

## ベクトル、行列連分数の組合せ論的解釈とその周辺

新宮, 史也  
京都大学大学院情報学研究科

上岡, 修平  
京都大学大学院情報学研究科

<https://doi.org/10.15017/18716>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (26), 2010-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7

「非線形波動研究の現状と将来 — 次の10年への展望」 (研究代表者 矢嶋 徹)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

*Current and Future Research on Nonlinear Waves —  
Perspectives for the Next Decade*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by

*Kyushu University Global COE Program*

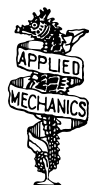
*Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry*

Article No. 26 (pp. 173-178)

# ベクトル, 行列連分数の 組合せ論的解釈とその周辺

新宮 史也 (SHINGU Fumiya), 上岡 修平 (KAMIOKA Shuhei)

(Received January 29, 2010)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2010

# ベクトル, 行列連分数の組合せ論的解釈とその周辺

京都大学大学院 情報学研究科 新宮史也 (SHINGU Fumiya)

京都大学大学院 情報学研究科 上岡修平 (KAMIOKA Shuhei)

**概要** ある重み付きグラフを導入し, その重み付きグラフ上の経路の重みを考えることによって得られる量を用いて, 行列連分数と, ベキ級数を成分に持つ行列との間の関係を組合せ論的に考察する. また, Block-Hankel 行列式の組合せ論的な表現を与え, 行列連分数やベキ級数の行列と Block-Hankel 行列式の関係に対する組合せ論的な考察を行う.

## 1 はじめに

連分数とベキ級数の間には, Padé 近似を通して密接な関係が知られており [1], また, 直交多項式や離散可積分系との関係も知られている [4]. ベクトル連分数, 行列連分数は, 連分数を拡張したものとして導入され, Hermite-Padé 近似との関係や, 双直交多項式との関係などの研究が行われている [5, 6].

一方, Flajoret[2] によって, 重み付き Motzkin 路の重みに由来する母関数が, Jacobi 型の連分数に展開できることが示され, ベキ級数と連分数の組合せ論的な側面が明らかになった.

しかし, ベクトル連分数, 行列連分数の持つ組合せ論的な側面に関しては, 明らかになっていない.

本報告では, ある重み付きグラフを用いることで, 行列連分数とベキ級数の行列の間の関係を組合せ論的に考察する. ベクトルに関しては,  $p \times 1$  の行列と考え, 行列に含めている. また, 双直交多項式とも関連する Block-Hankel 行列式に対する組合せ論的な考察も行う.

## 2 行列連分数

初めに, 本研究で用いている行列連分数の定義を与える.

$q$  次正方行列  $I_q$  と  $p \times q$  行列  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$  に対して,  $q$  次正方行列  $J$  を用いて,

$$J \begin{pmatrix} I_q \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_q \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

によって  $q$  次正方行列  $B_1$  と  $p \times q$  行列  $B_2$  を定める. すなわち,

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{p,1} & \cdots & b_{p,q} \\ 1 & & 0 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ b_{1,1} & \cdots & b_{1,q} \\ \cdots & & & \\ b_{p-1,1} & \cdots & b_{p-1,q} \end{pmatrix}$$

である.

$B_1, B_2$  を用いて, 行列の変換  $T$  を  $T(B) := B_2 B_1^{-1}$  と定義する.

行列の比  $1/B$  は, 行列の変換  $T$  を用いて  $1/B = T(B)$  と表す.

この変換  $T$  を用いることで, 行列連分数を形式的に定義することができる. すなわち,  $C, B, Z$  がそれぞれ  $p \times q$  行列である時,  $C/(B+Z) = C * T(B+Z)$  と定義し, これを再帰的に用いることで行列連分数を定義する. ここで, 演算  $*$  は, 行列の各成分ごとの積を成分として持つ行列を得る演算とする.

$$((A * B)_{i,j} = (A)_{i,j} * (B)_{i,j})$$

### 3 重み付きグラフ

行列連分数と、べき級数を成分とする行列に対して組合せ論的な考察を行うために、重みつきグラフ  $D^{(p,q)}$  を導入する.

グラフ  $D^{(p,q)}$  は、節点の集合  $V$  と有向枝の集合  $E$  で定義される.

$$V = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid j \geq 0, \exists n \in \mathbb{Z}, qi - j = (p + q)n\}$$

$$E = E_1 \cup E_2$$

$$E_1 = \{((i, j), (i + 1, j + q)) \in V \times V\}$$

$$E_2 = \{((i, j), (i + 1, j - p)) \in V \times V\}$$

節点  $v = (i, j)$  であるとき,  $j$  を節点  $v$  の高さと呼ぶ.

有向枝  $e$  の始点を  $(i, j)$  とするとき,  $e$  の重みを列  $\{b_n\}_{n \geq p}$  によって次で定義する.

$$w(e) = \begin{cases} 1, & e \in E_1 \\ b_j, & e \in E_2 \end{cases}$$

グラフ  $D^{(p,q)}$  上の経路  $\pi$  の重みは,  $\pi$  に含まれる全ての枝の重みの積として次で定義する.

$$w(\pi) = \prod_{e \in \pi} w(e)$$

更に、節点の一部を、次の規則により  $s_n, t_n$  と呼ぶ.

$$s_n = \left( - \left\lfloor \frac{p+q}{q} n \right\rfloor, pn \pmod{q} \right), \quad t_n = \left( \left\lfloor \frac{p+q}{p} n \right\rfloor, qn \pmod{p} \right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

グラフ  $D^{(3,2)}$  を図 1 に示す.

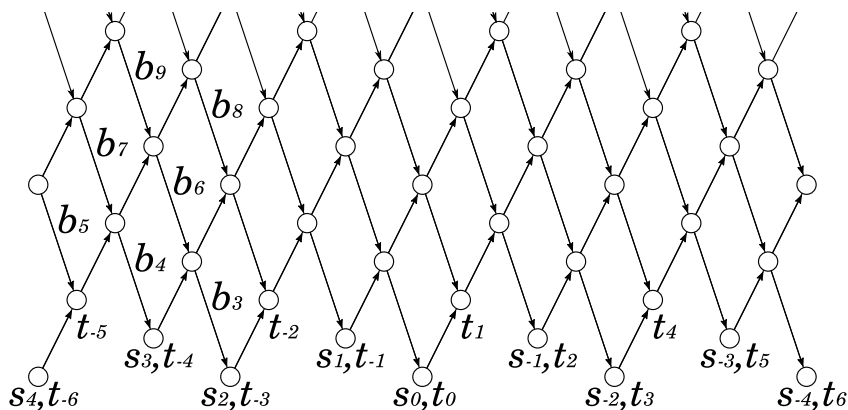


図 1: A graph  $D^{(3,2)}$ .

### 4 べき級数の行列と行列連分数

行列連分数と、べき級数を成分として持つ行列の関係を、グラフ  $D^{(p,q)}$  から得られる組合せ論的な量を用いて考察する.

べき級数を成分として持つ  $p \times q$  行列  $G$  を、次で定義する.

$$(G)_{ij} = g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{pqn+\Psi(i,j)} z^{pn+\Phi(i,j)}, \quad i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad (4.1)$$

ここで,  $\Phi(i, j)$  は,  $up - vq = 1$  を満たす整数  $u, v$  に対して

$$\Phi(i, j) = (j - i)(u + v) \pmod{(p + q)}, \quad i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, j \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

で決まり,  $\Psi(i, j)$  は,  $up - vq = j - i$  を満たす整数  $u, v$  に対して

$$\begin{aligned} \Psi(i, j) &= up + i \pmod{pq} \\ &= vq + j \pmod{pq}, \quad i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, j \in \{0, 1, \dots, q-1\} \end{aligned}$$

で決まる. 例えば,  $p = 3, q = 2$  の場合, 次式のようなになる.

$$G = \begin{bmatrix} c_0 + c_6 z^3 + \dots & c_3 z + c_9 z^4 + \dots \\ c_4 z^2 + c_{10} z^5 + \dots & c_1 + c_7 z^3 + \dots \\ c_2 z + c_8 z^4 + \dots & c_5 z^2 + c_{11} z^5 + \dots \end{bmatrix}$$

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1. べき級数の係数の列  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  とグラフ  $D^{(p,q)}$  上の重みの列  $\{b_n\}_{n \geq 0}$  との間に, 等式

$$c_{ip+jq} = w(s_i \rightarrow t_j), \quad i, j \in \mathbb{Z} \quad (4.2)$$

が成り立つとき, 行列  $G$  は, 次のように行列連分数に展開できる.

$$G = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & z \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & z \\ -b_p & \dots & -b_p & -zb_p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}} + \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & z \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & z \\ -b_{p+1} & \dots & -b_{p+1} & -zb_{p+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}} + \dots$$

等式の右辺は,  $s_i$  から  $t_j$  へ至る全ての経路の重みの総和を表す. 一般に  $ip + jq = n, n \geq 0$  を満たす  $i, j$  の選び方は一意ではないが,  $i, j$  の選び方に関わらず, 右辺は等しくなることに注意する. また,  $G$  の成分の,  $c_{ip+jq}$  を含む項の  $z$  の指数は,  $s_i$  から  $t_j$  へ至る経路中で,  $E_1$  に含まれる枝の数と等しくなっている.

証明. 行列  $G$  の定義式 (4.1) より, 行列  $G$  の要素  $g_{ij}$  の係数は, 全てグラフ  $D^{(p,q)}$  上の高さが  $j$  の節点から  $i$  の節点へ至る経路の重みの総和になっていることが分かる.

経路の終点, 始点の高さをそれぞれ  $i, j$  として, グラフ  $D^{(p,q)}$  上の経路を以下の 4 種類に分類する.

- (i)  $i = j = 0$  (ii)  $i = 0, j > 0$  (iii)  $i > 0, j = 0$  (iv)  $i > 0, j > 0$

図 2 に分類を図示する. 節点横の記号は節点の高さを表し, 点線は任意の経路を, 破線は高さ 0 の節点を経由しない任意の経路を表している.

(i) の経路は, 始点と終点が一致するものと, 一致しないものの 2 種類に更に分類できる. 一致しない経路は, 図 2(i) の点線部分, 高さ 0 の節点を始点とする枝  $e_1 \in E_1$ , 破線部分, 高さ  $p$  の節点を始点とする枝  $e_2 \in E_2$  の 4 つの部分に一意に分解できる. 従って,  $g_{00}$  は, 次の関係式を満たす.

$$g_{00} = 1 + g_{00} z \hat{g}_{p-1, q-1} b_p \quad (4.3)$$

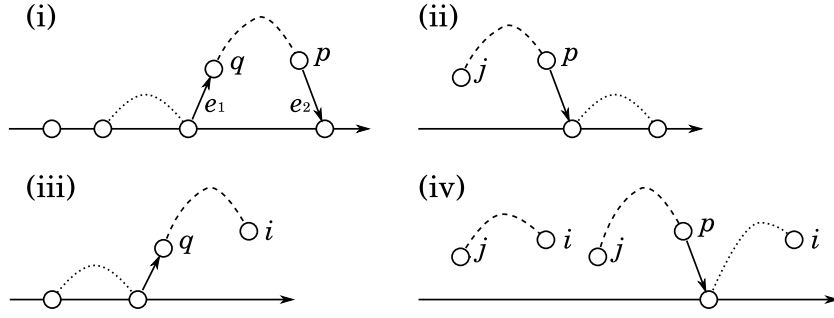


図 2: A classification of paths on a graph  $D(p,q)$ .

ここで,  $g_{ij} = g_{ij}(b)$  に対して,  $\hat{g}_{ij}$  は  $\hat{g}_{ij}(b) := g_{ij}(\delta b)$  で定義される. ただし,  $\delta$  はシフト作用素で,  $\delta b$  は  $b = \{b_n\}_{n \geq p}$  に対して  $\delta b := \{b_{n+1}\}_{n \geq p}$  で定義される列を表す.

(i) の経路と同様にして, (ii) の経路は図 2 の (ii) に示すように一意に分解できる. 従って,  $g_{0j}$ ,  $j > 0$  は, 次の関係式を満たす.

$$g_{0j} = \hat{g}_{p-1, j-1} b_p b_{00} \quad (4.4)$$

(iii) の経路についても, (ii) の経路とほぼ同様にすると, 次の関係式が成り立つことが分かる.

$$g_{i0} = b_{00} z \hat{g}_{i-1, q-1} \quad (4.5)$$

(iv) の経路は, 高さ 0 の点を一度も通らない場合と, 少なくとも一度通る場合の 2 種類に分類できるので, 図 2 の (iv) より,  $g_{ij}$ ,  $i > 0$ ,  $j > 0$  は, 次の関係式を満たす.

$$g_{ij} = \hat{g}_{i-1, j-1} + \hat{g}_{p-1, j-1} b_p g_{i0} \quad (4.6)$$

行列に対する分数の定義方法と, 母関数の関係式 (4.3) ~ (4.6) を用いると,

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\begin{bmatrix} g_{11} - \frac{g_{10}g_{01}}{g_{00}} & \cdots & g_{1, q-1} - \frac{g_{1,0}g_{0, q-1}}{g_{00}} & \frac{g_{10}}{g_{00}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ g_{p-1, 1} - \frac{g_{p-1,0}g_{01}}{g_{00}} & \cdots & g_{p-1, q-1} - \frac{g_{p-1,0}g_{0, q-1}}{g_{00}} & \frac{g_{p-1,0}}{g_{00}} \\ -\frac{g_{01}}{g_{00}} & \cdots & -\frac{g_{0, q-1}}{g_{00}} & \frac{1}{g_{00}} \end{bmatrix}} \\ &= \frac{1}{\begin{bmatrix} \hat{g}_{00} & \cdots & \hat{g}_{0, q-2} & z g_{0, q-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hat{g}_{p-2, 0} & \cdots & \hat{g}_{p-2, q-2} & z g_{p-2, q-1} \\ -b_p \hat{g}_{p-1, 0} & \cdots & -b_p \hat{g}_{p-1, q-2} & 1 - b_p \hat{g}_{p-1, q-1} \end{bmatrix}} \\ &= \frac{1}{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & z \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & z \\ -b_p & \cdots & -b_p & -z b_p \end{bmatrix}} * \begin{bmatrix} \hat{g}_{00} & \cdots & \hat{g}_{0, q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{g}_{p-1, 0} & \cdots & \hat{g}_{p-1, q-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる.

上の変形を繰り返すことで,  $G$  を連分数に展開することができる. □

## 5 Block-Hankel 行列式

Block-Hankel 行列式と、べき級数、行列連分数の関係を組合せ論的に考察する。

べき級数の係数の列  $\{c_n\}_{n \geq 0}$  を用いて、Block-Hankel 行列式  $H_n^r, n \geq 0, r \geq 0$  を次で定義する。

$$H_n^r := |c_{r+qi+pj}|_{0 \leq i, j \leq n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} c_r & c_{r+p} & \cdots & c_{r+(n-1)p} \\ c_{r+q} & c_{r+q+p} & \cdots & c_{r+q+(n-1)p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r+(n-1)q} & c_{r+(n-1)q+p} & \cdots & c_{r+(n-1)(q+p)} \end{vmatrix}$$

例えば,  $p = 3, q = 2$  の場合, 次のようになる。

$$H_3^7 = \begin{vmatrix} c_7 & c_{10} & c_{13} \\ c_9 & c_{12} & c_{15} \\ c_{11} & c_{14} & c_{17} \end{vmatrix}, \quad H_4^4 = \begin{vmatrix} c_4 & c_7 & c_{10} & c_{13} \\ c_6 & c_9 & c_{12} & c_{15} \\ c_8 & c_{11} & c_{14} & c_{17} \\ c_{10} & c_{13} & c_{16} & c_{19} \end{vmatrix}$$

定理 1 より, 行列式と非交差経路に関する Gessel-Viennot の方法 [3] を用いると, Block-Hankel 行列式と行列連分数の係数の列  $\{b_n\}_{n \geq p}$  との組合せ論的な関係を示すことができる。すなわち, 次の定理が成り立つ。

定理 2.

$$H_n^r = \sum_{(\pi_1, \dots, \pi_n)} w(\pi_1) \cdots w(\pi_n)$$

ここで, 右辺の和は次の条件を満たすグラフ  $D^{(p,q)}$  上の  $n$  本の経路の組全てにわたってとる。

- (i)  $r = ip + jq$  を満たす  $i, j \in \mathbb{Z}$  を一組固定するとき,  $k$  番目の経路  $\pi_k$  は,  $s_{i+k-1}$  から  $t_{j+k-1}$  へ至る経路である。
- (ii)  $n$  本の経路  $\pi_1, \dots, \pi_n$  は, 非交差的である。すなわち, どの 2 本の経路も同じ節点を共有しない。

例えば,  $p = 3, q = 2$  の場合, 次のようになる (図 3)。

$$H_2^6 = \begin{vmatrix} c_6 & c_9 \\ c_8 & c_{11} \end{vmatrix} = b_3 b_4 b_5 b_8 b_9 + b_3 b_4 b_5 b_8 b_{11} + b_3 b_5 b_6 b_8 b_{11}, \quad H_3^4 = b_3 b_4 b_5 b_6 b_8 b_9 b_{11} b_{14}$$

特に, 上の例の  $H_3^4$  のように  $r \in \{0, 1, \dots, p+q-1\}$  の場合, 非交差な経路の組は一組に決まり, Block-Hankel 行列式は  $b_n$  の積のみで表される。すなわち, 次式で表される。

$$H_{ps+t}^r = \prod_{i=0}^{p-1} \prod_{j=0}^{n_i} \prod_{k=1-\lfloor \frac{qi+r}{p} \rfloor}^{(p+q)j+i} b_{qk+pi+r} \quad (5.1)$$

$$n_i = \begin{cases} s, & i \in \{0, 1, \dots, t-1\} \\ s-1, & i \in \{t, t+1, \dots, p-1\} \end{cases}$$

$$r \in \{0, \dots, p+q-1\}, \quad t \in \{1, \dots, p\}$$

式 (5.1) を用いて, グラフ  $D^{(p,q)}$  上の枝の重み  $b_m$  の, Block-Hankel 行列式を用いた表現を得られる。 $r \in \{0, 1, \dots, p+q-1\}$  のとき,  $\pi_1$  から  $\pi_n$  のうちで枝の数が最も多い経路  $\pi_n$  の重みを, 2 つの Block-Hankel 行列式の比として,

$$b_m b_{m-p} \cdots b_{m-(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor - 1)p} = \frac{H_{n+1}^r}{H_n^r}$$

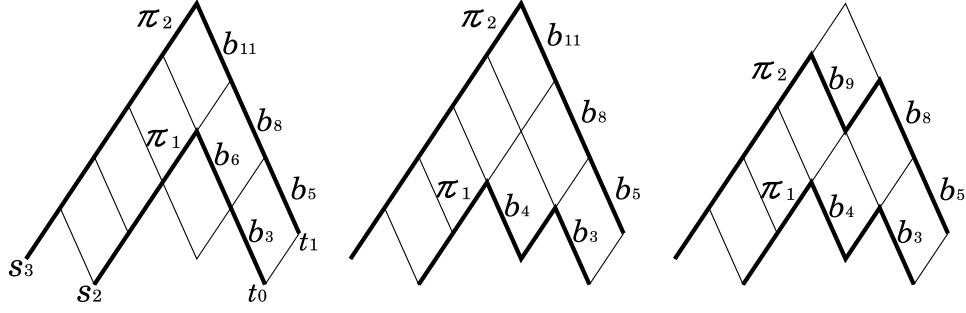


図 3: The Block-Hankel determinant  $H_2^6$  in terms of non-intersecting paths on a graph  $D^{(3,2)}$ .

と表すことができる. 更に同様にして,

$$b_{m-p} \cdots b_{m-(\lfloor \frac{m}{p} \rfloor - 1)p} = \begin{cases} \frac{H_n^{r+q}}{H_n^{r+q}}, & r \in \{0, \dots, p-1\} \\ \frac{H_{n+1}^{r-p}}{H_n^{r-p}}, & r \in \{p, \dots, p+q-1\} \end{cases}$$

となるので,  $b_m$  は  $H_n^r$  を用いて次のように表される.

$$b_m = \begin{cases} \frac{H_{n+1}^r H_{n-1}^{r+q}}{H_n^r H_n^{r+q}}, & r \in \{0, \dots, p-1\} \\ \frac{H_{n+1}^{r-p} H_n^{r-p}}{H_n^r H_{n+1}^{r-p}}, & r \in \{p, \dots, p+q-1\} \end{cases}$$

## 6 おわりに

本研究では, 重み付きグラフ  $D^{(p,q)}$  を導入し,  $D^{(p,q)}$  上の経路の重みの総和を係数とする母関数が行列連分数に展開できることから, ベキ級数の行列と行列連分数の組合せ論的な関係を示した. さらに, block-Hankel 行列のグラフを用いた解釈を与えることで, 行列連分数の係数と Block-Hankel 行列式の関係に対する組合せ論的な証明を示した.

## 参考文献

- [1] G. Baker Jr. and P. Graves-Morris: Padé Approximants, 2nd Edition, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 59, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [2] P. Flajolet: *Combinatorial aspects of continued fractions*, Discrete Math., **32** (1980), 125–161.
- [3] I. Gessel and G. Viennot: *Binomial determinants, paths, and hook length formulae*, Adv. in Math., **58** (1985), no. 3, 300–321.
- [4] 中村佳正: 可積分系の機能数理, 共立叢書, (2006).
- [5] V. N. Sorokin and J. Van Iseghem: *Algebraic aspects of matrix orthogonality for vector polynomials*, J. approx. Theory, **90** (1997), 97–116.
- [6] V. N. Sorokin and J. Van Iseghem: *Matrix continued fractions*, J. approx. Theory, **96** (1999), 237–257.
- [7] J. Van Iseghem: *Vector stieltjes continued fraction and vector QD algorithm*, Numerical Algorithms, **33** (2003), 485–498.