周期写像を用いた高次保存量を持つ可積分方程式の生成

田中, 宏典
龍谷大学大学院理工学研究科

津田, 照久
九州大学大学院数理学研究院

野邊, 厚
千葉大学教育学部数学教室

松木平, 淳太
龍谷大学理工学部数理情報学科

https://doi.org/10.15017/18715

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (25), 2010-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 25 (pp. 166-172)

周期写像を用いた高次保存量を持つ可積分方程式の生成

田中 宏典 (TANAKA Hironori), 津田 照久 (TSUDA Teruhisa), 野邊 厚 (NOBE Atsushi), 松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)

(Received February 3, 2010)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

周期写像を用いた高次保存量を持つ可積分方程式の生成

龍谷大学大学院理工学研究科　田中　宏典　(TANAKA Hironori)
九州大学大学院数理学研究院　津田　照久　(TSUDA Teruhisa)
千葉大学教育学部数学教室　野邊　厚　(NOBE Atushi)
龍谷大学理工学部数理情報学科　松木平 淳太　(MATUKIDAIRA Junta)

概　要　可積分な 2 階差分方程式として QRT 系が知られている。これまでに我々は、QRT 系をもとに高次保存量を持つ差分方程式を生成してきた [1]。今回、2 階可積分差分方程式の中で QRT 系ではないと主張されている方程式から得た考察をもとに、新たな可積分な方程式を生成する。

1　はじめに

今までに可積分な差分方程式の探索がなされ、その成果として 2 階差分方程式である QRT 系 (キスペル-ロバーツ-トンプソン系) が知られている。この系は、可積分な 2 階差分方程式のなかでも、非常に大きな系である。実際、2 階差分方程式の中で、可積分な方程式が見つかった時、それが QRT 系に属するかそうでないかということが、しばしば問題となり、いくつかの方程式に関しては、QRT 系ではないと主張されている [2] [3] [4] [5]。しかし、QRT 系以外に可積分な 2 階差分方程式がどこまで存在するのかは、分かっていない。

この課題の解決に向かうアプローチとして、QRT 系を出発点にそれらを探っていくことは、有効な手段のひとつである。そこで、本論文ではこれまで我々が示してきたこととともに、QRT 系をもとに新たな可積分な方程式の生成法を提案する。

2　QRT 系

パラメータ行列が非対称の場合、QRT 系は以下の式で表される。

$$x_{n+1} = \frac{f_1(y_n) - x_n f_2(y_n)}{f_2(y_n) - x_n f_3(y_n)}, \qquad y_{n+1} = \frac{g_1(x_{n+1}) - y_n g_2(x_{n+1})}{g_2(x_{n+1}) - y_n g_3(x_{n+1})} \ . \tag{2.1}$$

ここで、$f_i(x), g_i(x), (i = 1, 2, 3)$ は、パラメータの集まりである 3×3 の行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

によって、

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times B \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \ , \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix} = A^T \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times B^T \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \ , \tag{2.3}$$

で与えられる。

この QRT 系には、分母分子それぞれが x, y の 4 次式である保存量

$$
\begin{aligned}
K_{QRT}(x,y) &= \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \\
&= \frac{a_{00}x^2y^2 + a_{01}x^2y + a_{02}x^2 + a_{10}xy^2 + a_{11}xy + a_{12}x + a_{20}y^2 + a_{21}y + a_{22}}{b_{00}x^2y^2 + b_{01}x^2y + b_{02}x^2 + b_{10}xy^2 + b_{11}xy + b_{12}x + b_{20}y^2 + b_{21}y + b_{22}},
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

が存在する。この保存量 $K_{QRT}(x,y)$ に対して、非対称 QRT 系写像 $(x_n, y_n) \mapsto (x_{n+1}, y_{n+1})$ は、以下の関係式を満たす [6]。

$$
K_{QRT}(x_n, y_n) \;=\; K_{QRT}(x_{n+1}, y_n) \;=\; K_{QRT}(x_{n+1}, y_{n+1}). \tag{2.5}
$$

また、パラメータ行列 A, B を対称行列にすると、$f_i(x)$ と $g_i(x)$ は等しくなる。そのような対称の QRT 系は、以下のように表される。

$$
x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n)}{f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n)}. \tag{2.6}
$$

保存量は式 (2.4) で、非対称の場合と同じであり、以下の関係式を満たす。

$$
K_{QRT}(x_{n-1}, x_n) \;=\; K_{QRT}(x_n, x_{n+1}). \tag{2.7}
$$

3　2 階可積分方程式

次の差分方程式 $(\, x_{n-1}, x_n \,) \mapsto (\, x_n, x_{n+1} \,)$ を考える。

$$
x_{n+1} = -\frac{a + x_n^2}{x_{n-1}}. \tag{3.1}
$$

この式は QRT 系ではない。解軌道 (図 1) から、「2 つの保存量を合成した保存量を持っている」ことが予想される。実際、この保存量は、

$$
L(x,y) \;=\; \frac{x^2 + y^2 + a}{xy}, \tag{3.2}
$$

を用いると $L(x_{n-1}, x_n)^2$ で表される。また、解軌道の 2 つの閉曲線は κ を定数として、$L(x_{n-1}, x_n) \;=\; \kappa$, $L(x_{n-1}, x_n) \;=\; -\kappa$ と表され、次の関係式を満たす。$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$
L(x_{n-1}, x_n) \;=\; -L(x_n, x_{n+1}). \tag{3.3}
$$

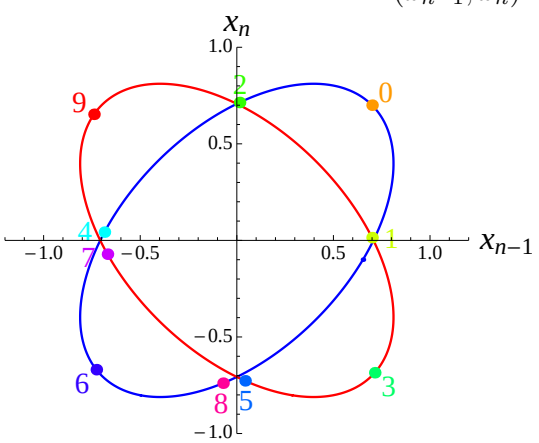

図 1: 式 (3.1) の解軌道 ($a = -0.5$)

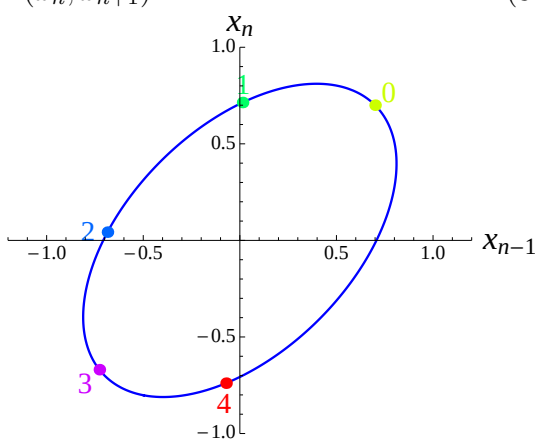

図 2: 式 (3.4) の解軌道 ($a = -0.5$)

ここで、$L(x,y)$ はある QRT 系の保存量である。以下の差分方程式 (x_{n-1}, x_n) $\mapsto$ (x_n, x_{n+1}) は、$L(x,y)$ を保存量に持つ QRT 系である (図 2)。

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{x_{n-1}} \ . \tag{3.4}$$

図 2 の解軌道の閉曲線は $L(x_{n-1}, x_n) \ = \ \kappa$ で表され、次を満たす。$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$L(x_{n-1}, x_n) \ = \ L(x_n, x_{n+1}). \tag{3.5}$$

式 (3.1) と式 (3.4) は関係がある。まず、次の写像を定義する。

$$\sigma : (x,y) \mapsto (-x, y), \quad \varphi : (x,y) \mapsto \left(y, \frac{a + y^2}{x} \right). \tag{3.6}$$

この 2 つの写像から作られる合成写像

$$\varphi \circ \sigma : (x,y) \mapsto \left(y, -\frac{a + y^2}{x} \right), \tag{3.7}$$

は式 (3.4) の写像である。このことは、「QRT 系とある周期写像との合成から QRT 系でない可積分な写像が生成できること」を示唆している。また、式 (3.3) はそれらの写像を用いて以下のように表せる。

$$L(x_n, x_{n+1}) \ = \ L(\varphi \circ \sigma(x_{n-1}, x_n)) \ = \ L(\sigma(x_{n-1}, x_n)) \ = \ -L(x_{n-1}, x_n) \ . \tag{3.8}$$

そして、式 (3.1) の保存量 $L(x_{n-1}, x_n)^2$ は以下の式から κ で表せることがわかる。

$$\begin{aligned} & (L(x,y) - \kappa)(L(x,y) + \kappa) \ = \ 0 \ , \\ \Longleftrightarrow \quad & \\ & L(x,y)^2 = \kappa^2 \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

4 一般の QRT 系からの構成

上記のような可積分な差分方程式は、一般の QRT 系からも生成できる [1]。以下の写像を定義する。

$$\varphi : (x,y) \mapsto \left(\frac{f_1(y) - x f_2(y)}{f_2(y) - x f_3(y)}, y \right), \quad \psi : (x,y) \mapsto \left(x, \frac{g_1(x) - y g_2(x)}{g_2(x) - y g_3(x)} \right). \tag{4.1}$$

これらの写像を用いた合成写像

$$\psi \circ \varphi : (x,y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} \ = \ \frac{f_1(y) - x f_2(y)}{f_2(y) - x f_3(y)}, \quad \bar{y} \ = \ \frac{g_1(\bar{x}) - y g_2(\bar{x})}{g_2(\bar{x}) - y g_3(\bar{x})}, \tag{4.2}$$

は非対称の QRT 系である。この QRT 写像の保存量 κ によって表される曲線は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(A + \kappa B)^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{y} \ = \ & (a_{00} + \kappa b_{00}) x^2 y^2 + (a_{01} + \kappa b_{01}) x^2 y + (a_{02} + \kappa b_{02}) x^2 \\ & + (a_{10} + \kappa b_{10}) x y^2 + (a_{11} + \kappa b_{11}) x y + (a_{12} + \kappa b_{12}) x \\ & + (a_{20} + \kappa b_{20}) y^2 + (a_{21} + \kappa b_{21}) y + (a_{22} + \kappa b_{22}), \\ = \ & 0 \ , \end{aligned} \tag{4.3}$$

によって与えられる。ここで、任意の周期写像 $\sigma : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ を用いて、

$$\sigma(\boldsymbol{x}(A+\kappa B)^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y}) \;=\; \sigma(\boldsymbol{x})(A+\kappa B)\sigma(^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y}) \;=\; \alpha(x, y, \kappa)\boldsymbol{x}(A+\beta(\kappa)B)^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y}, \tag{4.4}$$

$$\beta^n(\kappa) \;=\; \underbrace{\beta\circ\beta\circ\beta\circ\cdots\circ\beta}_{n}(\kappa) \;=\; \kappa, \tag{4.5}$$

を満たす、$A, B, \sigma : (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y)), \beta(\kappa)$ を求まれば、可積分方程式が生成できる。ただし、

A, B は 3×3 パラメータ行列, $\alpha(x, y, \kappa)$ はある因数, $\beta(\kappa)$ は周期関数、

である。

5 合成写像の例

以下によって定義される合成写像は可積分となる。

$$\sigma : (x, y) \mapsto (-x, -y), \;\; A \;=\; \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & a_{02} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{20} & 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \;\; B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & b_{01} & 0 \\ b_{10} & 0 & b_{12} \\ 0 & b_{21} & 0 \end{pmatrix}, \;\; \beta(\kappa) \;=\; -\kappa\,. \tag{5.1}$$

以下は、$\{a_{00}, a_{02}, a_{11}, a_{20}, a_{22}, b_{01}, b_{10}, b_{12}, b_{21}\} = \{7,\ 3,\ -2,\ 9,\ -2,\ 5,\ 5,\ -9,\ -9\}, (x_0, y_0) = (0.5,\ 0.2)$, としたときの解軌道である。

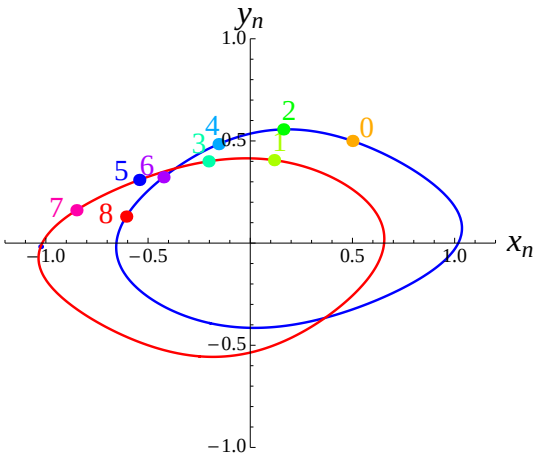

図 3: 合成写像 $\psi\circ\varphi\circ\sigma$ の解軌道

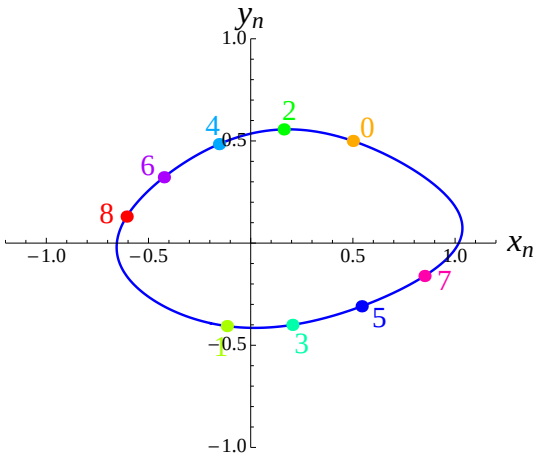

図 4: QRT 写像 $\psi\circ\varphi$ の解軌道

6 non-QRT mapping

次の差分方程式 $(x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_n, x_{n+1})$ を考える [2]。

$$x_{n+1} = \frac{-b - ax_{n-1}x_n - x_n^2}{x_{n-1} + ax_n}\,. \tag{6.1}$$

この方程式の保存量は、

$$K_{QRT1}(x, y) = \frac{-ab + ax^2 + 2xy + ay^2}{b + x^2 + 2axy + y^2}, \tag{6.2}$$

を用いると $K_{QRT1}(x_{n-1}, x_n)^2$ で表すことができる。例えば、$(a, b) = (-0.1,\ -0.5)$, $(x_0, x_1) = (0.7,\ 0.7)$ とすると、解軌道は図 5 のようになる。解軌道に現れる 2 つの閉曲線は $K_{QRT1}(x_n, x_{n+1}) =$

2.17801 $(n=0,2,4,\cdots)$, $K_{QRT1}(x_n,x_{n+1})=-2.17801$ $(n=1,3,5,\cdots)$ である。この式 (6.1) のパラメータを $a=0$ とすれば、式 (3.1) となる。

また、$K_{QRT1}(x,y)$ を保存量に持つ QRT 系は、$K_{QRT1}(x_{n-1},x_n)=K_{QRT1}(x_n,x_{n+1})$ を満たす。この関係式を満たす方程式 $(x_{n-1},x_n)\mapsto(x_n,x_{n+1})$ は、

$$x_{n+1}=\frac{-abx_{n-1}-bx_n-a^2bx_n-x_n^3+a^2x_n^3}{ab-x_{n-1}x_n+a^2x_{n-1}x_n}, \tag{6.3}$$

である。

ここで、式 (6.1) を考えると、

$$K_{QRT1}(x_{n-1},x_n)=-K_{QRT1}(x_n,x_{n+1}), \tag{6.4}$$

を満たす方程式となっている。実は、この関係式を満たす方程式は、式 (6.1) の他にもう一つある。この関係式を満たす 2 つの方程式は以下のとおりである。

$$x_{n+1}=\frac{-b-ax_{n-1}x_n-x_n^2}{x_{n-1}+ax_n}, \tag{6.5}$$

$$x_{n+1}=\frac{ab-x_{n-1}x_n-ax_n^2}{ax_{n-1}+x_n}. \tag{6.6}$$

式 (6.5) と式 (6.6) は $(a\leftrightarrow\frac{1}{a},b\leftrightarrow-b)$ で互いに移り合う。

これらの方程式から次の写像を定義する。

$$\varphi:(x,y)\mapsto(y,\frac{-b-axy-y^2}{x+ay}),\quad \sigma:(x,y)\mapsto(\frac{ab-xy-ay^2}{ax+y},y). \tag{6.7}$$

この 2 つを使った合成写像

$$\varphi\circ\sigma:(x,y)\mapsto(y,\bar{x}),\quad \bar{x}=\frac{-abx-by-a^2by-y^3+a^2y^3}{ab-xy+a^2xy}, \tag{6.8}$$

は QRT 系 (6.3) である。また、次の写像を定義する。

$$\eta:(x,y)\mapsto(\frac{-b-axy-y^2}{x+ay},y),\quad \xi:(x,y)\mapsto(x,\frac{ab-xy-ay^2}{ax+y}). \tag{6.9}$$

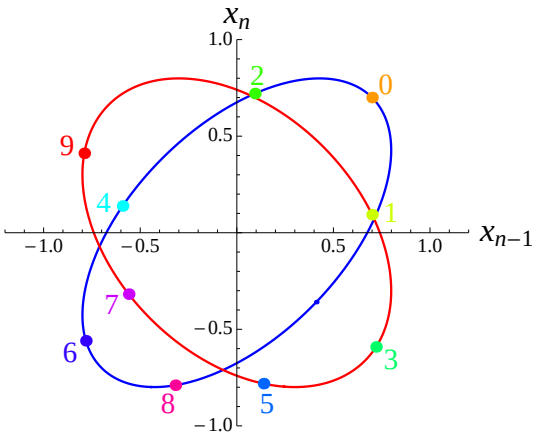

図 5: 式 (6.1) の解軌道

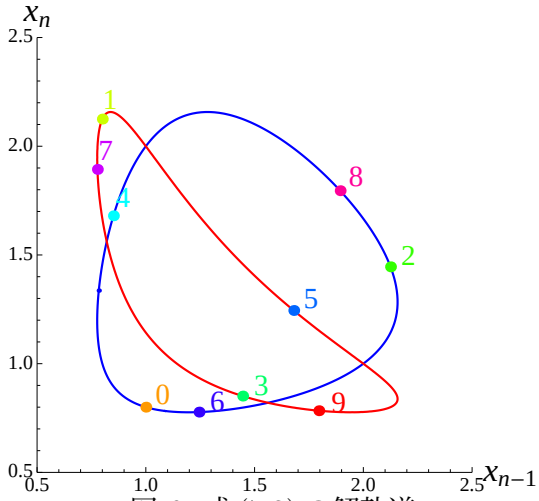

図 6: 式 (7.3) の解軌道

この２つを使った合成写像

$$\xi \circ \eta : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}), \quad \begin{cases} \bar{x} = \dfrac{-b - axy - y^2}{x + ay} \\ \bar{y} = \dfrac{ab - y\bar{x} - a\bar{x}^2}{ay + \bar{x}} \end{cases}, \tag{6.10}$$

はQRT系の２周期の再帰方程式になる。ちなみに、QRT系には２、３、４、５、６周期の再帰方程式が存在する [6]。

7　QRT系の保存量から方程式の生成

以上の例より、QRT系の保存量から関係式 $K_{QRT}(x_{n-1}, x_n) = -K_{QRT}(x_n, x_{n+1})$ を満たすような方程式はどれぐらいあるのかという問題が考えられる。以下は、今回新たに発見した例である。

$$\begin{aligned} &K_{QRT2}(x, y) \\ &\quad = \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ac & -2bc & 0 \\ -2bc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & bd \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x^2 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bc & 0 & 0 \\ 0 & -ad & bd \\ 0 & bd & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \\ &\quad = \frac{acx^2y^2 - 2bcx^2y - 2bcxy^2 + bd}{bcx^2y^2 - adxy + bdx + bdy}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

とすると、$K_{QRT2}(x_{n-1}, x_n) = K_{QRT2}(x_n, x_{n+1})$ を満たす式は、

$$x_{n+1} = \frac{-2b^2cdx_n^3 + abd^2x_n - b^2d^2 - x_{n-1}(\ -abcdx_n^3 + 3b^2cdx_n^2\ )}{-abcdx_n^3 + 3b^2cdx_n^2 - x_{n-1}(\ 2b^2c^2x_n^4 - a^2cdx_n^3 + 3abcdx_n^2 - 2b^2cdx_n\ )}, \tag{7.2}$$

であり、$K_{QRT2}(x_{n-1}, x_n) = -K_{QRT2}(x_n, x_{n+1})$ を満たす式は、

$$x_{n+1} = \frac{bd - x_{n-1}(\ bcx_n^2\ )}{bcx_n^2 - x_{n-1}(\ acx_n^2 - 2bcx_n\ )}, \tag{7.3}$$

$$x_{n+1} = \frac{-2bdx_n - x_{n-1}(\ bd - adx_n\ )}{bd - adx_n - x_{n-1}(\ -2bcx_n^2\ )}, \tag{7.4}$$

である。式 (7.3) において、$\{a, b, c, d\} = \{5, 2, 3, 6\}, (x_0, x_1) = (1,\ 0.8)$ とすると、解軌道は図6のようになる。これらの式も、6節の例と同じような構造を持っている。

8　結論

QRT系の保存量を出発点にしてある関係式を満たすような方程式を探るという、新たな可積分な差分方程式の生成法を示した。また、関係式はほんの一例しか示したおらず、今回の関係式でなくても、可積分な差分方程式が生成できることが期待できる。さらに、今回の生成法で作られた２つの方程式の合成写像によって、２周期の再帰方程式が現れたことから、再帰方程式を出発点に生成できることが期待できる。そして、このような方法を用いて、「今までにQRT系ではないと主張されている２階可積分方程式が、QRT系と関係しているのではないか」ということを示すことも今後の課題としたい。

参考文献

[1] H.Tanaka, J.Matuskidaira, A.Nobe and T.Tsuda, "Constructing Two-Dimensional Integrable Mappings that Possess Invariants of High Degree"; RIMS Kokyuroku B13(2009), 75-84

[2] N.Joshi, B.Grammaticos, T.Tamizhmani and A.Ramani, "From Integrable Lattices to Non-QRT Mappings"; Letters in Mathematical Physics (2006) 78:27-37

[3] P. Kassotakis and N. Joshi, "On Non-QRT Mappings of the Plane"; arXiv:0906.2815v1 15 Jun 2009

[4] R.Hirota, K.Kimura and H.Yahagi, "How to Find the Conserved Quantities of Nonlinear Discrete Equations"; J. Phys. A: Math. Gen. 34 (2001) 10377-10386

[5] A.S.Carstea, B.Grammaticos and A.Ramani, "Deautonomizing Integrable Non-QRT Mappings"; J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 485207 (10pp)

[6] T.Tsuda, "Integrable Mappings Via Rational Elliptic Surfaces"; Journal of Physcis A 37 (2004) 2721

[7] A.Nobe, "On Periodic Mappings Arising from the QRT System"; Theoretical and Applied Mechanics Japan Vol. 52 (2003) p.229-237

[8] A.Nobe, "Ultradiscrete QRT Maps and Tropical Elliptic Curves"; Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41 (2008) 125205