高次元写像に於ける不確定点の可積分極限での振舞い

齋藤, 暁

畠中, 智哉
首都大学大学院理学研究科

齋藤, 革子
横浜国立大学工学部

https://doi.org/10.15017/18704

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (14), 2010-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 14 (pp. 94-98)

高次元写像に於ける不確定点の可積分極限での振舞い

齋藤 暁 (SAITO Satoru), 畠中 智哉 (HATANAKA Tomoya),
齋藤 革子 (SAITOH Noriko)

(Received January 28, 2010)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

高次元写像に於ける不確定点の可積分極限での振舞い

首都大理学研究科 (特別研究員)　齋藤　暁 (SAITO Satoru)
首都大理学研究科　畠中智哉 (HATANAKA Tomoya)
横浜国大工学部　齋藤革子 (SAITOH Noriko)

高次元有理写像に於いて、ジュリア集合が可積分極限でどのように消滅するのかを解析的に調べた。

1　序

以下で用いる言葉の記号と意味を次のように定める。

- 不確定点：　写像の分子と分母が同時にゼロになる点
- ジュリア集合：　不安定周期点の集合の閉包
- 不変周期点多様体 (IVPP)：　写像の各周期毎に不変量で定まる周期点の作る多様体
- 不安定固定点多様体 (UVFP)：　非可積分のときのみ存在する固定点の作る多様体
- 特異点多様体 (VSP)：　すべての周期の周期点が同時に集積する点の作る多様体

これらについては前回次の定理 1 を示した。

定理１　充分な数の不変量を持つ可積分写像の周期点は各周期毎に IVPP を成す

今回は以下の２つの定理を示す。

定理２　ジュリア集合は可積分極限で

- UVFP を持たなければ、すべてが各周期毎に対応する IVPP に漸近する
- UVFP を持てば、一部が各周期毎に IVPP に漸近し、残りはすべての周期の周期点が UVFP に漸近する
- UVFP 自身は可積分極限で消滅するか、VSP に変わる

定理３　特異点閉じ込めから回復した写像の列は周期点の集合を生成する

系　特異点閉じ込めから回復した可積分写像の列はすべての IVPP を生成する

2　UVFPへの漸近とVSPの生成(定理２)

パラメーター a を持つ $\hat{\mathbf{C}}^d$ 上の有理写像 $f(a)$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_d) \xrightarrow{f(a)} \mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_d) \tag{1}$$

の繰り返し　$\mathbf{x} \to \mathbf{X} \to \mathbf{X}^{(2)} \to \mathbf{X}^{(3)} \to \cdots$　を考え、

$$a \neq 0 \quad \text{なら非可積分、} \quad a = 0 \quad \text{なら可積分}$$

とする。点の集合

$$G_a = \left\{ \mathbf{x} \left| \bigcap_{j=1}^{d} \{ w_j(a, \mathbf{x}) = 0 \} \right. \right\}, \tag{2}$$

は $f(a)$ の不安定固定点多様体 (UVFP)、即ちこの上で $f(a)$ は

$$a \neq 0 \quad \text{なら} \ \mathbf{X} = \mathbf{x}\text{、} \quad a = 0 \quad \text{なら} \ \mathbf{X} \neq \mathbf{x}$$

とする。このような有理写像は一般に

$$X_j = \frac{P_j(a, \mathbf{x}) + a x_j}{Q_j(a, \mathbf{x}) + a}, \qquad j = 1, 2, ..., d,$$

と書ける。ただし $P_j,\ Q_j$ は $a = 0$ で恒等的にゼロでないが、G_a 上ではゼロとなる有理関数であり、次のように表せる：

$$P_j(a, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} f_{ij}(a, \mathbf{x}) w_i(a, \mathbf{x}), \quad Q_j(a, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} g_{ij}(a, \mathbf{x}) w_i(a, \mathbf{x})$$

周期条件は

$$X_j^{(n)} = \frac{P_j(a, \mathbf{X}^{(n-1)}) + a X_j^{(n-1)}}{Q_j(a, \mathbf{X}^{(n-1)}) + a} = x_j, \tag{3}$$

即ち

$$\sum_{i=1}^{d} \Big\{ f_{ij}(a, \mathbf{X}^{(n-1)}) - x_j g_{ij}(a, \mathbf{X}^{(n-1)}) \Big\} w_i(a, \mathbf{X}^{(n-1)}) = a \Big(x_j - X_{,j}^{(n-1)} \Big) \tag{4}$$

と書け、$a \neq 0$ のときには n 周期点の他にUVFP(2) もこれを満たす。a が 0 に近付けば n 周期点は連続的に移動する。右辺がゼロになったとき、左辺はIVPPの点によって満たされるが、その他にUVFP(2) 上の点もこの条件を満たす。従って定理２の始めの２項が示された。

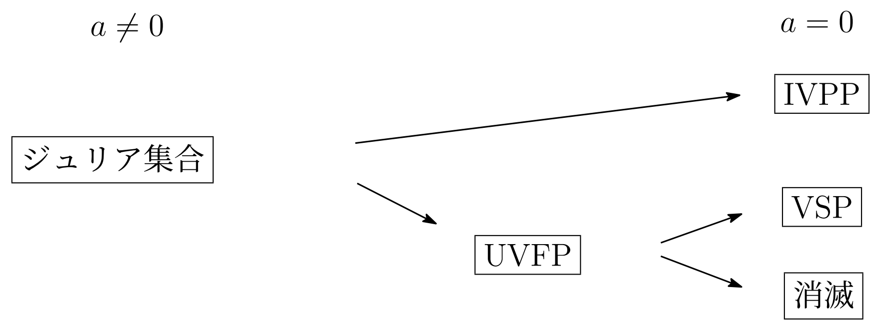
(4) を x_k で微分して、(2) の近傍の振舞を見ると

$$\left.\frac{\partial X_j(\mathbf{x})}{\partial x_k}\right|_{w_j=0} = \delta_{jk} + \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{d}\Big\{f_{ij}(a,\mathbf{x}) - x_j g_{ij}(a,\mathbf{x})\Big\}\frac{\partial w_i(a,\mathbf{x})}{\partial x_k}$$

となって、$a \to 0$ の極限で発散する。このことから G_a を不安定固定点多様体 UVFP と呼んだ。可積分極限に於いて写像は

$$X_j \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{\sum_{i=1}^{d} f_{ij}(0,\mathbf{x}))w_i(0,\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^{d} g_{ij}(0,\mathbf{x})w_i(0,\mathbf{x})}, \qquad j = 1, 2, ..., d$$

となることから、写像は一般に G_a 上で分母と分子が同時にゼロとなり、従って UVFP は特異点多様体 VSP になる。分母と分子で w_i が偶々打ち消し合えば、UVFP は消滅する。以上を纏めると



例：　3 次元 Lotka-Volterra 写像

$$X = x\frac{1+a-y+yz}{1+a-z+zx}, \qquad Y = y\frac{1+b-z+zx}{1+b-x+xy}, \qquad Z = z\frac{1+c-x+xy}{1+c-y+yz}$$

は不安定固定点多様体 (UVFP)

$$\Lambda_+ = \{1-y+yz=0 \quad \cap \quad 1-z+zx=0 \quad \cap \quad 1-x+xy=0\}$$

を持つ。$(a,b,c) = (0,0,0)$ では不変量

$$r = xyz, \qquad s = (1-x)(1-y)(1-z)$$

を持ち可積分。このとき IVPP, $\gamma^{(n)}(r,s) = 0$, は

$$\begin{aligned}
\gamma^{(2)}(r,s) &= s+1, \\
\gamma^{(3)}(r,s) &= r^2+s^2-rs+r+s+1, \\
\gamma^{(4)}(r,s) &= r^3s+s^3-3rs^2+6r^2s+3rs-r^3+s, \quad etc.
\end{aligned}$$

3　特異点閉じ込めから生成されるIVPP(定理３)

写像

$$X_j = \frac{N_j(\mathbf{x})}{D_j(\mathbf{x})}, \qquad j = 1, 2, ..., d$$

が点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ で発散し、その後特異点閉じ込めが起きたとする。例えば

$$D_1^{(k)}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad D_1^{(k+n)}(\mathbf{x}_0) \neq 0,\ n = 1, 2, ...$$

ならば　$\boxed{D_1^{(k+n)}(\mathbf{x}) = 0 \text{ の解は } n \text{ 周期条件を満たす。}}$

何故ならば、n 周期点又は n を割り切る周期の周期点のみがこの条件を満たし得るからである。特に写像が IVPP を持つ可積分写像ならば

$$D_1^{(k+n)}(\mathbf{x}) \ \propto \ \gamma^{(n)}, \quad n = 2, 3, ... \tag{5}$$

例：　再び 3d LV 写像について、可積分な場合を考える。

$\mathbf{x}_0 = \left(x, y, \frac{1}{1-x}\right)$ とすると写像は

$$\mathbf{x}_0 \to (\infty, 0, 1) \to (1, 0, \infty) \to \left(\frac{1}{1-x}, y, x\right) \to \cdots \tag{6}$$

となって特異点 $(\infty, 0, 1)$ は閉じ込められる。今の場合 $k = 1$ である。不変量 r, s を用いて

$$\mathbf{x}_0 = \left(\frac{r-s}{r+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r+1}{s+1}\right),\ \mathbf{X}^{(3)} = \left(\frac{r+1}{s+1}, r\frac{s+1}{r-s}, \frac{r-s}{r+1}\right)$$

と書けることに注目すると、$D_1^{(3)} = s + 1 = \gamma^{(2)}(r, s)$ である。写像を繰り返すことによって (5) が容易に確かめられ、各周期毎に異なる IVPP の曲面の系列

$$1 \to \gamma^{(2)}(r, s) \to \gamma^{(3)}(r, s) \to \gamma^{(4)}(r, s) \to \cdots$$

が得られる。

4 Remarks

- 可積分 3dLV 写像の不確定点集合

$$\Lambda_+ = \{1 - y + yz = 0 \quad \cap \quad 1 - z + zx = 0 \quad \cap \quad 1 - x + xy = 0\}$$

及び逆写像の不確定点集合

$$\Lambda_- = \{1 - z + yz = 0 \quad \cap \quad 1 - x + zx = 0 \quad \cap \quad 1 - y + xy = 0\}$$

は $r = s = -1$ によって満たされ、その上ですべての周期の周期条件

$$\gamma^{(n)}(-1,-1) = 0, \qquad n = 2, 3, ...$$

が満たされる。即ち $\{\Lambda_+ \cup \Lambda_-\}$ は特異点多様体 (VSP)。

- 導来可積分圏

$$(X^{(n+1)}, Y^{(n+1)}, Z^{(n+1)}) = \left(\frac{\tau_3^{(n-1)}\tau_3^{(n)}}{\tau_2^{(n-1)}\tau_1^{(n)}},\ r\frac{\tau_1^{(n-1)}\tau_1^{(n)}}{\tau_3^{(n-1)}\tau_2^{(n)}},\ \frac{\tau_2^{(n-1)}\tau_2^{(n)}}{\tau_1^{(n-1)}\tau_3^{(n)}} \right)$$

と置けば 3dLV から広田・三輪方程式

$$\tau_1^{(n-1)}\tau_3^{(n)} + \sigma\tau_3^{(n-1)}\tau_1^{(n)} + \tau_2^{(n-1)}\tau_2^{(n)} = 0$$

が得られる。写像 $(x, y, z) \to (X, Y, Z)$ は導来圏の八面体のシフト $\tau_j^{(n)} = \tau_j^{(n-1)}[1]$ に他ならない

$$\tau_1^{(n-1)} \to \tau_2^{(n-1)} \to \tau_3^{(n-1)} \to \tau_1^{(n)} \to \tau_2^{(n)} \to \cdots$$