

Study of Drift-Diffusion Systems : Well-posedness, Singularity and Regularity

三浦, 正成

<https://hdl.handle.net/2324/1931730>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : やむを得ない事由により本文ファイル非公開 (3)

氏 名	三浦 正成			
論 文 名	Study of Drift-Diffusion Systems — Well-posedness, Singularity and Regularity — (移流拡散方程式系の研究 — 適切性, 特異性, 正則性 —)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	杉山由恵
	副 査	九州大学	教授	川島秀一
	副 査	早稲田大学	教授	小菌英雄
	副 査	九州大学	助教	関 行宏

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

三浦正成氏は、非線形偏微分方程式を専門とし、特に Keller-Segel 系を主たる研究対象としている。Keller-Segel 系は、1970 年に Keller と Segel によって提唱された非線形放物形方程式系であり、特に半線形については解の空間次元と初期データとの微妙なバランスのもとに、時間大域的存在や有限時刻爆発解の存在が顕著に現れる非線形方程式のモデルとして活発に議論されてきている。同系は、多くの媒介変数を有し、その取り方により豊富な構造を内在しており、流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式と肩を並べる研究題材を提供している。

三浦正成氏は、Keller-Segel 系の中でも、取り扱いの困難な強い非線形を有する「準線形 Keller-Segel 方程式系」を扱い、初期値問題の弱解の一意性という基礎的な数学問題に取り組んだ。また、同氏は、二つの走化性現象《双対走化性》と《流体型走化性》を同時に加味した新規性の高い方程式系の数学解析に取り組んできた。同方程式系は、同氏を含む著者ら (Kozono-Miura-Sugiyama) により構築され、世界で初めて数学的解析が試みられた方程式系である。同氏らは、可解性すら非自明な研究課題に真っ向から挑戦し、初期値問題の適切性に留まらず、特異性解析に至る研究成果を挙げている。

同氏は、上述のように、多様な非線形性を考慮した Keller-Segel 系について、多様な研究課題に挑戦してきた。同氏は、これまでの一連の研究成果を、序文と二部構成全四章からなる博士論文として纏めている。以下全四章の内容を述べる。

第一章では、準線形、特に退化型・特異型を考慮した放物-放物型 Keller-Segel 方程式系を扱い、弱解という広いクラスの解について、解の一意性を証明している。退化型 Keller-Segel 系については、先行研究として[Sugiyama-Kunii,2006]により弱解の存在が保証されている。しかしながら、解の一意性問題は、退化性依存の正則性損失に起因する困難さから、長い間未解決問題とされてきた。第一章では、同問題をポジティブに解いた研究成果について解説している。特筆すべき点は、退化型 Keller-Segel 系の一意性が(関数に可微分性を課さない)Hölder 連続な関数空間において証明されていることである。証明には、弱解の定義式に現れるテスト関数を未知関数とし、線形熱方程式の可解性に一意性問題を帰着させるという双対性議論を採用している。同時に“vanishing viscosity method”を組み合わせることで、退化性・特異性に由来する困難さを克服している。証明の鍵となるのは、双対方程式の近似項の有する近似パラメータに依存しない L^2 -評価の確立である。同評価は“energy method”と Brezis-Gallouet-Wainger 対数型 L^∞ -評価と Besov-Chemin-Lerner 空

間に於ける最大正則性評価、更に L^p -最大正則性評価や Schauder 評価を併用して保証される。三浦氏の同問題の貢献は、正にこの鍵にあたる「Besov-Chemin-Lerner 空間に於ける最大正則性評価の適応」にある。

第二章では、正負の両走化性を考慮した流体型方程式系を考察し、初期値問題の時間大域的適切性について論じている。より詳細には、非圧縮 Navier-Stokes 方程式と連立した走化性方程式の小さな初期値に対する時間大域的軟解の存在、一意性、初期値への連続依性、および時間大域的安定性を証明している。証明には Banach 空間における陰関数定理が重要な役割を果たす。ここで、初期値の属する関数空間として、(i) 尺度不変であり、(ii) 弱 L^p -空間を採用していることに注意したい。

第三章では、非圧縮 Navier-Stokes 流の影響下における Keller-Segel 方程式系の特異性解析について考察し、個体の初期質量に比して初期凝集が大きく流体擾乱が小さい場合には、解が有限時刻爆発現象を呈することを示している。古典的な放物-楕円型 Keller-Segel 方程式系では、対応する結果が既に得られているが、流体による定常性破壊効果により、特異性解析は格段に難しくなる。このような困難さを克服し、爆発を誘導する初期条件と流体関数へのクライテリアを確立したことは意義が大きい。

第四章では、第三章で扱った方程式系を空間 3 次元以上で考察し、解の正則性について論じている。同時に、同方程式系が強解を有することを証明している。本章の研究成果は、三浦正成氏の単独として完成されており、強解の構成に成功する議論の本質は、同氏が改良した paraproduct formula にある。

博士論文で解説されている研究成果は、いずれも三浦正成氏の卓越した計算技術を基礎としている。また、初期値問題の適切性解析（解の存在・一意性・初期値への連続依存性）という塗り替えられない基礎定理を確立している点も評価できる。退化型 Keller-Segel 系の一意性といった、長い間の未解決問題にも真っ向から果敢に挑戦し成果を挙げている一方で、流体型双対走化性といった新規性の強い方程式系をも取り組み、反応拡散方程式系の数学解析分野においてきわめて価値のある業績を積み上げてきたと認められる。

以上の理由により、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。