって、これらの方法論の優劣を議論するためには、その範囲と研究における位置づけが重要となる。また近年、その重要性が確認されている、いわゆる技術ショックにおける中立ショック (neutral technology shock) と投資ショック (investment specific shock) の個別的な評価手法 (詳細は後述する) についても言及する。

更に論文の後半では、変数のショック入力応答の評価モデルについて、従来の線形モデルを拡張して、非線形モデルを導入することを議論する。経済分析においては、従来より線形モデルが用いられているが、やや範囲を拡張した場合には、非線形モデルによる記述が必要となってくる。特に、この場合に、非線形関数状態方程式の近似(推定)において、われわれが種々の推定問題に適用して有効性を確認している遺伝的プログラミング (Genetic Programming: GP) による手法を適用する。具体的には、線形モデルにおける応答の符号制約を導入する場合に、推定されたモデルについて統計的なばらつきを用いるが、これに対応する非線形モデルにおけるばらつきを、GP 手法における個体の違いを用いることにする [20]-[32]。

## 2 政策変数のショック誘発の分析方法

### 2.1 3つの分析方法

政策評価の1つの方法として、政策を記述する変数を用いて国の経済モデルを記述したのち、これらの変数を変化させた場合の挙動を推定することが行われる。このようなモデル分析の手法に特定の名称はないが、政策を記述する変数についてインパルス状の入力(ショック入力)を与えた場合の、それぞれの変数の変化を求めることから、構造化ショック分析 (structural shock analysis) などと呼ばれている。本論文では、名称を限定的に使用する目的から、変数のショック入力に対する誘発(応答)の評価分析と呼ぶことにしておく。工学的な視点から見れば、この方法はシステムを記述する変数に対してインパルス状の入力を加えた場合の応答を求めることに対応しているので、インパルス応答とも呼ばれている。工学的な応用に限定すれば、変数のインパルスを加える必要はなく、システムを記述する関数(伝達関数と呼ばれる)を基にして、推定することができる。

しかしながら、経済モデルの場合には、工学的なシステムとは1つの大きな違いがあることに注意する必要がある。すなわち、多くの経済モデルにおいては、企業や労働者(同時に消費者でもある)が、自身の利益や効用を最大化する方向に意思決定を行い、これらが均衡した場合に、それぞれの行動が収束するという、いわゆる均衡分析の立場をとっている。したがって、変数のショックを加えた場合においても、この均衡分析にしたがう必要があり、これをカバーする方法論が開発されている。具体的には、DSGE と呼ばれる手法である。一般に、一般均衡のモデル分析においては、ある時刻における企業や労働などの主体の間における均衡が求められるが、DSGE においては時刻  $t$  と  $t+1$  との間における関係が記述される。これを、いわゆる工学におけるダイナミクスの記述である。時刻  $t$  と  $t+1$  との関係が方程式により結ばれているので、時刻  $t$  において与えたショックの効果を、時刻  $t+1$  において評価することができ、これを繰り返すことによりシステムの応答を計算することができる。

従来より用いられている VAR モデルでは、このような変数の間の拘束条件は原則として存在しないことを仮定しているため、その意味では変数の挙動は相互に直接的に関係はなく、単に回帰モデルを通じて関連づけられている。もともと VAR モデルは、いわゆる構造方程式による面倒なシステム記述や、パラメータの複雑な推定方法を回避する目的で導入されたものであり、その分かりやすさが利点となっ

ている。しかしながら、当然のことではあるが、DSGE を用いる研究サイドからは、経済主体の動きを考慮したモデルではないとの批判がある。

更に、経済モデル分析におけるショック誘発分析が工学分野と異なっている点として、ショックに反応する応答関数の変動に、符号制約を導入することがある。この方法論は、特に近年用いられ、その有効性が示されている。すなわち、ショックに対する応答が、例えば長期的にマイナスであるべきであるとされるケースにおいては、プラスを示す応答は別の原因により引き起こされたものであるとして、統計処理に含ませないことがなされる。これは投資の効果が、消費財に対するものであるのか、生産財に対するものであるのか、あるいは両方であるのかを区別する必要性から導入されている（詳細は後で議論する）。

以上のような変数のショック入力による応答の評価に関して、これまでの研究をまとめると、以下のような3つの分野のモデルの形成に集約することができるであろう。

#### (1) Model-I

従来の VAR モデルを基本とする方法であり、現在では観測期間を2つ程度に分割する方法や、条件に応じて2つの係数セットの間を遷移するモデルなどへの拡張が行われている [1]-[12]。また、時系列データの利用方法を工夫しているものもあり、いわゆる移動平均をベースとした時系列の前処理を行うことにより、より真のビジネスサイクルが見出せるとする研究もある。

#### (2) Model-II

DSGE を基本とするモデルであり、動的な変化を考慮してショックに対する変化を追跡する方法論を用いている [13][14]。このモデルにおいては、経済主体の個数、すなわちセクターをいくつにするかによりバリエーションがあり、最低限の組み合わせとして企業と労働だけの間の均衡を分析する方法と、これらのセクターに加えて金融当局などの、ほとんどすべての主体をモデルに組み入れる方法もある。しかし当然のことであるが、セクターが増加するにしたがって、同定すべき対象（いわゆるカラプレーションによる関係式の推定）も増加することになる点や、直接観測できない時系列については、副次的なモデルを仮定して、これにより推定しか結果を用いることが必要となる。

#### (3) Model-III

このモデルにおいては VAR における簡易性を有効に利用するが、一方では DSGE において定義される均衡分析を中心とした理論モデル、およびこの背景となっている経済主体の行動を取り入れている [15]-[19]。具体的には、最初に DSGE 分析における基本的な政策変数が含まれるようにしながら、セクターとしては2つ程度の最小個数に制限することにより、簡潔さを保持している。基本となるモデルは DSGE であるので、これから時刻  $t, t+1$  における状態方程式を導出し、最終的には、いわゆる Kalman Filters と呼ばれる状態推定の方法に帰着させている。この方法論については主として Malley らにより行われ、その研究に中において、他の手法であるとの比較を行っている。

## 2.2 Model-I による分析の概要

以下では、これまで述べた3つの基本的な分析方法の概要を説明する。同時に、可能な範囲で、それぞれの分野における研究者が、自身の採用する方法が、他の方法に対して優れていると論じている点を引用しながら、モデル分析における問題点を比較する。

VARモデルは最初に Simes により、同時方程式による分析を拡張する意味で導入がなされている [1]。この手法の導入により、やや規模が小さいマクロモデルを分析することが可能となっている。シムズが提案したモデルでは、貨幣、失実質失業率、賃金、価格水準、輸入価格の6変数を解析の対象としている。それぞれの変数について4つにラグを許すので、合計24個の係数に対する推定となっている。論文では、景気変動など企業活動や価格変動などやビジネスサイクルの検証、および相互関連の分析を目的としている。特に、従来のマクロモデル解析においては大規模なモデルが前提とされ、経験的 (empirical) 問題には適用できないことを疑問視している。したがって、マクロモデルのように特定の経済理論的な前提をおいていないことと、大規模ではなく6変数による中規模のモデルが構成可能であることを強調している。その結果、金融政策におけるショックは、周期的な変動の多くの部分を説明できるとする仮説が検証され否定されている。また、賃金規定式におけるフィリップス曲線の仮説として、制約を加えている処理も、疑わしいとしている。またこののち、Litterman による応用もなされ、事例としてランダムマルコフ過程がとりあげられている [2]。この分析では、本来の係数推定のほかにイノベーション解析、すなわちパルス状の入力や変化がどのような影響を与えるかを見積もっている。

VARモデルは線形の同時方程式の体系を指しているが、この場合、制約の無い誘導型の形式をしている。すなわち、複数の方程式を同時にモデル化していることに加えて、内生変数ベクトルを表現する場合に、該当する方程式のラグ付き変数だけでなく、他の方程式のラグ付き変数も用いて表現した線形モデルである。また、更に拡張され、同時点におけるラグ付き外生変数もシステムに含めることができる。一般に、ラグの範囲を拡大して  $p$  次まで許した場合には、次のような複数の変数について誘導型の方程式体系 (VAR(p) 過程) を仮定する。

$$y_t = \nu + \sum_{k=1}^p \Theta_k y_{t-k} + v_t, \nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m]^T,$$

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} \theta_{11,k} \dots \theta_{1m,k} \\ \dots \\ \theta_{m1,k} \dots \theta_{mm,k} \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

ここで  $v_t$  は  $m$  次元の残差ベクトルである。VARモデルにおいて重視されている性質の1つに、イノベーションの計算がある。方法論としては、ARモデルを逐次近似の方法を用いてMAモデルに変換することにより、逆の関係として表現することに相当する。自己回帰モデルに対して、次のような無限の項からなるMAモデルによる表現が可能であることが示されている。

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} M_i v_{t-i}, \mu = E[y_t] = (I - \Theta_1 - \Theta_2 - \dots - \Theta_p)^{-1} \nu \quad (2)$$

$M_i$  の  $kj$  の番目の要素は、時刻が  $i$  期間まえの変数  $j$  により発生された単位大きさのインパルスに対する  $k$  番目の変数の応答を表している。VAR(p) 過程の残差ベクトルについての分散共分散行列 ( $\Sigma_v$

としておく) は正定符号行列であるので,  $P\Sigma_v P^T = I$  となるような行列が存在する。この行列を用いて, 次のような表現を得る。

$$y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i w_{t-i}, \Phi_i = M_i P^{-1}, w_t = (w_{1t}, w_{2t}, \dots, w_{mt})^T \quad (3)$$

このときベクトル  $w_t$  は, その要素が相互に無相関で分散が 1 であるという, 便利な性質をもっている。すなわち, 係数  $\Phi_i$  は大きさが 1, すなわち単位イノベーション  $w_t$  に対する  $y_t$  の応答であるとみなすことができる。単位イノベーションに対する応答は, 具体的には, ある被説明変数に対する説明変数の影響が, 将来にわたりどのように残存するかを見る場合に用いる。

しかしながら, 分散共分散行列  $\Sigma_v$  を変換する行列  $P$  は一意ではないので, 選択に仕方によって結果である応答関数が異なってしまう問題がある。このようにインパルスに対する応答には任意性があるので, これを回避する方法として最近では, 次節で述べるような応答関数の符号に制約をもうける方法が用いられている。

従来手法においては, 次のような予測誤差を説明する成分への分解として解釈する方法が用いられている(本論文では, この方法は用いない)。これは時期  $h$  先の予測誤差により説明されている。時期  $h$  先の予測誤差の共分散行列は,  $\Sigma(h) = \Sigma_v + M_1 \Sigma_v M_1^T + \dots + M_{h-1} \Sigma_v M_{h-1}^T$  のように記述することができる。この式に, 行列分解  $P\Sigma_v P^T = I$  の関係式を適用し書き換えを行うと,  $\Sigma(h) = \Phi_0 \Phi_0^T + \Phi_1 \Phi_1^T + \dots + \Phi_{h-1} \Phi_{h-1}^T$  となる。この式の中で, 第  $m$  番  $b$  目の対角要素は第  $m$  番目の変数  $y_m$  が予測誤差に与える影響として見積もることができ, これを予測誤差の説明変数への分散分解と呼んでいる。すでに述べたように, この分散分解は  $h$  先の時期における予測誤差への説明変数の寄与の割合を示しているので, ある被説明変数に対して, この説明変数が保有する(残存する)影響の度合いを表している。この分散の定義より, これらの割合の合計は 1 になる。

#### (1) いくつかの代表的なモデル

VAR モデルによる分析では, 基本的に用いる変数をどのように選択するかが問題である。これまで, 分析の目的に応じて, さまざまな経済構造を記述する変数のセットが提案されている。これらのなかから, 比較的共通する変数のセットを用いている事例として, Mertens の研究がある [12]。表 1 にはこの研究で用いられている変数を参考にして, 本論文の後半で考察する変数のリストに示している。文献 [12] における Mertens の研究では, 従来の研究の前提条件を考慮して, 以下の点が強調されている。

#### (a) 技術ショック, 中立性技術ショック, ニュースショックの区分

VAR モデル分析において一般的にインパルス応答(ショック)の入力として重視されているものは, 投資金額の増加と労働生産性の向上である。簡単な分析においては, 単にこれらの入力に関する予測誤差分散への影響の大きさだけを議論するが, 更に詳細に分析する場合には, いわゆる技術ショック  $\varepsilon_t^I$ , 中立性技術ショック  $\varepsilon_t^a$ , ニュースショック  $\varepsilon_t^m$  が区別して論じられる。ただしこれらのショックをどのように定義するか, あるいは定量化するかについては, Blanchard and Quah 他らの従来の方法論を踏襲している [3]。Mertens の研究では, これらの 3 つのショックが区別されている [12]。更に, これらの時系列データから直接的あるいは間接的に得られるショックに加えて, 金融政策ショック (monetary policy

shocks) を定義しているが、この場合には次の利子率の生成モデルを用いている。

$$i_t = \gamma_Z Z_t + \gamma_a \varepsilon_t^a + \gamma_I \varepsilon_t^I + \theta(L) X_{t-1} + \sigma_m \varepsilon_t^m \quad (4)$$

(b) bc-filtered により適正な実質利率の時系列

名目利子から実質利子を推定する方法として、いわゆる Bandpass-filter が使用されている。すなわち現実に観測される利子率の時系列は leading indicator ではなく、むしろ逆の特性をもつ inverted indicator であることを指摘している。この大きな原因として、生の名目利子率は異なる側面を与えるので、これをフィルタ処理した時系列を用いるべきであることを指摘している。

(c) 米国における 2 つの時期の分離

VAR モデルの構造については、基本的に時代が異なっても変化しないとの視点であり、ショックの振幅が変動するだけであるとして分析を行っている。米国経済についての一般的な理解として、インフレが昂進した時期と、比較的収束に向かった時期とを区別することが行われており、分析においてもこの 2 つの時期を区別した場合と、全体を同じとした 3 つのケースを分析している。

表 1. VAR モデル分析に用いられる変数

the change in the relative price of investments(投資額の変化)
the growth rate in labor productivity(労働生産性の向上率)
inflation(インフレ)
the ratios of consumption and investment to output(産出に対する消費と投資の割合)
hours worked(労働時間)
wage markup(賃金上昇)
capacity utilization(稼働指数)
the nominal interest rate(名目利子率)
the velocity of money(通貨の流通速度)
the spread between long- and short-term interest rates(長期と短期利率の差)

(2) 他の手法に対する批判点

このモデル分析の手法は、もともと多変量ベクトルの線形回帰モデルであり、理論的な面からの複雑さは少ないといえる。そのため、この方法以外の手法についての批判は、主として分析結果の説明力に言及したものが多し。すなわち、理論的な比較分析と言うよりは、他の分析方法においては現実を説明する力が乏しいことを指摘している。このような意見の中で、Mertens により行われている論点を整理すると、以下ようになる。まず DSGE に関しては King による分析をもとにして、これまで提案されてきた 3 つの方法論、1) a real business cycle model (真のビジネスサイクルモデル)、2) a sticky price model (価格モデル)、3) a portfolio adjustment model (ポートフォリオ調整価格モデル) はいずれも、現実に観測される利子率と産出との関係を説明していないと述べている。Mertens による主張では利子と産出とは逆相関の関係にあるのが事実であるが、DSGE モデル分析においては正の相関が結論とされている点に関して、図をプロットすることで分かりやすくしている。この場合特に、真の利子を変換により求めている。更に、ビジネスサイクルが概周期的 (pro-cyclical) であることが DSGE の主張であることについても、明確に証明できるものではなく、むしろ逆のこと (counter-cyclical) が

示されるとしている。また産出とは逆の相関にあり、leading indicator ではなく、negative (inverted) leading indicator であると主張している。このような大きな差異が生まれる背景として、DSGE においては基本的とも言える構造的な定式化があるとしている。すなわち、簡潔にシステムの挙動を定式化するための方法論として、変動要素とその駆動成分 (driving processes) を同じ枠組みのもとで取り扱っており (a joint specification of fundamental economic structure and driving processes)、この結果として正の相関が生まれるような現象が組み込まれており (例えば産出と利子率との関係)、これを回避することや経済はそれぞれ異なる駆動要因により影響されていることを考慮する必要性を述べている (the economy might alternatively be driven by different type of shocks that yield different effects within the given structure)。なお、このような分析により帰着される経済政策の議論 (New Keynesian variety) についてのコメントも述べられているが、ここでは省略する。また VAR モデルにおける構造変化については、Mertens の見解では否定的な考えが示されており、単に変数の入力の大きさが時期により変化しているだけであり、構造変化ではないと論じている。その見解を裏付ける根拠として Sims らの先行研究をあげている。しかしながら一方では、Mertens は戦後の米国における経済の VAR モデルに関して Great Inflation と Great Moderation との 2 つの時期を 1980 年を境界として分析している。この場合には別々の VAR モデルが推定されていると考えられ、やや異なる分析のルートを併用していることになる。

### (3) 分析結果の相互比較

モデル分析に範囲のなかで、他の研究結果を引用しながら相互比較を行っているものは少ないが、その中でも、ビジネスサイクルの真の値を求めているかどうかを論じたものがある。これらの研究をまとめると、次のような 3 つにグループ化される。

#### (i) 時系列にバンドパスフィルタを適用する (bc-filtered)

バンドパスフィルタとは、時系列に対して中間帯域の成分だけを通過させて、低域と高域の成分を遮断するフィルタ操作であり、工学分野では信号の調整などに用いられる。ここで用いられているフィルタは、時系列に対して移動平均の操作を行うことに相当し、急激な時系列変動を抑制する一方で、時系列のトレンドを活用するように時系データを修正することに相当する。フィルタ操作により、当然もとの時系列信号は変換を受けるので、時間的なずれ位相のずれが発生する。この位相のずれを明示することで、RBC(Real Business Cycle) の存在を強調する方法論が示されている。しかしながら、このようなフィルタ処理をする部分以外は、通常の VAR と同じである。

#### (ii) 変数の残差の分散についてマルコフ過程にもとづく遷移を導入する

VAR 解析において時間的な変動を導入する 1 つの方法論として、変数の残差項について、マルコフスイッチングを用いることが提案されている。残差に限らず、状態方程式の係数が時間的に変動するような線形システムを用いて、それぞれに切り替えられた状態を推定することが、飛翔体の識別の応用されている。ここで用いられている目的は、このようなものとは異なるが時間的な変動を係数ではなく、残差に導入したものである。変数の残差の分散のマルコフスイッチングの応用として、一般によく知られている、米国における、いわゆる Great Inflation と Great Moderation との 2 つの時期の抽出を行っ

ている。

(iii) 時期を2つ程度に分割して異なる係数を適用する

時間的に変動する VAR モデルを導入する方法として、容易に拡張できるものとして、係数のセットを複数準備しておき、これらの切り替えを中間で行う方法論が考えられる。この切り替えを時間的に、例えば指数平滑化などの方法を用いるのか、ある条件が成立した場合に切り替えるのかを区別することも可能であるが、線形の係数の切り替え問題として、統一的に取り扱うことができるであろう。

## 2.3 Model-II による分析の概要

DSGE モデルにおいては、基本的に従来の均衡分析をベースとしており、それぞれのセクターにおける主体の行動とその最適化の導出、これらのセクターを統合して求められる全体最適化の分析によりモデル化される。一般均衡分析においては、企業、労働、政府の3つのセクターが仮定されることが多く、企業については利益の最大化、労働者（消費者）においては効用関数の最大化が、行動最適化の基準となる [33]-[36]。また、政府は税収を得ることにより移転所得を配布する財源を確保すると同時に、この税率を定めることができる。一般均衡を実際の適用するために、解を非線形方程式の解法を用いて計算する、いわゆる応用一般均衡 (Applied General Equilibrium: AGE) 分析を用いて、これまで国内の税率の最適化問題や、国際取引における関税の最適化などが議論されている [33]-[36]。また、産業の部門も数個である事例から、多いものまで含まれているが、最終的には市場における資本と労働の価格と、税収の3つの変数に関する不動点解析になり、問題の複雑さは緩和されている。

(1) 代表的なモデル

このような AGE 分析と比較して DSGE においては、もともとの問題設定が、変数のショック応答を評価することにあるので、金融政策を実施する当局の記述や生産にかかわる技術、さらには消費の影響などを含めて、セクターが構成されている。これらの問題記述のなかでも、比較的セクターの個数が多いによる事例を、以下に概要を示しておく。ただしこの研究では、一般的な DSGE に加えて企業家と銀行との間での行動パターンのずれが、大きな経済変動を生むことを示すことを主たる目的としており、やや議論する範囲が異なっている。これらを含めて特徴の概要を付録にまとめる。

(a) 企業家 entrepreneurs と銀行 bankers との商品開発をめぐる行動の差異

金融政策のなかでも、企業家と銀行との間の商品開発をめぐる行動の差異が経済変動の1つの要因になっているとする視点であり、これらの主体の行動最適化をモデルに組み込んでいる。企業家はリスクの大きい商品開発を好むが、銀行は安定的に貸付を回収するため、売れ筋の商品開発を要望するなどの差異である。文献 [14] にはこれらの行動主体の詳細な記述が含まれるが、本論文で議論する範囲では必要ではないので、適宜省略する。

(b) 技術ショックと金融政策ショックのモデル

VAR モデルとは異なり技術ショックは定義式に含まれるランダム項として示され、およびを定義する、次のような式におけるランダム項がそれぞれのショックに対応している。中間財を製造する企業は、

独占的に次の生産関数を用いて中間財を  $y_{jt}$  だけ生産する。

$$y_{jt} = z_t k_j^{\theta_1} h_{jt}^{\theta_2} a_{jt}^{\theta_3} b_{jt}^{\theta_4} - \Phi \quad (5)$$

$z_t, k_j, h_{jt}, a_{jt}, b_{jt}$  はそれぞれ、技術係数、企業による資本と労働の使用、企業と銀行からの労働サービスの投入である。ここで累計された技術ショック (aggragate technology shock) は、定数  $\rho_z$  および正規乱数  $\varepsilon_{zt} \sim N(0, \sigma_z)$  を用いて表現された、次の式にしたがって変動すると仮定する。

$$\log z_t = \rho_z \log z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \quad (6)$$

したがって、観測データから得られる生のデータではなく、あくまでもカラブレーションされた関係式の中のランダム項として取り扱われる。

金融政策ショック (monetry policy shocks) を定義しているが、この場合には次の利子率の生成モデルを用いている。

$$r_t^d = (1 - \rho_r)r^d + \rho_r r_{t-1}^d + (1 - \rho_r)[\rho_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \rho_y \hat{y}_t + \varepsilon_t^{mp}] \quad (7)$$

ここで  $r^d$  は定常的な利率、 $\bar{\pi}$  は金融当局によるインフレーターゲット、 $\hat{y}_t$  は産出における定常的なレベルからの乖離であり、最後の  $\varepsilon_t^{mp}$  が金融政策ショックに相当する乱数項である。

### (c) 逐次計算による分析

一般的に DSGE を分析するには、均衡点を推定する非線形問題を解く必要があり、その手順についての簡素化などが、現在でも議論されている [36]。このような複雑な手順を回避する目的として、この研究では、逐次計算による代替的に分析を行っている。すなわち、すべての行動主体がある時刻  $t$  において同時に行動することを仮定した場合には、均衡分析が必要であるが、ある時刻  $t$  において他の行動主体の状態を、前の時刻  $t-1$  のままであると仮定すると、計算は簡素化される。このような逐次計算は工学分野では多用されており、例えば Expectation Maximization などがある。

#### (2) 他の手法に対する批判点

DSGE モデルを用いる妥当性については、主として従来の GE 手法との関連で論じられることが多く、GE だけでは経済のダイナミクスを表現できないとする見解が、その基本となっている。したがって、ここで取り上げている VAR モデルとの直接的な対比はなされていない。しかしながら、VAR モデルを採用する研究者が DSGE モデル分析に対して感じている批判的な見解は、そのまま DSGE モデルを採用する目的ともなっている。すなわち、VAR モデルにおいては経済における行動主体の間の均衡関係 (例えば企業における生産関数や消費者の効用関数、およびこれらを基礎とした市場での均衡価格の決定) は導入されておらず、データ解析の範囲を超えないとする視点である。ただし、これは逆の VAR モデルの観点からすると、同時に反批判の論点でもある。一方では、DSGE モデルを採用する研究の中でも批判的な見解が示されているが、この問題点は主として、用いるモデルの複雑さに関するものである。すなわち、金融政策に関するショック分析をする場合に、金融セクターの記述が含まれていないとする点や、企業家の行動や銀行の行動を詳細に記述しないとする指摘である。なお、従来の GE が

ら DSGE へと分析手法が発展的に提案された背景については、新ケインズ派 (New Keynesian) として定義されている。これについては多くの解説があるので、ここでは詳細は省略するが、将来の予測や不確実性を導入した New IS-LM の概念や、最適成長モデル (Ramesy Model), あるいは RBC により枠組みが示され、主として各国の金融政策において適用されている。

### (3) 分析結果の相互比較

DSGE モデルによるショック分析の事例は多数存在するが、その多くは各国の金融当局が、自国の金融政策を検証するためのデータ分析となっているケースが多く、方法論的な相互比較を行ったものは極めて少ない。同時に、DSGE モデルは非線形方程式を基本としながら、しかも応用一般均衡の手法や、あるいは同等な数値解析の手法を用いて解を求める方法論を開発する段階にあるため、モデルの数値解法に関する研究も少なくない。このような事情を考慮して、以下では、文献 [14] において示されているデータ解析の結果に関する記述を引用しながら、現状における DSGE を用いたショック分析を概観する。

#### (i) 銀行を通じたチャンネルとショックの伝播

文献 [14] においては「銀行を通じたチャンネルとショックの伝播」に関して、経済のマクロレベルのモデルに加えて、企業と銀行との間の資金貸付関係、あるいはこれに関連する企業の投資行動をモデルに組み入れているので、データ解析における評価の第 1 番目には、このようなモデルの定式化の有効性が議論されている。推定されたモデルをもとにして、米国経済について年次を追いながら、技術ショックと金融政策ショックの方向性や大きさを評価している。この場合、特にモデルに組み込まれている銀行の役割と、それ以外の部分を分離することがなされている。その結果、現実のデータとの対比においては「銀行資産の展開が貸し出しに影響を与えている」と示されている (しかしこれ以上の言及はない)。

#### (ii) クレジットの縮小 (credit crunch)

金融政策ショックの 1 つの影響分析の視点として、銀行資産の減少と、これにともなうクレジットの縮小の現象が解明される。これは米国において 1997 年に発生した事例を説明するものであり、銀行に資産状況の悪化にともない銀行がとった行動であるとされている。これを説明するために、銀行資産のプロセスを拡張して、 $A_{t+1} = [r_t + q_t(1 - \delta x_t)]K_t^b + \eta^b w_t^b$  という定式化を導入している。ここで  $x_t$  は銀行における減価償却の加速を説明する変数であり、AR(1) プロセスにしたがうとして導入されている。その結果、実際に発生した現象を説明することができることを、データ分析により示している。

#### (iii) 周期変動 (cyclical properties)

金融政策にともない、いわゆるビジネスサイクルに相当する、いろいろな変動が発生することが予想される。これを DSGE モデルにより説明する方法として、現実のデータとの間での変動の方向性の比較分析を行っている。その結果、多くの年度とスパンにおいて、同方向の変動が、シミュレーション結果と現実データとの間で見られているので、DSGE モデルの説明力を示していると述べられている。

## 2.4 Model-III によるモデル分析の概要

このモデル分析の手法を提案する根拠として、VAR モデルにおける均衡条件の欠如の指摘が多く見られる。すなわち VAR モデルは、もともと構造方程式をベースとするマクロ分析における変数の投入方法や、パラメータ推定における時系列の性質などに起因する複雑さを回避することが目的にあるので、最小限の検査事項を除いて簡素化されている。そのなかでも、大きなポイントは、政策変数により記述される経済主体の行動基準を明示していないことがある。

このようなことを背景として、ここに述べる VAR における DSGE モデルの導入においては、DSGE モデルにおける行動主体の最適化行動を反映したモデルの構成に重点が置かれている。しかしながら一方では、セクターを多くすることはモデルを複雑にする原因ともなるので、最低限のセクターを用いることを基本としている。

### (1) 代表的なモデル

以下では、DSGE の代表的な研究事例である Malley らによる結果を引用する [19]。すでに述べたように、この分析モデルの特徴は DSGE モデルと VAR モデルとを結合したモデルであるが、Malley らの研究では、次のようなことがらも含まれている。

#### (a) VARMA モデルの導入

VAR と DSGE とを結合する過程により、最終的にモデルは VAR モデルに MA 項を含ませた VARMA モデルと呼ばれる形式に帰着される。通常の時系列解析における AR モデルと ARMA モデルとの対応関係を参考にすると、ここに示される VARMA の位置が推測できる。ただし、単一の時系列モデルとは異なりダイナミクスを含んでいるので、解を逐次的に求める方法としては Kalman Filter を用いることが必要となっている。

#### (b) 最小限のカラプレーション

Malley により示される VARMA モデルの概要は以下において示すが、この中に含まれる式においては、DSGE モデルに含まれるような多数の関係式のカラプレーションは含まれていない。この式により表現される変数を除いては、すべて VAR モデルの変数として含まれており、その意味では処理は簡潔となっている。

#### (c) 技術ショックだけをランダム項として定義

技術の時間的な変化を 1 次のマルコフ過程で表現しており、その中に含まれるランダム項によって、技術ショックを定義している。文献 [19] において先行研究に言及した部分で、技術ショックと中立性技術ショックが述べられているが、この研究においては特に区別されることなく、上に示したランダム項として定義されている。

#### (d) 米国における 2 つの時期の分離

VAR モデルの代表事例と同様に米国経済についての一般的な理解として、インフレが昂進した時期と、比較的収束に向かった時期とを区別し、この 2 つの時期を区別した場合と、全体を同じとした 3 つのケースを分析している。

次に Malley により示された拡張されたモデルの導出について整理する [19]。

(i) Household

家計は、観測期間  $t = 0 \sim \infty$  にわたり割引率  $\beta$  をもつ効用である  $\max E[\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \log(C_t) - \gamma H_t]$  を最大化する消費  $C_t$  と労働時間  $H_t$  (パラメータ  $\gamma$  により線形化を調整する) を決定する。この場合、それぞれの期間において家計は予算制約である  $r_t K_t + w_t H_t + \Pi_t = C_t + I_t$  により行動する。ここで  $K_t$  は期間の開始時刻  $t$  における資本の物理的数量であり、 $r_t, w_t$  はそれぞれ、資本の借用率、および労賃である。また  $\Pi_t, I_t$  はそれぞれ、企業における利益における家計の占有率、および投資である。資本蓄積は減価償却の係数  $\delta (< 1)$  を用いて、次のようになされると仮定する。

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \quad (8)$$

(ii) Firms

企業は消費財を  $Y_t$  だけ生産し、その利益  $\Pi_t = Y_t - r_t K_t - w_t H_t$  を最大化する行動をとる。ここで  $Y_t$  は生産関数を用いて  $Y_t = A_t K_t^\theta (\eta_t H_t)^{1-\theta}$  として表現される。ここで  $A_t$  は、いわゆる Hicks の中立的技術進歩 (Hick's neutral technological progress) であり、 $\theta$  は資本の生産性、 $\eta$  は粗労働技術係数である。

(iii) Aggregation and equilibrium

市場における財の取引条件により、 $Y_t = C_t + I_t$  となる。また技術進歩は、次のような一次のマルコフ過程にしたがうと仮定する。

$$A_{t+1} = A^{(1-\rho)} A_t^\rho e^{\varepsilon_{t+1}} \quad (9)$$

以上の設定のもとで、家計は効用を最大化するような変数の組  $(Y_t, C_t, I_t, H_t, K_{t+1})$  を決定する。また企業は、利益を最大化するような変数の組  $(H_t, K_{t+1})$  を選択する。これらをまとめると、非線形の方程式系になるが、これを線形化することにより、次のような方程式が得られる。これらの式において、変数  $Y_t$  などを正規化した変数  $y_t = Y_t/\eta^t, c_t = C_t/\eta^t, i_t = I_t/\eta^t, k_t = K_t/\eta^t$  の表現を用いている (一方で  $a_t = A_t, h_t = H_t$  とする)。例えば次のようになる。

$$y_t = a_t + \theta k_t + (1 - \theta)h_t, a_t = \rho a_{t-1} + \varepsilon_t \quad (10)$$

これを行列形式でまとめると、状態変数表示が得られる。

$$y_t = (1_{zk} 1_{zx}) \begin{pmatrix} k_t \\ a_t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k_t \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{kk} l_{kx} \\ 0 \quad \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{k}_{t-1} \\ \hat{a}_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \varepsilon_t \quad (11)$$

(2) 他の手法に対する批判点

すでに述べたように、ここに示す手法の主な貢献は、従来の VAR モデルにおいて行動主体の最適化を導入しながら均衡分析の利点を用いることにある。したがって、他の手法に対する批判点においても、このようなことが強調されている。特に、Malley が示している見解は、均衡分析の利点を他の研究者の貢献を引用しながら述べている点や、明らかにすべき課題を整理していることなど、興味深いものがある。以下では、この Malley らによる先行研究に関する論点整理を引用しておく [19]。

まず DSGE を考慮した VAR モデル分析が必要である理由として、これまでの研究において技術ショックの評価が適切ではない、あるいは不確実であることをあげている。この点に関しては、Eichenbaum, Ireland らにより指摘されており、いわゆる技術進歩がビジネスサイクルに影響するのか、一般的な投資増加が影響するのかを区別する必要性を強調している。特に技術ショックに関しては、VAR モデルによる解析を主張する研究者である Francis らにより、その影響の大きさを否定する結果 (Differenced Structural Vector Autoregressive model:DSVAR モデルとして定式化している) が示されているため、特に経済的な均衡条件を導入して (cross-equation restrictions), 恣意的な緩やかな挙動 (relies only loosely on economic theory) を抑制する必要性が述べられている。したがって DSGE を導入することが主張され、その中でも DSGE により説明できない部分は、積極的に VAR モデルにより解明されるべきである (meaning the movements in the data athena the theory cannot explain) とする方法論が述べられている。これは VARMA として定式化されることになる。

### (3) 分析結果の相互比較

このような第 3 番目のモデル分析手法の導入の結果として、以下のような知見が得られると述べられている。従来の AARVAR と比較してモデルの適合性が向上している。長期や短期における技術ショックの存在を明確に示すことができると同時に、いわゆる振動現象 (persist of aggregated fluctuations) についての説明力も向上している。一般的な RBC についても、より優れた説明を与えている。

このモデル分析手法においては、従来手法による結果を改善するとともに 1 つの目的があるので、同じ問題を他の従来手法と比較することが行われている。このような比較分析には、いくつか存在するが、以下では文献 [19] に示された結果の概要を整理しておく。

#### (i) RBC モデルの説明力

文献 [19] で展開されている VARMA モデルは、基本となる DSGE 部分を RBC モデルと呼んでおり、基本的にこの部分を VAR に加えた効果を分析することになる。そのための代表的な方法論として、VAR モデルにおけるいわゆる分散分解を用いて、中立ショックの評価方法を相互比較している。この中で最も強調されているのが、分散分解の広がり、AR, VAR, VARMA の順になることであり、特にショックを加えたあとの経過時間が大きくなるにつれて、VARMA モデルにおける広がり極めて小さくなることである。広がりが最も大きなものは AR であり、次に VAR があり、この数分の 1 のレベルにまで VARMA の広がりは低下する。このような現象は、実際に観測されるデータを用いて検証することは難しいので、具体的には、近似に用いた関数の挙動による差異とみなされるであろう。この現象は、本論文の後半でもわれわれの研究の結果として示すが、モデルが複雑になるにしたがって、すなわち RBC モデルを導入すること、あるいは非線形関数を導入することにより、ショック入力に対する応答は「鈍く」なる。このような事情から、文献 [19] においては、比較分析により推定されるモデルの優劣は明示していない。

#### (ii) パラメータ推定の安定性

VARMA モデルにおいては、通常の AR あるいは VAR モデルと比較して RBC モデルのカラブレーションを含めて、相対的に多くのパラメータを推定する必要がある。この推定すべきパラメータ個数

の多さと同時に、用いるデータの特異性を回避することができるかが問題となる。具体的には、米国経済をモデルのデータとして用いる場合の2つの時期である1948年～1979年 (Great Inflation) および1980年～2002年 (Great Moderation) において、推定期間を2つに分離した場合と、そうではない単独の時期にした場合の、パラメータ推定の精度を検討することである。結果的には、このVARMAモデルにおいても従来から指摘され、この2つの時期にまたがる構造変化を克服できないことが述べられている。この意味からVARMAモデルは、パラメータ個数を増加させる割には、カバーできる範囲が極端に拡大するメリットを生まないことが分かる。

### (iii) 投資ショックへの適用

文献[19]においては1つのショックである中立ショックだけが本来のモデルに含まれているが、これまでのVARモデルなどにおいては、いわゆる投資ショックも議論されている。そのため、中立ショックの方法論を拡張して、投資ショックへの適用がなされている。具体的には、 $K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + x_t I_t$ ,  $x_t = x^{(1-\rho)} x_{t-1}^\rho e^{\mu_t}$ ,  $\mu_t \sim N(0, \sigma_x)$  のような形式でショックを定義して、AR, VARモデルにおける結果と比較分析を行う。中立ショックにおける評価と同様に、予測誤差の分散分解を用いて違いを分析している。その結果、やはり中立ショック分析の場合と同様に、分散の広がりやAR, VARと比較して、VARMAモデルの場合には極めて小さいものとなっている。また投資ショックの大きさは、VARとVARMAの場合には中立ショックより小さくなっているが、ARでは逆の現象が観測されるとしている。このような議論についても結果の単純なコメントであり、モデルの優劣を明示したものではない。

## 3 VARモデル解析とショック応答の符号制約

### 3.1 中立ショックと投資ショック

VARモデル分析の目的の1つとして、変数のショック入力により得られる応答の大きさと、持続性を分析することがあり、特に金融政策とならんで、設備投資と生産性向上の影響が分析されている。しかしながら、1つの生産部門を前提とした場合には、投資の影響は消費財生産部門と投資財生産部門とが同等に扱われるために、投資ショックの正しい姿を与えていないことが指摘されてきている。このような問題が生起する原因と、これを回避する方法論が議論されてきている。現在では、方法論としても確立される段階にあり、消費財生産部門と投資財生産部門とに共通するショックを中立ショックと呼び、投資財生産部門だけに影響を与えるショックを投資ショックと呼び、これらを区分する方法が提案されている。その背景にある議論は、中立ショックは労働生産性を長期にわたり、また一方では、技術的ショックは景気循環にあまり大きな影響は与えないとする分析結果も示されるようになり、中立的ショックだけの議論の限界が述べられている。しかしながら、また中立ショックと投資ショックを区分する研究の結果として、労働時間の変動の大きな部分が投資ショックにより説明できることも示されている。

前の節で、一般的なVARモデルによるインパルス応答の議論を行ったところで述べたように、インパルス応答を計算する場合には、変換行列  $P$  には任意性があるので、応答関数が一意には決まらない問題があることを述べた。しかし、このことを逆に用いると、行列  $P$  に対応する設定に制約を導入すること

により、応答関数の特性を制限することが可能となる。この方法を積極的に用いる方法が、近年導入が進んでいる応答関数への符号制約である。応答関数に符号制約を導入する方法は大きく分けて2つがあるが、説明を分かりやすくするために、最初に Blanchard and Quah により導入された、行列要素へゼロの制約を用いる方法を示す [3]。いま VAR モデルにおいて変数を2つに限定し、 $Y_t$ :GNP および  $U_t$ :失業 (どちらももとに数値の対数をとったもの) としておく。また、これに対応するショックを  $e_t^d$ :需要、 $e_t^s$ :供給の2つとしておく。なお、これらの変数の呼び方は Blanchard and Quah になっている。まずショック  $e_t = [e_t^d, e_t^s]^T$  により系列  $X_t = [Y_t, U_t]^T$  が直接表現されている、次のような式を仮定する。

$$X_t = A(0)e_t + A(1)e_{t-1} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} A(j)e_{t-j}, \text{Var}(e_t) = I \quad (12)$$

ここでショック  $e_t^d$  は長期的には、変数  $Y_t$  のレベル変動には影響を与えないとする設定を導入する。すなわち、行列  $A(j)$  のそれぞれの (1,1) 要素の和は、ゼロであると仮定する。

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{11}(j) = 0 \quad (13)$$

これは、 $a_{11}(j)$  がショックが入力されてから時刻  $j$  以降に  $\Delta Y_t$  に対して与える影響を意味するので、これの合計である  $\sum_{j=0}^k a_{11}(j) = 0$  は、このような時刻  $k$  まで経過したあとにショック  $e_t^d$  が  $Y_t$  に与える影響になる。これをなくすための条件が、上に示した式になる。

更に VAR モデルを MA 形式に展開した、次の形式を用いる。この式は、前に示した式の記号を変えただけである。

$$X_t = \nu_t + C(1)\nu_{t-1} + \dots + \sum_{j=0}^{\infty} C(j)\nu_{t-j}, \text{Var}(\nu_t) = \Sigma \quad (14)$$

式 (12) と式 (14) との対応関係から、次の関連性が導出される。

$$\nu_t = A(0)e_t, A(j) = C(j)A(0), A(0)A(0)^T = \Sigma \quad (15)$$

ここで、行列の和  $\sum_{j=0}^{\infty} C(j)A(0)$  について求められる結果の行列の (1,1) 要素をゼロにする制約を導入することができる。この行列  $A(0)$  は分散共分散行列  $\Sigma$  のコレスキー分解の結果である下三角行列  $S$  とは、直交する関係にある。

このように変換行列の要素にゼロを導入する方法が示されたあと、これを更に改善する方法が提案されて現在にいたっている。

### 3.2 ショック応答の符号制約処理

中立ショックと投資ショックを区別する分析方法には、大きく分けて2つあり、それぞれの方法を用いた分析結果についても公表されている。第1番目の方法は、経済モデルに含まれる変数の間に長期あるいは短期における関係において制約を導入する方法であり、主として VAR モデルの係数行列の性質を

用いる方法である。第2番目の方法は、さまざまな可能性のあるショックとその応答を求めておき、これらの中で観測する変数についての符号の正負（符号制約と呼ばれる）を検査しながら、統計量を収集する方法である。以下に、これらの概要を示す。なお本論文では、これらの中でも後述する非線形 VAR モデルへの拡張が可能と思われる、第2番目の方法を用いる。

(1) 行列  $P$  の係数についての制約を用いる方法

VAR モデルを次のように記述しておく。

$$X_{t+1} = C(L)X_t + u_{t+1}, u_t \sim N(0, \Sigma) \quad (16)$$

ここで  $\Sigma^2$  は、イノベーションベクトル  $u_t$  の分散共分散である。また  $v_t$  を構造的ショックのベクトルとしたときに、 $v_t = Pu_t$  の関係があると仮定しておく。このとき次のようになる。

$$PX_{t+1} = PC(L)X_t + Pu_{t+1}, E[Pu_t u_t^T P' = I] \quad (17)$$

ショック入力に対する符号制約を導入することは、この行列  $P$  の形状を用いることに対応する。例えば、いま短期的な変数の変動に制約を加えたいときには、行列  $P$  の多くの要素をゼロとする一方で、要素がゼロではない変数の挙動を観測することができる。あるいは逆に、長期的な符号制約を導入したい場合には、行列  $P$  においてこれらの制約対象の変数の間について行列の要素間に制約を与えることにより、達成することができる。

(2) シミュレーションによる応答の推定と区分

この方法においては、VAR モデルの統計的に許される範囲内において、可能な応答のパターンをシミュレーションにより求め符号制約を満足する応答だけを用いて、長期あるいは短期の符号制約のもとの性質を分析する方法である。いま VAR モデルにおける係数行列は、最小2乗法により推定されるが統計的には推定された係数を中心とする、ある範囲内の係数値をとることが可能である。このような係数のセットを準備することが、第1段階である。

次のショックの入力についても、統計的に可能な範囲あるいは組み合わせが求められるので、この選択を第2段階とする。この2つの段階を経て、シミュレーションにより応答を求め、これらのなかから符号制約を満足するケースだけを採用する。

### 3.3 応答の符号制約のアルゴリズム

以下では [6] 文献において Uhlig により示された、応答の符号制約のアルゴリズムをまとめておく。この方法は VAR モデルにより発生可能な応答をシミュレーションにより生成するものであり、その第1段階において可能な VAR モデルの係数行列のセットを推定し、第2段階において利用可能なショックを生成する。これらの2段階の生成により応答を発生させる。

(1) VAR モデル係数の推定

観測される時系列データを用いて、通常の最小 2 乗法により VAR モデルの係数行列および、残差イノベーションの分散共分散行列  $\Sigma_v$  を推定する。いま線形の VAR モデルを、次のように記述する。

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{u} \quad (18)$$

ここで  $\mathbf{Y}$  などは、時刻  $t = 1, 2, \dots, tmax$  における変数ベクトル  $y_t$  の観測値からなるデータを用いて、行列  $X_t = [y_{t-1}^T, y_{t-2}^T, \dots, y_{t-L}^T]^T$ ,  $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{tmax}]^T$ ,  $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{tmax}]$  として定義される ( $L$  は最大ラグ数)。観測された時系列データから、次のように推定がなされる。

$$\hat{B} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}, \hat{\Sigma}_v = \frac{1}{T}(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{B})^T(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{B}) \quad (19)$$

なお文献 [8] において議論されているように、回帰係数の推定には統計的なばらつきが伴うので、これを考慮して存在範囲を特定することが行われている。具体的には、行列  $B$  の列 (ベクトル化されたデータ) は平均が  $vec(\hat{B})$ , 分散が  $\hat{\Sigma} \otimes (X^T X)^{-1}$  の正規分布にしたがい、残差の分散共分散行列の逆数  $\Sigma_v^{-1}$  は 2 つのパラメータを含むウィシャート分布  $W_m(\hat{\Sigma}_v^{-1}/tmax, tmax)$  にしたがっている。ここでは詳細は省略する。

## (2) インパルス応答の生成

$\Sigma_v$  に対してコレスキー分解を適用して  $\tilde{A}\tilde{A}^T = \Sigma_v$  となるような行列を求める。この行列  $\tilde{A}$  を用いて、インパルス応答の生成のための入力  $a$  が  $a = \tilde{A}\alpha$  により形成される。ここで  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)^T$  はノルムが 1 であるベクトルである。計算を簡単にするために、この行列  $\tilde{A}$  のそれぞれの列  $i$  をインパルスとして入力した場合の応答を、 $r_i(k)$  ( $k$  は応答が計算されはじめてからの経過時間) としておく。

## (3) このインパルス $a$ についての応答を求める

すでに行列  $\tilde{A}$  のそれぞれの列  $i$  に対する応答が計算されているので、このインパルス入力に対する応答は次のようになる。

$$r_a(k) = \sum_{i=1}^m \alpha_i r_i(k) \quad (20)$$

符号制約については、例えば文献 [6] においては、次のように設定されている。金融ショックを唯一のショックと仮定する。ただし、ショックは特定の観測変数に割り当てられるものではなく、この唯一の変数のショックにより得られる政策変数の応答の符号について、現実の政策実施、すなわち金融政策の実施により一般的に観測される応答の符号から、もとのショックを金融ショックと定義する方法である。文献 [6] においては GDP price, nonborrowed reserve は上昇しない (符号はマイナス), federal fund rate は下落しない (プラスの符号となる) ような応答を仮定している。ただしこれ以外の変数である real GDP, total reserve, price index については、応答の符号制約は設けていない。

以上のような枠組みのもとで、応答の符号制約を導入するショック応答の評価方法は、以下のようになる。

## (i) VAR モデル係数の集合の推定

観測されたデータから基本となる VAR モデル、およびこれから派生する統計的に適用可能な VAR モデルの範囲 (集合  $\Omega$  としておく) を推定する。

(ii) VAR モデル係数の選択

集合  $\Omega$  からランダムに、ある VAR モデルの実現値係数ベクトルのセットを選択する。

(iii) インパルス入力を選択

この係数ベクトルを仮定した場合に、インパルス入力を単位ベクトル  $\alpha$  をランダムに選択することにより、それぞれの変数についての応答を求める。もし応答が符号制約された変数についての条件を満足している場合にはサンプルとして採用し、そうでない場合には採用しない。

(iv) 応答の集計

このようにして得られた応答の系列から、分散評価を行う。

## 4 非線形 VAR モデルの導入とショック誘発分析

### 4.1 GP による関数近似

従来から行われている VAR 解析は、基本的に線形の誘導形モデルを用いており、簡潔な形状を用いて統計的な性質が解明されている。このような簡潔な表現を非線形にまで拡張することは、方程式の近似において、最小 2 乗法などの統一的な手法が適用できない点に加えて、モデルを非線形化する労力と比較して性能向上が期待できないのではないかと懸念から、少なくとも経済分野においては、一般には行われていない。しかしながら、VAR モデルによる解析を他の分野に応用する場合には、直ちに非線形モデルを導入することが必要となる。このような事情を考慮して、以下では非線形 VAR モデルの導入と、このモデルを用いた場合のショック誘発分析を取り上げる。

GP はこれまで関数近似などの分野に応用され、有効性が確認されている [20]-[32]。本論文ではこの GP 手法を、非線形 VAR 関数を推定する問題に適用する。いま時系列ベクトル  $y_t$  の  $i$  番目の変数  $y_{i,t}$  について近似すべき非線形関数  $f_{i,t}(Y_t)$  を用いて、次のように表現する。

$$y_{i,t+1} = f_{i,t}(Y_t) + \varepsilon_{i,t}, Y_t = (y_{1,t}, y_{1,t-1}, \dots, y_{1,t-p}, y_{2,t}, y_{2,t-1}, \dots, y_{m,t}, \dots, y_{m,t-p})$$

なお本論文では GP 個体に含まれる演算子として、通常の四則演算（絶対値を求める演算を含む）を用いる。これ以外の種々の関数を用いることも可能であるが、関数の引数の範囲を 1~3 程度に正規化して分析するため、例えばべき乗関数と指数関数との間にはそれほど大きな差異が見られないことや、時系列そのものを生成する関数ではなく、その中に含まれる変換関数であることを考慮して、このような演算子を選択している。

### 4.2 GP による関数集合の推定

いま、非線形 VAR モデルにおける式を GP 手法により推定することができたと仮定した場合に、これらを線形 VAR モデルに適用した手法を拡張する必要がある。この場合、線形 VAR モデルに対するインパルス応答の計算手順で述べた第 2 番目のインパルス入力を生成する方法については、線形モデル

のケースと同様に行うことができるであろう。しかし、第 1 番目の推定されたモデル状態方程式の推定結果を、統計的に考えられる範囲にまでカバーすること、更にその中から適切に選択することについては、直接的に対応する方法論はない。すなわち、線形モデルの場合には、線形回帰の場合と同様に最小 2 乗法を適用し、そのモデル推定にともなモデルの精度も導出することができる。しかしながら、非線形モデル推定の場合には、そもそも式に示す関数の形状がばらばらであるケースも、統計的には含まれていると考えられる。更に、大きな問題は、時系列データから非線形関数を推定近似したとしても、得られる関数の形状は最も近似が優れていた関数だけであり、これ以外の関数は、近似のプロセスで廃棄されていることである。

この問題を解決する 1 つの方法として、本論文では GP 操作における交差処理での情報を利用することを行う。一般に GP 手法においては、与えられた時系列データに最も適合する関数だけが選択され、最終的に 1 つの関数だけが出力される。しかしながら、この途中においては適合度が相対的に高い個体関数に対応するが多数維持されており、交差処理の原資となっている。これらの適合度が相対的に大きな関数は、図式的に表現すれば最高の適合度をもつ関数の周辺に分布する関数であると言える。この場合、関数の性能はその適合度により与えられる。

このようなことを考慮して、次のような操作を用いることにより、線形 VAR モデルを用いたインパルス応答分析の第 1 段階で用いている VAR 係数の選択に類似する処理を、部分的に実現することができる。

- (i) GP による最適化の過程において適合度の相対的に大きな個体を残しておく。
- (ii) 適合度の最高値がある基準に達したら (すなわち関数の近似誤差がある基準より小さくなったら) GP 処理を終了する。
- (iii) 非線形 VAR モデルにおけるインパルス応答分析の場合に用いるモデルを、個体のプールから選択する。この場合、選択する確率を個体の適合度に比例させる。

### 4.3 非線形 VAR モデルにおける応答関数の変動

ここではインパルス応答関数から見た場合の、従来の線形 VAR モデルと、本論文で議論する非線形 VAR モデルの基本的な違いについて概要を説明する。その違いの特徴は、非線形モデルにおいては線形モデルと比較して応答の変動が小さくなる傾向にある点である。すなわち、与えられた観測時系列から線形モデルと非線形モデルを推定する手順においては、関数近似である点においては同じであるが、得られた関数の挙動には大きな差異が生まれる。いま時系列ベクトル  $y_t$  の  $i$  番目の変数  $y_{i,t}$  について推定された非線形関数  $f_{i,t}(Y_t)$  を用いて、式 (21) に示すように  $y_{i,t+1} \approx f_{i,t}(Y_t)$  として表現されていると仮定する。これを、現在の時刻  $t$  の変数の値 (点) においてテーラー展開する。この式は、以下のようになる。

$$y_{i,t+1} \approx \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p \theta_{ij,k} \Delta y_{j,t-k} + \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^p \frac{\partial f_{i,t}(Y_t)}{\partial y_{j,t-k}} \Delta y_{j,t-k} \quad (21)$$

なお偏微分の項は、時刻  $t - k$  において評価されると仮定する。

ここで最初に含まれる偏微分で記述されていない項は、線形 VAR に相当する項であり、これ以外の項は非線形モデルに固有の項となる。いま時系列の変動が相対的に小さいと仮定すると、時刻  $t$  と  $t+1$  とにおける偏微分の値は大きくは変化しない可能性がある。この値の符号を仮にプラスとしておく。一方、この偏微分の項目にかけられる時系列の変化分が仮にプラスになっている場合には、式 (22) にしたがって、次の時刻  $t+1$  における変数の値は、プラスの方向に動く可能性が増加する。当然、この変数以外の変数の影響もあるので、必ずしもプラスにはならないケースもある。しかしながら、線形モデルに相当する部分の項目と比較すると、ショック応答の時系列の変動が、抑制される傾向にあることが分かる。このように、非線形モデルにおいては、変数の時系列がいったん符号がプラスになる領域に入ると、プラスにとどまる可能性が増加する。このような現象は、本論文の応用例においても確認することができる。

#### 4.4 非線形関数近似への GP 手法適用

問題を分かりやすくするため、時系列の予測関数の推定問題をとりあげる。時系列を予測する方程式は木構造で表現できるが、これを前置表現 (prefix representation) により置き換えておく。例えば、方程式  $x_t = [3 \times x_{t-1} - x_{t-2}] \times [x_{t-3} - 4]$  は、次のように表現する。

$$\times - \times 3x_{t-1}x_{t-2} - x_{t-3}4 \quad (22)$$

このような前置表現のそれぞれを、個体とよぶ。

式 (1) に示すよう表現における変数に値を代入し、関数の値を求め、観測された時系列データ  $x_t$  との 2 乗誤差は近似度を与えるので、この逆数により個体  $i$  の適合度  $S_i$  を定義する。個体の適合度を逐次的に向上させることは、個体に対して交差処理、突然変異処理を行うことにより可能である。このため、*StackCount* というカウンタを用いる。*StackCount* の値は、前置表現で表現された個体のストリングを左側からサーチしていき演算記号に出会うとその数値を 1 つ増やし、被演算子に出会うとその数値を 1 つ減らす操作を実施した結果である。個体のストリングの全体をサーチし終えたあとに、*StackCount* の数値は必ず -1 になる。従って、GP における初期個体を生成するときに、この条件を満足しないものは個体として採用しない。

また、2 つの個体に対する遺伝的操作である交差処理を行う場合には、交差を実施する点 (交差点) における 2 つの個体の *StackCount* は同じである必要がある。個体 A の交差位置を乱数により選択し、この位置における *StackCount* を計算しておく。次に、個体 B について同じ *StackCount* をもつ位置を検出し、等確率で、ある 1 つの交差点を確定する。これらの位置を境界として、それぞれの個体の前半と後半を、相互に交換した個体が offspring として生成される。

以上のような方法をアルゴリズムとしてまとめると、次のようになる。

(ステップ 1)

乱数を用いて被演算子、演算記号の並びからなる初期個体のプール P-S を構成する。すでに述べた *StackCount* を用いて妥当性を検査する。

(ステップ 2)

個体に表現された関数をもとに、それぞれの個体により得られる予測値を求める。これをもとにして、個体における適合度  $S_i$  を求める。

(ステップ 3)

適合度に比例する確率に応じて、2つの個体  $i$  が選択され、この2つの個体に対して遺伝的操作を行い、生成された新しい個体を次のステップにおける代替個体のプールである P-B に格納しておく。このような新しい個体の生成を、規定回数繰り返す。新規個体の生成が終了したら、プール P-A(最初の繰り返しではこれはプール P-S に等しい)の個体の中で、相対的に適合度の低い個体を、プール P-B の個体により置き換える。この結果、プール P-A は、もともと存在する適合度の高い個体と、生成された適合度が高い個体から構成されることになる。

(ステップ 4)

ステップ 2 からステップ 4 までの交差処理をすべての個体に適用し、新しい個体のプールを作成したあとに、次に示す突然変異を実施する。突然変異は任意に個体を選択して、この個体の被演算子、演算記号の部分、任意に選択した被演算子、演算記号により置き換える。

(ステップ 5)

ステップ 2 からステップ 4 までの操作を規定回数繰り返す。

## 5 応用例

### 5.1 GP による非線形 VAR モデルの推定

本論文では提案する非線形 VAR モデルと従来の線形モデルの結果の比較分析を行うが、以下の理由により直接的に現実のデータを用いることにする。人工データを用いた検証方法を考察する場合に VAR モデルを複数の時系列生成の関数からなるシステムであるとみなすと、関数が既知であれば、容易に時系列が生成され、この関数に基づいて行われるインパルス応答の評価も実施することができる。しかしながら、このように任意に生成された多変数の関数においては、関数値が時間とともに発散しないことは保証されない問題がある。もちろん、関数値が発散しない条件を付加して関数を生成することも可能であるが、非線形関数の場合には、この確認は容易ではない。このようなことを考慮して、以下では、次のような手順で、現実のデータを用いて GP 手法による非線形関数近似の性能を、線形のそれと比較する。

(1) 現実の多変量観測データの収集

インパルス応答に対する符号制約問題において非線形 VAR モデルを適用する場合、対象は社会システムに多く見られ、本論文でもこれにしたがい2つの事例をとりあげることとする。応用例は政策実施の評価に関連したものであるが、文献 [3]-[12] にしたがってデータ収集を行いながら、問題をやや簡素化して議論する。

本論文で用いるデータは表2に示すような多次元の時系列ベクトルのデータであるとみなし、このデータを用いて、時系列モデルの推定を行う。

表2. 検証に用いる時系列データ

変数名	意味	変数名	意味
$x_{1,t}$	国内総生産	$x_{5,t}$	労働時間
$x_{2,t}$	個人消費	$x_{6,t}$	物価指数
$x_{3,t}$	民間投資	$x_{7,t}$	雇用率
$x_{4,t}$	労働生産性	$x_{8,t}$	名目利子

これらは日本の経済に関するデータであり観測期間は1980年～2005年で、年4回観測される(いわゆる4半期データ)。なお、これらのデータをすべて用いることは、次元が極めて大きくなる問題があるので、2つのケースに分けて部分的に用いることにする。これらのケース分けは、次の節においても用いることにする。Case 1は政策実施による雇用などの変化を見るものであり、Case 2は企業活動の変化を見るものである。

Case 1 に用いる変数: $x_{1,t}, x_{4,t}, x_{5,t}, x_{7,t}$

Case 2 に用いる変数: $x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{6,t}, x_{8,t}$

なお、比較分析においては変数の意味づけについては特に議論しないので、分かりやすくするため、選択された変数の名前を、以下では単にCase 1では $y_{1,t} \sim y_{4,t}$ 、Case 2では $y_{1,t} \sim y_{5,t}$ としておく。

### (2) GP手法と既存の線形VAR手法によるモデル推定

それぞれのケースごとに観測データを入力データとして、GP手法および既存の線形VAR手法により時系列モデルを推定する。モデルの推定における時間遅れ(ラグ)の最大値は、 $L = 3$ としておく。

### (3) 残差の比較

GP手法と既存の線形VAR手法の2つのモデル推定の性能を比較する方法として、モデルにおける残差を用いる。具体的には、GP手法と既存の線形VAR手法により近似された関数と、観測データとの間の平均平方2乗誤差を残差として定義する。

GP手法を用いた関数近似の方法適用における条件は、以下のようにになっている。

GP 個体のプールにおける個体総数:1000

個体の最大の配列長さ:30

GP 適用回数:すべての関数において300回を上限

表3には、このような方法により求められた2つの手法における時系列モデル推定の残差を示している(時系列そのものの値は比較分析において特に必要ないので、残差だけを示す)。また表4にはGP手法により推定された非線形VARモデルの関数を示している。表3では表現を簡潔にするため、例えば変数 $y_{2,t-2}$ を $y2(-2)$ として示している。なお結果はGP手法および線形VAR手法について近似誤差が最小となるケースだけを示し、統計的なばらつきについては示していない。横の欄は、モデルの左辺にある変数の名称(例えば線形回帰モデルにおいては被説明変数)を意味している。なお、この表において、ケース分けCase 1-G、Case 1-Lは、それぞれCase 1においてGP手法および線形VAR手法を適用した結果などであることを示している。

この結果から分かるように、GP 手法により得られる非線形ベクトル自己回帰モデルの当てはめの性能は、線形のそれよりも同等であるが、やや優れている結果となっている。更に表 3 の結果から分かるように、非線形 VAR モデルにおいては線形 VAR モデルにおける式と比較して、含まれる変数が極端に少なくなっており、簡潔な表現となっている（線形 VAR モデルの場合には、ラグの長さや変数の個数をかけた数に相当する変数が式に含まれる）。

なお推定された非線形 VAR モデルにおけるインパルス応答を計算するには、残差  $\varepsilon_{i,t}$  から推定される分散共分散行列  $\Sigma_e$  を求めておく必要がある。この残差の分散共分散行列を  $\Sigma_e$  を計算し、行列のコレスキー分解を求める。なお非線形 VAR モデルの利用方法は線形 VAR モデルにおける残差の分散共分散行列  $\Sigma_v$  と同様である。

表 3. 時系列モデル推定の残差

cases	$y_{1,t}$	$y_{2,t}$	$y_{3,t}$	$y_{4,t}$	$y_{5,t}$
Case 1-G	0.028	1.09	0.09	0.017	-
Case 1-L	0.026	1.67	0.11	0.023	-
Case 2-G	0.027	0.020	0.030	0.001	0.16
Case 2-L	0.023	0.018	0.032	0.0023	0.23

表 4. GP 手法により推定された非線形 VAR モデルの関数

case 1
$y1 =  y1(-1) + 0.09( y1(-3) + y1(-1)^2 y3(-3) - y1(-1) + 0.07  + y3(-2))(y1(-3) + (y3(-1) + 0.08)y1(-1) - 0.08 + y3(-1)) $
$y2 = y1(-2) + 0.47 y3(-2) +  y3(-3) + (y2(-1) + 0.08)y4(-2) + 0.07 $
$y3 =  y1(-2) + 0.09y4(-3)y1(-1) - 0.09y4(-2)y1(-2) + 0.08y4(-3)y1(-1) + 0.07 y3(-1) + 0.08$
$y4 = y1(-1) + 0.09( y1(-3) + y3(-3) - y1(-1)^4 y4(-1) + 2.5  + 0.5y3(-3)y3(-2))$
case 2
$y1 = y1(-2) + 0.09 1.4 - y1(-2)  0.93 - y1(-2)  0.46 +  0.47 - y5(-1) + 0.07 - y3(-3) $
$y2 = y1(-1) + 0.07y1(-1)(y1(-3) - y3(-2) - y1(-1) + y4(-3) + (0.23 + y2(-3))y3(-3) - 0.16)$
$y3 =  y1(-1) + 0.09( y3(-2) + y3(-1) - (y2(-1) + 0.09)^2(y2(-2) - 0.08)(y1(-1) + 0.08)y1(-1) - 0.08  + y3(-2)) $
$y4 = 0.47 0.47 +  y3(-2) +  y2(-3) + 0.47 - y3(-2) + y1(-1) + y4(-3) + 0.47   - y4(-3) + y2(-3) $
$y5 =  (y2(-3) - 0.93)^2(0.99 - y2(-2) + y4(-2) - y1(-1)) + y5(-1) $

## 5.2 インパルス応答の符号制約に比較分析

次に、前節で用いた 2 つのケースについて、ショック応答における線形モデルと非線形モデルの差異について、シミュレーションをもとにして議論をする。すでに述べた 2 つのケースにおけるインパルス応答の符号制約を、以下のように設定する。

$$\text{Case 1: } y_{1t} \geq 0, y_{4t} \geq 0, t = 1 \sim K$$

$$\text{Case 2: } y_{1,t} \geq 0, y_{2,t} \geq 0, y_{3,t} \geq 0, t = 1 \sim K$$

なお、このような設定が妥当であることと、このような制約をインパルス応用に加える意味については、文献 [5]-[12] に詳細に述べられているので、ここでは詳細は省略する。簡単に述べれば、これら Case 1, Case 2 において、投資活動により雇用や生産活動が活発化する大きさと、持続性を検証していることになる。

まず図1においては、代表的な事例として Case 2 における変数  $y_{1,t}$  について、符号制約された変数の時刻  $t = 0$  における値を記録し、値の最大値と最小値の間を等間隔に区分した場合の存在範囲を、ヒストグラムとして示している。上と下の図はそれぞれ、非線形 VAR モデルと線形 VAR モデルに対応している。また図2においては同じく変数  $y_{1,t}$  について、時刻  $t = 0$  から  $t = K$  までの時期にわたって変数の応答について入力するインパルスを変えた場合の結果を図示している（上と下の図はそれぞれ、非線形 VAR モデルと線形 VAR モデルに対応している）。なおこの図2においては変数の符号制約は  $t = 0 \sim K, K = 4$  の範囲だけであり、これを超える時刻においては、変数の符号は特に制約されていない。

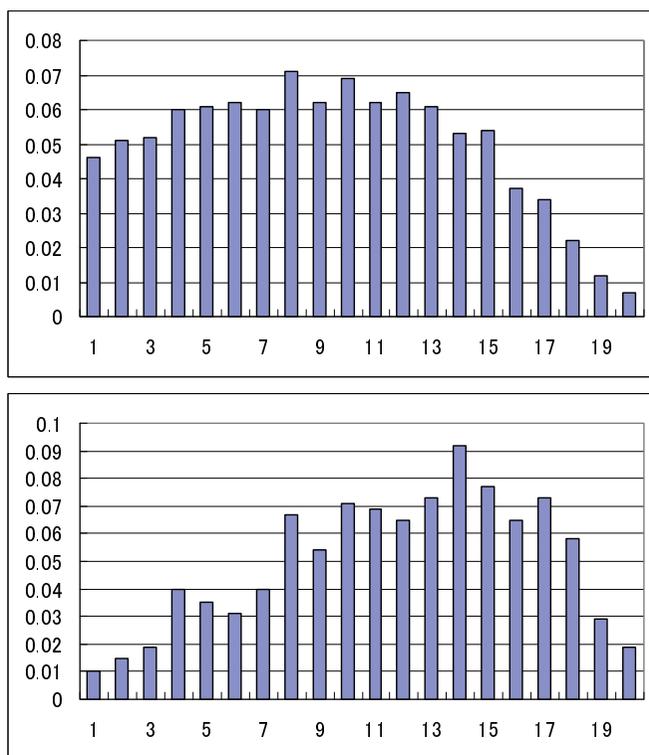


図1. 変数の時刻  $t = 0$  における値のヒストグラム (上:非線形 VAR モデル, 下:線形 VAR モデル)

図1に示す時刻  $t = 0$  におけるインパルス応答の大きさの分布の差異は、通常行われるコルモゴロフ・スミルノフ検定により検証が可能である。この検定において必要となる2つのインパルス応答における値の分布の差異に対応するカイ2乗値を求めると、Case 1(Case 2)の変数  $y_{1,t} \sim y_{4,t} (y_{1,t} \sim y_{5,t})$  について以下のような数値であることが分かる。

Case 1: 1.2, 2.1, 5.6, 25.1

Case 2: 2.5, 4.6, 13.5, 3.4, 10.6

この結果2つの分布が統計的に等しいという仮説（帰無仮説）が成立するには、これらのカイ2乗値が5.99以下である必要があることから、この仮説は棄却される（2つの分布はCase 1とCase 2とのい

ずれにおいても等しくない) ケースとそうではないケースが混在することになる。したがって分析の対象とする時系列は同じであるが、インパルス応答の初期値を生成する段階において、すでいくつかのケースにおいて 2 つのモデル分析における違いが発生している。

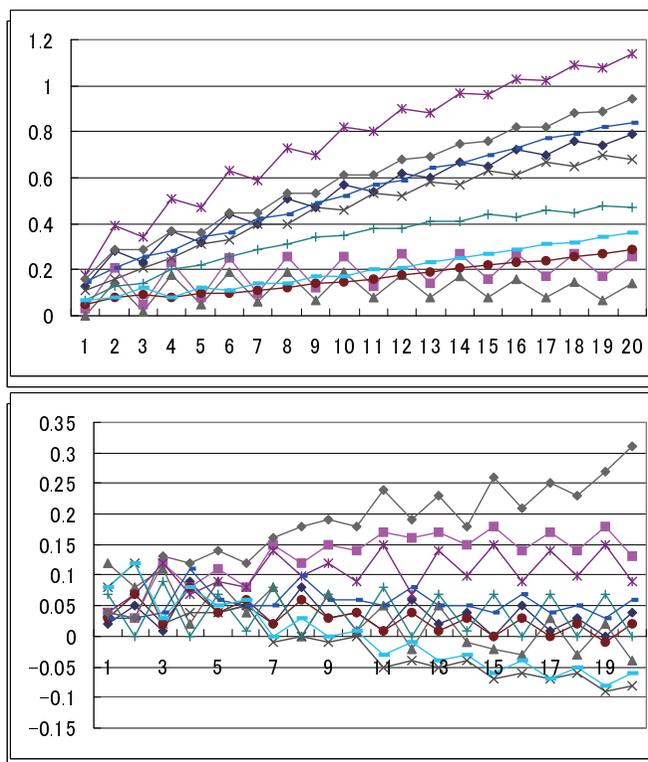


図 2. 時刻  $t = 0$  から  $t = K$  までのインパルス応答の例  
(上:非線形 VAR モデル, 下:線形 VAR モデル)

このような 2 つのモデルにおける符号制約の差異を分析する方法として、予測誤差を比較する方法なども適用可能であるが、ここではより直接的な方法を用いることにする。インパルス応答の符号制約を満足する応答データについて、更に応答の推定を先の時刻  $t = k$  まで行い、これらの中央値と、統計的なばらつきの範囲を求めておく。なお、これらの統計量を求めるためには、線形 VAR モデルにおいては、統計的にばらつきの範囲内にある係数を用いた複数個の組み合わせ (ここでは 30 個の組み合わせを用いる) によりシミュレーションを行う。同様に GP 手法により近似された関数を用いてインパルス応答を求める場合には、GP 操作において相対的に適合度が大きかった複数の組み合わせ (ここでは 10 個にしておく) から関数を選択して、シミュレーションを行う。

なおすでに述べたように、線形 VAR モデルと GP 手法に基づく非線形 VAR モデルとでは、符号制約を満足するインパルス応答の個数に大きなひらきがある。例えば線形 VAR モデルにおいては、Case 1, Case 2 のそれぞれにおいて 10 万個生成したインパルス入力に対して、符号制約を満足する応答はそれ

それぞれ 162 個, 480 個である. 一方, 非線形 VAR モデルの場合には, Case 1, Case 2 のそれぞれにおいて 1 万個生成したインパルス入力に対して, 符号制約を満足する応答は 4116 個, 3837 個となっている.

図 3 にはこのような事例を示している. 図 3 において, インパルス応答の中央値は Q2 として表示し, 16 パーセンタイル, 85 パーセンタイルはそれぞれ Q1, Q3 として表示している. このようなインパルス応答の中央値およびパーセンタイルの範囲を, 符号制約が課せられているすべての変数について求め, 代表事例である Case 2,  $x_{1,t}$  における差異として表にまとめたものが表 5 である. 表 5 において横の横はインパルス応答関数の観測時刻  $t = k$  であり, 欄の中には 2 つの手法により得られるインパルス応答の中央値 (Q2) とパーセンタイル (Q1, Q3) の間の差異の平均値を本論文の手法により得られる Q1, Q2, Q3 の値で割った相対値として示している. この表より分かるように, インパルス応答関数を観測する時刻が進むにつれて, 2 つの手法により推定されたインパルス応答の範囲が大きくなっていく. したがって, 従来から行われている線形の VAR モデルによるショックの持続分析は, より正確な分析により従来とは異なった視点からの分析が見出される可能性がある.

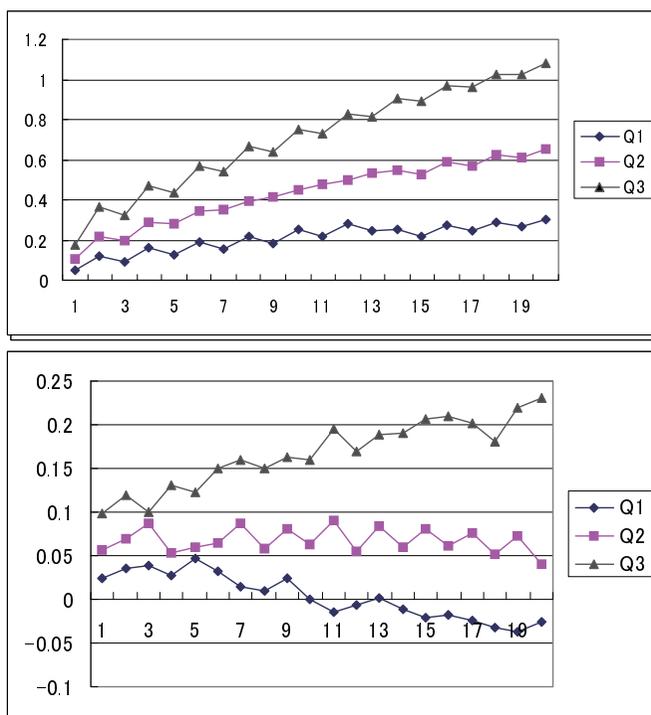


図 3. 統計的広がりの比較分析 (インパルス応答の中央値とパーセンタイル)

表 5. 2 つの手法による中央値とパーセンタイルの差異

cases	$k = 1$	$k = 5$	$k = 10$	$k = 15$	$k = 20$
Q1	0.46	0.64	1.00	1.09	1.08
Q2	0.45	0.71	0.86	0.84	0.93
Q3	0.44	0.71	0.83	0.76	0.85

## 6 むすび

本論文では、符号制約をともなうインパルス応答をもつ VAR モデルにおける遺伝的プログラミングを用いた非線形近似手法の適用について述べた。応用例において GP 手法による非線形関数近似の性能を評価し、非線形 VAR モデル適用による効果を、通常の線形 VAR モデルを適用した場合の結果と比較し検証した。

今後の課題として、より多くの分野における本論文の手法の適用可能性の検証と効率的な方法の開発があり、検討を行う予定である。

## 参考文献

- [1] C.Simes, “ Econometric and reality,” *Econometrica*, vol.48,pp.1-48, 1980.
- [2] R.B.Litterman, “ A random walk markov model for the distribution of time series,” *Journal of Business, and Economic Statistics*, 1983.
- [3] O.J.Blanchard and D.Quah, “ The dynamic effects of aggregate demand and supply disturbances,” *American Economic Review*, vol.79,no.4,pp.655-673, 1989.
- [4] R.G.King and M.W.Watson, “ Money,prices,interest rates, and the business cycle,” *The Review of Economics and Statistice*, vol.78,no.1,pp.35-53, 1996.
- [5] N.R.Francis,M.T.Owyang and A.T.Theodorou, “ The use of long-run restrictions for the identification of technology shocks,” *The Federal Reserve Bank of St Louis Review*, vol.85, no.6, pp.53-66, 2003.
- [6] H.Uhlig, “ What are the effects on monetary polocy on output? Results from an agnostic identification procedure,” *Journal of Monetary Economics*, vol.53,pp.381-419, 2005.
- [7] J.D.M.Fisher,“ The dynamic effects of neutral and investment specific technology shocks, *Journal of Political Economy*, vol.114,no.3,pp.431-451, 2006.
- [8] 北川源四郎, 川崎能典, “ 時系列モデルによるインフレ率予測誤差の分析,” 日本銀行調査統計局, Working Paper 01-13, 2001.
- [9] 鎌田康一郎, 須合智広, “ 政策金利ゼロ制約下における金融政策効果の抽出,” 日本銀行調査統計局, Working Paper no.06-J-13, 2006.
- [10] 粕谷宗久, 福永一郎, “ 金融政策効果のレジーム変化:円滑遷移 VAR モデルによる分析,” 日本銀行調査統計局 Working Paper 03-7, 2003.

- [11] M.Lanne,H.Lutkepohl and K.Maciejowska, “ Structure vector autoregressions with Markov switching,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.34, pp.121-131, 2010.
- [12] E.Mertens, “ Structure shocks and the comovements between output and interest rates,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.34,pp.1171-1186, 2010.
- [13] R.Faccini and S.Ortiguwra, “ Labor-market volatility in the search-and-matching model: The role of investment-specific technology shocks,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.34, pp.1509-1527, 2010.
- [14] C.A.Meh and K.Moran, “ The role of bank capital in the propagation of shocks,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.34, pp.556-576, 2010.
- [15] M.Eichenbaum, “ Real business-cycle theory; wisdom or whimsy?,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.15,pp.607-626, 1991.
- [16] P.Ireland, “ Technology shocks and the business cycle:an empirical investigation,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.25,pp.703-719, 2001.
- [17] P.Ireland, “ A method for taking models to the data,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.28,pp.1205-1226, 2004.
- [18] N.Francis and V.Ramey, “ Is the technology-driven real business cycle hypothesis dead? Shocks and aggregate functions revisited,” *Journal of Monetary Economics*, vol.52,pp.1379-1399, 2005.
- [19] J.Malley and U.Woitek, “ Technology shocks and aggregate fluctuations in an estimated hybrid RBC model,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.34, pp.1214-1232, 2010.
- [20] X Chen and S.Tokinaga, “ Approximation of chaotic dynamics for input pricing at service facilities based on the GP and the control of chaos,” *IEICE Trans.Fundamentals*, vol.E85-A,no.9,pp.2107-2117, 2002.
- [21] Y.Ikeda and S.Tokinaga, “ Chaoticity and fractality analysis of an artificial stock market by the multi-agent systems based on the co-evolutionary Genetic Programming”, *IEICE Trans.Fundamentals*,vol.E87-A,no.9,pp.2387-2394, 2004.
- [22] S.Tokinaga,J.Lu and Y.Ikeda, “ Neural network rule extraction by using the Genetic Programming and its applications to explanatory classifications,” *IEICE. Trans.Fundamentals*,vol.E88-A,no.20,pp.2627-2635, 2005.
- [23] 池田欽一, 陳曉榮, 時永祥三, “ GP による学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるブライシング時系列のカオス性分析とその応用”, 電子情報通信学会論文誌, vol.J89-A,no.4,pp.298-307, 2006.

- [24] 池田欽一, 時永祥三, 呂建軍, “ 遺伝的プログラミングと遅延とモグララフィを用いたネットワーク構成の同定と内部遅延時間の推定”, 情報処理学会論文誌, vol.47, No.SIG 1(TOM 14), pp.12-18, 2006.
- [25] 池田欽一, 陳曉榮, 時永祥三, “ GP による学習を基礎としたマルチエージェント・システムによるブラising時系列のカオス性分析とその応用”, 電子情報通信学会論文誌, vol.J89-A, no.4, pp.298-307, 2006.
- [26] Y.Ikeda and S.Tokinaga, “ Multi-fractality Analysis of time series in artificial stock market generated by multi-agent systems based on the Genetic Programming and its applications,” *IEICE Trans.Fundamentals*, vol.E90-A, no.9, pp.2212-2222, 2007.
- [27] 時永 祥三, 岸川 善紀, “ 遺伝的プログラミングと多段ファジィ推論に基づくジャンプ過程を含む時系列生成モデルの推定,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J93-A, no.5, pp.365-374, 2010.
- [28] 時永 祥三, 譚 康融, “ 遺伝的プログラミングによる方程式近似に基づく粒子フィルタを用いた時系列からの状態推定とその変動抑制への応用,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J93-A, no.5, pp.365-374, 2010.
- [29] Y.Ikeda and S.Tokinaga, “ Discriminant analyses of stock prices by using multifractality of time series generated via multi- agent systems and interpolation based on wavelet transforms,” *IEICE Trans.Fundamentals*, vol.E93-N, no.10, pp.12-29, Oct. 2010.
- [30] J.R.Koza, *Genetic Programming*, MIT Press, 1992.
- [31] J.R.Koza, *Genetic Programming II: Automatic Discovery of Reusable Programs*, MIT Press, 1994.
- [32] M.J.Keith and M.C.Martin, “ Genetic programming in C++: Implementation issues”, in (ed) K.E.Kinnerar, Jr., *Advance in Genetic Programming*, MIT Press, 1994.
- [33] J.B.Shoven and J.Whallry, *Applied General Equilibrium*, Cambridge University Press, England, 1992. (邦訳:小平裕応用一般均衡分析, 東洋経済新報社, 1993).
- [34] J.B.Shoven and J.Whalley, “ A general equilibrium calculation of the effects of differential taxation of income from capital in the U.S,” *Journal of Public Economics*, vol.1, pp.281-322, 1972.
- [35] 中西一, 時永祥三, “ 応用一般均衡による社会基盤整備のモデル分析とその応用,” 『経済学研究』, vol.75.no.1, pp.25-55, 2008.
- [36] S.Schmitt-Grohe and M.Uribe, “ Solving dynamic general equilibrium models using a second-order approximation to the policy function,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, vol.28, pp.755-775, 2004.

付録 DSGE モデルの事例

DSGE モデルは通常の VAR モデルと比較してやや複雑な構造をしており、解析の手順を対比する意味で、文献 [14] に示されている代表事例について、概要を示す。詳細を述べるのが目的ではないので、適宜省略する。この DSGE モデルでは、均衡分析の対象となる部分が 5 つに分かれている。これらは、(1) 家計の効用最大化行動、(2) 中間財を生産する企業の利益最大化行動、(3) 企業と資金貸付をする銀行の利益最大化行動、(4) 企業と資金貸付をする銀行の支出と蓄積の最適化行動、(5) 市場の決済条件 (market-clearing conditions) である。

(i) Final good production

企業は時刻  $t$  における  $j$  番目 ( $0 \leq j \leq 1$  は実数表現) の中間財  $y_{jt}$  を用いて最終財を  $Y_t = [\int_0^1 y_{jt}^{(\eta_p-1)\eta_p} dj]^{\eta_p/(\eta_p-1)}$  だけ生産する (いわゆる Dixit-Stiglitz aggregator)。ここで  $\eta_p > 1$  は、中間財の代替の弾力性である。利益を最大化する一階の条件 (解) より、中間財の投入は最終財の価格  $P_t$  を用いて  $y_{jt} = (p_{jt}/P_t)^{-\eta_p} Y_t$  のように決められる。また、企業の利益ゼロの条件より  $P_t = [\int_0^1 p_{jt}^{1-\eta_p}]^{1/(1-\eta_p)}$  となる。

(ii) Intermediate good production

中間財  $j$  を製造する企業は、独占的に生産関数  $y_{jt}$  を用いて中間財を生産する。関数の詳細は省略するが、その生産技術係数を  $z_t$  としておく。特に、生産技術係数は、定数  $\rho_z$  および正規乱数  $\varepsilon_{zt} \sim N(0, \sigma_z)$  を用いて表現された、次のような技術ショックにしたがって変動すると仮定する。

$$\log z_t = \rho_z \log z_{t-1} + \varepsilon_{zt} \tag{23}$$

次に与えられた需要レベルのもとで生産コスト最小化の条件を定式化し生産数量の最大化の制約条件のもとで一階の条件を求めると、財の限界コストをラグランジュ乗数  $s_t$  とする解が得られる。このような過程を用いて中間財の価格は最終財のインフレ率  $\pi_t = P_t/P_{t-1}$  を用いて、 $p_{j,t+k} = \prod_{s=0}^{k-1} \pi_{t+s} p_{jt}$  のように表現できる。これらの関係式を用いて再度最適化の式を整理すると、次のようになる。

$$\max E[\sum_{k=0}^{\infty} (\beta\phi_p)^k \lambda_{t+k} [\frac{p_{j,t+k} y_{j,t+k}}{P_{t+k}} - s_{t+k} y_{j,t+k}]]$$

これを最大化することにより、最終財の価格についての最適解の表現が得られる。

(iii) Capital good production (いわゆる設備投資の決定)

この部分が文献 [14] における 1 つの特徴となっており、企業が設備投資をする場合に、銀行から借入を行うが、その態度あるいはケースについて、次の 3 つが仮定される。企業は  $i_t$  を投資して、成功なら  $Ri_t$  ( $R > 1$ ) のリターンが得られる (失敗ならゼロ) と仮定する。企業は、以下の 3 つのケースから 1 つを選択する。(1)  $\alpha^g$  の確率で高い成功が得られるが企業の利益はゼロ、(2)  $\alpha^b (< \alpha^g)$  のやや低い確率で成功するが、企業にも利益  $bi_t$  がある、(3) 同様に低い成功確率  $\alpha^b$  であるが、企業には更に高い利益  $Bi_t$  ( $B > b$ ) がある。この問題を解決するために、銀行はインセンティブを設定することになる。

(iv) Financing entrepreneurs: the financial contract

投資により得られる利益を、企業と銀行、さらに銀行に投資出資を行う投資家の間で分け合うための、最適化条件を求める。これらの 3 者の利益率を  $R_t^e, R_t^b, R_t^h$  としておくと  $R_t^e + R_t^b + R_t^h = R$ 、と

なり投資の成功確率の差異である  $\Delta\alpha = \alpha^g - \alpha^b$  などを用いて、3つの変数が記述されることが分かる。更にこの結果を用いると、最適な投資金額が、 $\Delta\alpha$  などを用いて表現される係数  $G_t(\cdot)$  を用いて、 $i_t = (a_t + n_t)/G_t$  として一意的に表現される ( $a_t, n_t$  は企業と銀行の正味価値である)。

(v) Household

家計は労働による収入を消費するほか、この収入の部分を現金と預金に振り分け保持しながら、証券投資を行う。時刻  $t$  における現金所有と移転所得をもとにして、銀行預金と現金所有を判断する。時刻  $t$  における消費、証券投資、および時刻  $t+1$  への繰越を、原資をもとに予算制約のもとで実施する。効用関数を仮定し、最適化の1階の条件から、それぞれの分野への配分が決定される。ただし、これらの配分の式には、時刻  $t$  における値だけではなく、時刻  $t+1$  の変数も含まれている。

(vi) Wage setting

セクター  $i$  ごとの賃金  $W_{it}$  は、中間財と最終財の生産量と似たような形でまとめられる。家計が供給するセクター  $i$  への労働投入を  $l_{it}$  とすると、全体の投入は  $H_t = (\int l_{it}^{(\xi_w-1)/\xi_w} di)^{\xi_w/(\xi_w-1)}$  として記述できる。これにより、当該セクター  $i$  の労働需要は  $l_{it} = (W_{it}/W_t)^{-\xi_w} H_t$  となる。ここで  $W_t$  は統合された賃金であり、労働投入の単価となる。したがって、それぞれのセクターにおける労働単価との関係は、 $W_t = (\int W_{it}^{1-\xi_w} di)^{1/(1-\xi_w)}$  により結ばれる。このように示される関係式を用いて、生産最適化の条件から最適な単価が求められる。

(vii) Entenpreneurs and bankers

企業は投資の高い確率での成功よりは低い成功のもとでも相対的に有利な利益を得ようとするが、一方では銀行は貸付資金の円滑な回収を望むので、投資の高い成功を要求する。このような両者の間での相互関係がバランスする条件より、企業と銀行の正味価値  $a_t, n_t$  の関係式が、貸し出し金利 (いわゆる公定歩合) である  $r_t$  などの係数を含んだ式として得られる。

(viii) Monetary polocy

金融政策ショック (monetry polocy shocks) を定義しているが、この場合には次の利子率の生成モデルを用いている。

$$r_t^d = (1 - \rho_r)r^d + \rho_r r_{t-1}^d + (1 - \rho_r)[\rho_\pi(\pi_t - \bar{\pi}) + \rho_y \hat{y}_t + \varepsilon_t^{mp}] \quad (24)$$

$r^d$  は定常的な利率、 $\bar{\pi}$  は金融当局によるインフレターゲット、 $\hat{y}_t$  は産出における定常的なレベルからの乖離であり、最後の  $\varepsilon_t^{mp}$  が金融政策ショックに相当する乱数項である。

(ix) Aggregation and competitive equilibrium

市場においては、生産から撤退する企業や新たに参入する企業を存在するで、これらのすべてを総合した場合の、企業と銀行の正味価値  $A_t, N_t$  を求める。文献 [9] のモデルで1つのポイントとなっているのは、 $A_t, N_t$  に関する時刻  $t$  と時刻  $t+1$  における関係式が含まれていることである。

$$N_{t+1} = [r_{t+1} + q_{t+1}(1 - \delta)]\tau^e \alpha^g R_t^e J_t + w_t^e \eta^e, J_t = (A_t + N_t)/G_t \quad (25)$$

$$A_{t+1} = [r_{t+1} + q_{t+1}(1 - \delta)]\tau^b \alpha^g R_t^b J_t + w_t^b \eta^b, \quad (26)$$

次に、市場における均衡条件が、次のように整理される。

$$K_t = K_t^h + K_t^e + K_t^b, u_t K_t^h + K_t^e + K_t^b = \int_0^1 k_{jt} dj \quad (27)$$

$$H_t = \int_0^1 h_{jt} dj, Y_t = C_t^h + C_t^e + C_t^b + I_t + \mu I_t \quad (28)$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + \alpha^g R I_t, \eta^b d_t = \eta^h (D_t/P_t), \bar{M}_t = \eta^h M_t \quad (29)$$

時永 祥三〔九州大学大学院経済学研究院 教授〕  
 岸川 善紀〔宇部高等専門学校経営情報学科 准教授〕