九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

「待ち行列の長さ＝待ち人数」でよいのか？

柳澤，大地
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻 | 独立行政法人日本学術振興会

田中，裕貴
東京大学大学院工学系研究科航空宇宙工学専攻

姜，鋭
中国科学技術大学工程科学学院

友枝，明保
明治大学先端数理科学インスティテュート

他

https://doi.org/10.15017/18723

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (33), 2010-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 33 (pp. 210-215)

「待ち行列の長さ＝待ち人数」でよいのか？

柳澤 大地 (YANAGISAWA Daichi), 田中 裕貴 (TANAKA Yuki), 姜 鋭 (JIANG Rui), 友枝 明保 (TOMOEDA Akiyasu), 大塚 一路 (OHTSUKA Kazumichi), 須摩 悠史 (SUMA Yushi), 西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)

(Received February 1, 2010)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

「待ち行列の長さ＝待ち人数」でよいのか？

東大 工 航空宇宙, (独) 日本学術振興会 特別研究員 DC1	柳澤大地	(YANAGISAWA Daichi)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻	田中裕貴	(TANAKA Yuki)
中国科学技術大学工程科学学院	姜鋭	(JIANG Rui)
明治大学先端数理科学インスティテュート, 東大先端研	友枝明保	(TOMOEDA Akiyasu)
東京大学 先端科学技術センター	大塚一路	(OHTSUKA Kazumichi)
東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻	須摩悠史	(SUMA Yushi)
東大 先端研, (独) 科学技術振興機構 さきがけ	西成活裕	(NISHINARI Katsuhiro)

概　要　待ち行列理論では、待ち行列の長さは待ち人数で表される。しかし、実際の待ち行列では人が列を詰める時間のために、待ち行列の長さは待ち人数に一人当たりにスペースを乗じたものよりも長くなると考えられる。本研究では、待ち行列理論に排除体積効果を導入し、待ち行列の長さが待ち人数と異なることを示すと同時に、実験によりその現象を確認した。

1　はじめに

待ち行列理論は Erlang の電話交換の研究に始まり、現在ではサーバの設計などにも利用されている大変重要な理論である [1]。最も基本となる M/M/1 型は、人の待ち行列で例えると、ポアソン過程による人の到着と、指数分布のサービス時間を考えており、行列に並んでいる人の人数や待ち時間の平均や分布を簡単に計算することができる。

しかし待ち行列理論では排除体積効果を考慮していないため、人の待ち行列の解析の際に問題となる点が二つ考えられる。一つは行列の長さの値である。待ち行列理論では行列に「いくつ」ものや人が並んでいるかで状態を記述するため、ネットワーク上を移動するパケットのように物理的な大きさがない場合は非常に有効な理論である。しかし、人のように大きさがある場合、すわなち排除体積効果がある場合、図 1 (a) の (A), (B), (C) のような待ち人数が等しく人と人の間隔が異なる状態を同じものとして扱ってしまうことになり、行列の長さを正確に計算することができない。もう一つは列を詰める時間による遅れである。何人並んでいるかで状態が記述される待ち行列では、四人並んでいる状態から一人減れば三人並んでいる状態なる。これはすなわち、前の人が移動した「瞬間」に次の人は前の人がいた場所に移動する状況を考えていることになる (図 1 (b1))。前の人が移動することが予め予想できれば図 1 (b1) の移動は可能であり、人が足並みを揃えて行進している場合などがそれに当たる。しかし待ち行列に並んでいる人は、多くの場合止まっては進むということ繰り返すので、自分の前に人が動くのを待ち構えたりせずに、図 1 (b2) のように一人分の空間ができたあと移動するのが普通である。

そこで我々は、セルオートマトンを用いて待ち行列理論に排除体積効果を導入した排他待ち行列 (以下 E-Queue) の定常状態での厳密解を求め、通常の待ち行列 (以下 N-Queue) と比較することにより、待ち行列の長さが待ち人数とどのように異なるのかを調べた。さらに実際の人による実験も行い、理論解析の検証も行った。

2　モデルの解析

本研究では、N-Queue (C) (連続時間の通常の待ち行列), N-Queue (P) (パラレルアップデートの通常の待ち行列), E-Queue (パラレルアップデートの排他待ち行列)[1]の三つのモデルについて考える。

[1]連続時間の排他待ち行列は [2] において定常状態の厳密解が求められている。

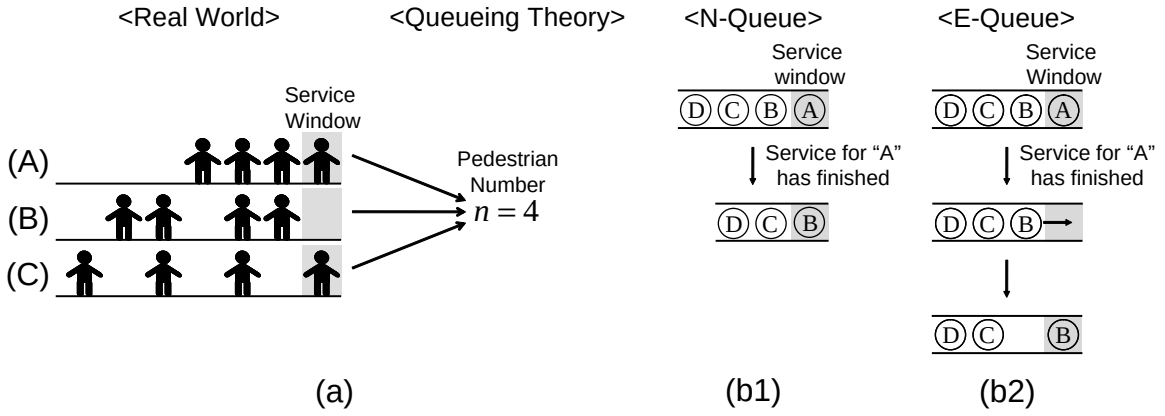

図 1: (a) 現実の待ち行列の状態と待ち行列理論で表わされる状態の違い。待ち行列理論では、待ち人数が等しく人と人の間隔が異なる (A), (B), (C) のような状態は区別されず、全て待ち人数 $n = 4$ という状態でまとめられてしまう。(b1), (b2) N-Queue と E-Queue の概略図。N-Queue では "A"がサービスを終えると同時に "B"が列を詰めサービス窓口に移動するのに対して、E-Queue では窓口が完全に空いてから "B"が移動する。

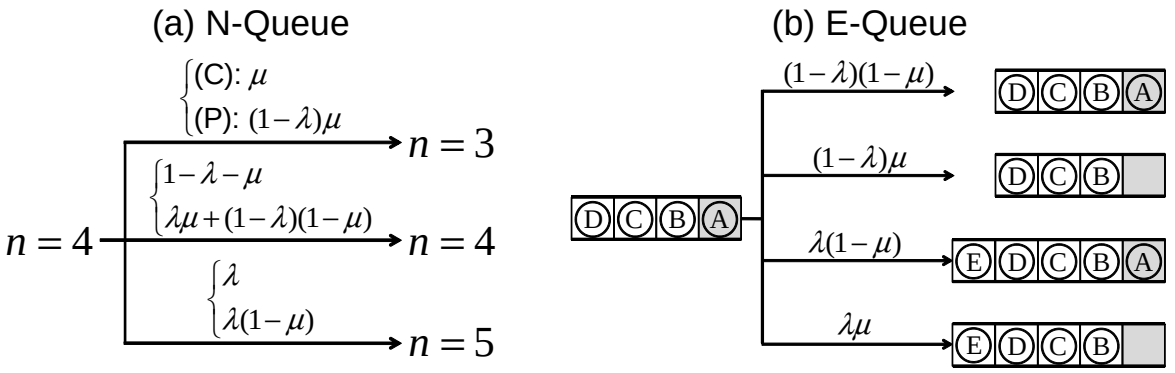

図 2: (a) N-Queue と (b) E-Queue のアップデートの例。(a) の各矢印の上に書かれている数式は、上段が N-Queue (C) の場合の遷移レート、下段が N-Queue (P) の場合の遷移確率である。

パラレルアップデートにおける確率パラメータは、連続時間のモデルではレートであるが、連続時間のモデルにおける単位時間をパラレルアップデートのモデルの単位時間ステップと定めれば、共通の時間スケールで三つのモデルを比較することが可能である。本論文では、到着とサービスに関するパラメータとして λ, μ を用いるが、それらが N-Queue (C) に関するものであれば、レート $(\lambda, \mu \in [0, \infty))$、N-Queue (P), E-Queue に関するものであれば確率 $(\lambda, \mu \in [0, 1])$ と考えることにする。また以下では定常状態について考察する。

N-Queue では、λ で新たに人が行列に到着して待ち人数が一人増え、μ で一人の人のサービスが終了して待ち人数が一人減る。N-Queue のアップデートの例を図 2 (a) に示す。N-Queue (C) や N-Queue (P) では、マスター方程式を解くことにより、待ち人数や待ち時間を計算することができる [1, 3]。

N-Queue では、状態が待ち人数のみで表わされるのに対して、E-Queue の状態は、図 3 (a) のように人がいるセルといないセルの並びで表される。毎時間ステップ、確率 λ で最後尾に人がひとり到着し、窓口セルに人がいれば確率 μ でサービスが終了してその人は待ち行列から出て行き、そ

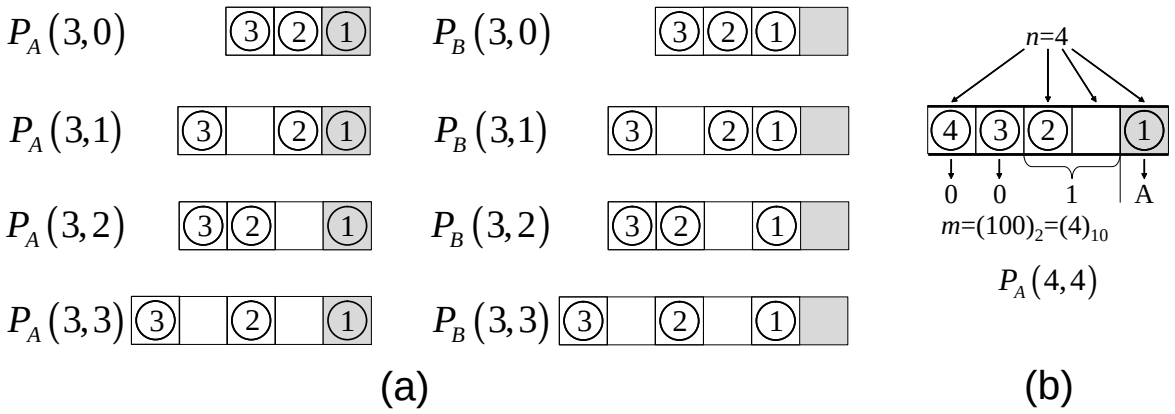

図 3: (a) $n=3$ の場合の定常状態の一覧。(b) 待ち行列の状態とその存在確率 $P_X(m,n)$ の対応。まず窓口の状態と待ち人数から、X と n が決まる。そして先頭の人を除く人を、その人の前のセルが埋まっていれば 0、空いていれば 1 に置き換える。その 0, 1 の並びを右から二進数として読み、それを十進数に直したものが m となる。図では $P_A(4,4)$ の場合を例として示している。

れ以外の人は自分の右隣のセルが空いていれば移動する。図 1 (b2) の時刻 $t+1$ の場合のように、窓口セルに人がいない場合は誰もサービスを受けないため、次の時間ステップで待ち人数が減ることはない。アップデートの例を図 2 (b) に示す。

E-Queue の待ち人数の分布を求めるために、まず n 人並んでいる状態がいくつかあるかを考える。E-Queue では自分の前のセルが空いていれば必ずその人は一セル詰めるため、空きセルが二つ以上連続することはない。したがって、待ち人数が n 人の状態は 2^n (図 3 (a)) あると考えられる。窓口セルが埋まっている状態は A グループに、空いている状態は B グループに属するとし、各グループの中での番号 m を図 3 (b) のように付けることにすると、E-Queue の状態は (窓口の状態, 人数, 各グループの中での番号)、すなわち (X,n,m) $(X \in A,B,\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ m \in [0, 2^{n-1}-1])$ という三つのパラメータで書ける。状態 (X,n,m) $(n \geq 1)$ となる確率を $P_X(n,m)$ と表わすことにし、$n=0$ の確率を P_0 と書く。すると E-Queue の定常状態におけるマスター方程式は、

$$
\begin{aligned}
P_0 &= (1-\lambda)P_0 + (1-\lambda)\mu P_A(1,0) && (2.1)\\
P_A(1,0) &= \lambda P_0 + (1-\lambda)(1-\mu)P_A(1,0) + (1-\lambda)P_B(1,0) && (2.2)\\
P_A(n,m) &= \lambda(1-\mu)P_A(n-1,m) + (1-\lambda)(1-\mu)[P_A(n,2m) + P_A(n,2m+1)] \\
&\qquad (n \geq 2,\ 0 \leq m \leq 2^{n-2}-1) && (2.3)\\
P_A(n,m) &= \lambda P_B(n-1, m-2^{n-2}) + (1-\lambda)[P_B(n, 2(m-2^{n-2})) + P_B(n, 2(m-2^{n-2})+1)) \\
&\qquad (n \geq 2,\ \leq 2^{n-2} \leq m \leq 2^{n-1}-1) && (2.4)\\
P_B(n,m) &= \lambda\mu P_A(n,m) + (1-\lambda)\mu(P_A(n+1,2m) + P_A(n+1,2m+1)) \\
&\qquad (n \geq 1) && (2.5)
\end{aligned}
$$

と書け、これらを規格化条件と共に解くことにより、$P_0, P_X(m,n)$ が求められる。さらに $P_0, P_X(m,n)$ を用いて、人数と長さの確率分布 $P_N(n), P_L(l)$ を得ることができる。

$$
P_N(n) = \frac{(r_N)^n}{1-\mu+\lambda\mu}P_0, \qquad \left(r_N = \frac{\lambda(1-\mu+\lambda\mu)}{(1-\lambda)^2\mu}\right), \qquad P_L(l) = \left(\frac{\lambda}{(1-\lambda)\mu}\right)^l P_0. \qquad (2.6)
$$

ここで $\rho = \lambda/\mu$ は、到着サービス比であり、$P_0 = 1-\lambda/[(1-\lambda)\mu]$ である。$P_N(n), P_L(l)$ が収束する条件より、定常状態が存在するのは、$\lambda < \mu/(1+\mu)$ であることが分かる。また、人数の平均値

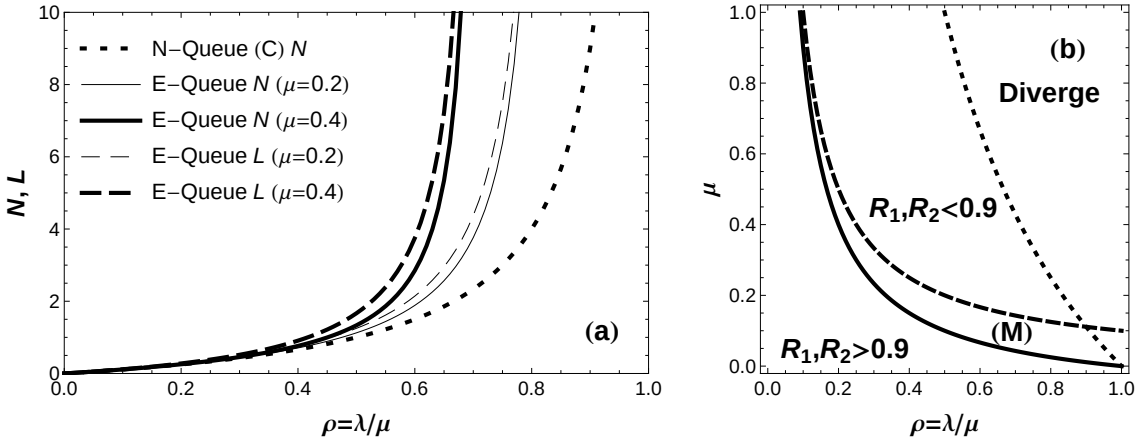

図 4: (a) 到着サービス比 ρ に対する平均待ち人数 N と平均行列長さ L。(b) 曲線 $R_1 = 0.9, R_2 = 0.9$, $\rho = 1/(1+\mu)$ で分けられる五つのパラメータ領域。領域 (M) では、$R_1 < 0.9, R_2 > 0.9$ である。

N, 行列長の平均値 L は上記の分布を用いて、$N = \dfrac{\rho}{1-\frac{\rho}{1-\lambda}}$, $L = \dfrac{1}{1-\lambda}\dfrac{\rho}{1-\frac{\rho}{1-\lambda}}$ と計算することができる。

3 N-Queue と E-Queue の比較

本節では、N-Queue (C), E-Queue の比較を行う。(N-Queue (P) も含めた比較については、[3, 4] を参照されたい。) 以下では、到着サービス比 ρ とサービス率 (確率)μ を独立変数として扱い、λ は ρ と μ の関数 ($\lambda = \rho\mu$) と考えることにする。

図 4 (a) は、μ が一定の基で到着サービス比 ρ に対して平均待ち人数 N と平均行列長さ L をプロットしたものである。これらの図を見ると、N-Queue (C) と比較して、E-Queue の値は大きいことが分かる。E-Queue では排除体積効果を考えているため、一人のサービスが終了してから次の人がサービスを受けるために列を詰める時間が存在するので、サービスの遅れが生じ、平均待ち人数 N や平均長さ L が大きくなっている。また μ の値が大きくなることにより、N, L が共に増加していることも分かる。N-Queue (C) では、平均待ち人数は ρ のみによって決定される [1]。しかし E-Queue では、窓口を通過するためには「サービス時間」+「詰める時間」が必要となる。その平均値は、$1+1/\mu$ であり、μ が小さい場合、すなわちサービス時間が長い場合は詰める時間は無視することができるが、サービス時間が短くなるにつれて詰める時間の影響は大きくなる。ρ が一定の場合、サービス時間が短くなれば、到着間隔も短くなりより多くの人が到着するようになる。しかし詰める時間が定数であるため、窓口を通過するために要する平均時間はサービス時間に比例して短くなることはない。ゆえに、待ち人数や列の長さが増加することになる。

最後に、E-Queue の待ち人数 N と行列の長さ L を比較すると、常に L の方が大きくなっていることも分かる。これは人がいない空いているセルも行列の長さに含めているからである。一見二つのグラフは近い値をとっているように見えるが、それはグラフの傾きが非常に大きいためで、$\mu = 0.4, \rho = 0.65$ のとき、$N = 5.3, L = 7.2$ と二人分の長さもの差が出ている。また上で述べたように、N-Queue (C) の平均待ち人数は E-Queue のそれよりも小さい。従って以上をまとめると、ま

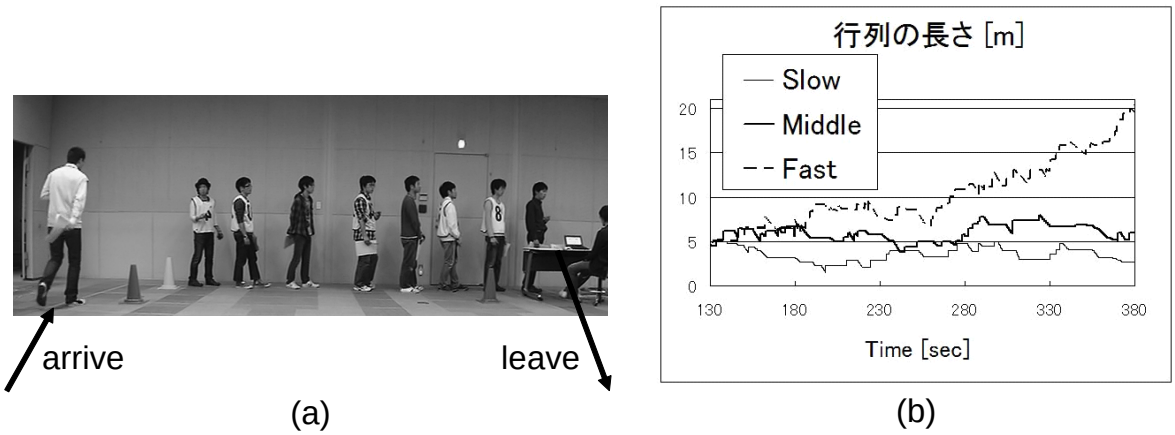

図 5: (a) 実験の様子 (左右を反転して表示) (b) 実験から得られた待ち行列長さの時間変化

ず E-Queue における平均行列長と N-Queue (C) における平均待ち人数は明らかに異なる。よって、N-Queue (C) を用いて計算した待ち人数で行列の長さを推定することは難しいと思われる。E-Queue における平均行列長と平均待ち人数の差は、N-Queue (C) における平均待ち人数との差程ではないが、行列の長さをより正確に求めたい場合は、E-Queue の L を用いる必要があると考えられる。

図 4 (b) は、

$$R_1(\rho,\mu) = \frac{N_{\text{N-Queue (C)}}}{L_{\text{E-Queue (P)}}} = 0.9, \qquad R_2(\rho,\mu) = \frac{N_{\text{E-Queue (P)}}}{L_{\text{E-Queue (P)}}} = 0.9 \tag{3.1}$$

となる曲線と E-Queue が発散するときの条件 $\rho = 1/(1+\mu)$ を、ρ-μ 平面上にプロットしたものである。この図を見ると、どのような場合に排除体積効果の影響が強く、待ち人数と行列の長さが異なってくるか調べることができる。まず、左下の ρ, μ が共に小さな領域では $R_1 > 0.9$ かつ $R_2 > 0.9$ である。つまり N-Queue (C) の待ち人数で行列長を見積もっても誤差は 10%未満に収まると考えられる。次に、(M) と書かれた領域では $R_1 < 0.9$ かつ $R_2 > 0.9$ であるので、N-Queue (C) の N で行列長を見積もると誤差が 10%より大きくなってしまうが、E-Queue (P) の N との誤差は 10%未満に収まる。さらに ρ, μ が大きくなると $R_1 < 0.9$ かつ $R_2 < 0.9$ となり、待ち人数で行列長を近似すると、誤差が 10%を越えるようになる。また点線より右上の領域では、待ち行列が発散する。以上より、ρ, μ が共に大きい場合、つまり待ち行列が混んでいて、かつサービス時間が短い場合に「待ち行列の長さ」$\neq$「待ち人数」となることが分かる。今回は、$R_1 = 0.9, R_2 = 0.9$ となる場合について考えたが、R_1, R_2 は任意の $(0,1)$ の値について考えることができる。

4 実験

我々は理論から得られた行列の長さと待ち人数が異なるという結果を検証するため、実際の人による図 5 (a) のような実験を行った。人の到着時間とサービス時間の分布には幾何分布を用い、パラメータは図 6 (a) にあるような三種類のものを試した。平均サービス時間 $(1/\mu)$ と平均到着時間 $(1/\lambda)$ の比は三つの条件全てにおいて $\rho = 0.8$ であり、パラレルアップデートの単位時間ステップを 1 [sec] とすると、Slow はサービス時間が長めの条件、Middle と Fast は E-Queue において待ち時間が最小値をとる条件と発散する条件である。被験者に動き方の指示はせず、列の詰め方は自然な動きに任せた。図 5 (b) は、実験開始からの時刻に対する待ち行列の長さをプロットしたものである。これを見ると、Fast の場合は行列の長さが増加していっていることが分かる。$\rho = 0.8 < 1$ で

	平均到着時間 1/λ	平均サービス時間 1/μ
Slow	15 [sec]	12 [sec]
Middle	9.47 [sec]	7.58 [sec]
Fast	5 [sec]	4 [sec]

(a)

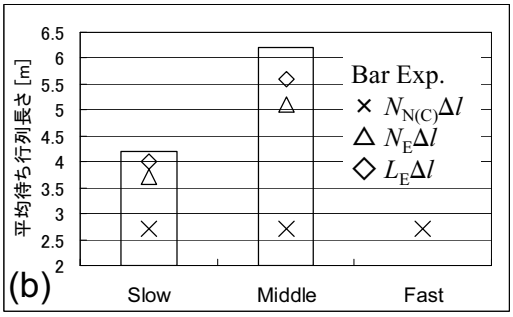

図 6: (a) 実験パラメータ (b) 理論・実験による平均行列長。Fast では $N_{N(C)}$ 以外発散してしまう。

あるため、N-Queue においては待ち時間が長期に渡って増加することはなく [1]、N-Queue では実験結果を再現することはできない。しかし、Fast は E-Queue において待ち行列が発散する条件であるため、E-Queue とは振る舞いが一致する。図 6 (b) は理論計算と実験による平均行列長をまとめたものである。モデルにおける人ひとりの占有スペース (1 セルの大きさ) は、$\Delta l = 2/3$ [m] とした。これを見ると、N-Queue (C) の N を用いて計算した行列長 ($N_{\mathrm{N(C)}}\Delta l$) は実験データよりかなり小さいことが分かる。また E-Queue (P) の N を用いて計算を行うと実験データに近い値を得ることができ ($N_{\mathrm{E}}\Delta l$)、E-Queue (P) の L ではより正確な値を求められることが見てとれる ($L_{\mathrm{E}}\Delta l$)。E-Queue (P) の L が実験データよりも小さな値となるのは、待ち行列内の移動のばらつきが原因であると考えられる。E-Queue では前のセルが空いていれば確率 1 で移動するが、実際の人の移動速度は完全に均質ではない。待ち行列モデルでは平均が等しい場合、到着やサービスのばらつきが大きいと待ち人数は大きくなる [1]。従って、より現実的な値を計算するためには、待ち行列内の移動にも確率を用いたモデル [有田・柳澤: 本講究録] 等を考える必要があると思われる。

5 まとめ

本研究では、排除体積効果を取り入れた待ち行列モデルの待ち人数や行列の長さの分布や平均値を厳密に計算した。またそれらの結果を排除体積効果を考慮しないモデルと比較し、排除体積を考慮したモデルでは列を詰める時間のために待ち人数や行列長が増加することを示した。また、人の到着が頻繁でサービス時間が短い場合に、待ち人数と待ち行列の長さは異なる値をとることも調べられた。さらに実際の人による待ち行列の実験も行い、待ち行列モデルに排除体積効果を取り入れると、より現実的なモデルになることが確認された。

謝辞 本研究は (独) 科学技術振興機構, (独) 日本学術振興会の援助を受けた. また 4 節の実験については, (株) 構造計画研究所の協力を受けた.

参考文献

[1] G. Bolch, *et al*. *Queueing Networks and Markov Chains*. A Wiley-Interscience Publication, 1998.

[2] Chikashi Arita. Queueing process with excluded-volume effect. *Phys. Rev. E*, 80(5):051119, 2009.

[3] Daichi Yanagisawa, *et al*. Excluded volume effect in queueing theory. *arXiv:1001.4124*, 2010.

[4] Daichi Yanagisawa. *et al*, in preparation.