一般化BKP差分方程式のバックルンド変換

広田, 良吾
早稲田大学名誉教授

https://doi.org/10.15017/18700

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (10), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 10 (pp. 58-68)

一般化BKP差分方程式のバックルンド変換

広田 良吾 (HIROTA Ryogo)

（Received January 25, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

一般化 BKP 差分方程式のバックルンド変換

早稲田大学名誉教授　 広田　良吾 (HIROTA Ryogo)

概要

一般化 BKP 差分方程式は双線形形式で

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f=0,$$

ここで $D_1+D_2+D_3+D_4=0$ であり、z_1, z_2, z_3 and z_4 は任意定数である。
この方程式のバックルンド変換式, Lax-Pair について講演する。

研究の歴史

現在までにバックルンド変換や Lax-Pair が確立されたソリトン差分方程式、KdV 方程式や戸田方程式などはすべてＡ型の方程式である。

一方、Sawada-Kotera 方程式はＢ型に属し、この方程式の差分化も成功しているがこの差分方程式の Lax-Pair は未だ確立していない。

もっと一般的に次式で表現される一般化 BKP 差分方程式がある。

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f=0,$$

ただし $D_1+D_2+D_3+D_4=0$。
この方程式の Lax-Pair はどうなるのだろう？

Sawada-Kotera 方程式は次の双線形方程式で記述される。

$$D_x(D_t+D_x^5)f\cdot f=0,$$

(A)　薩摩・Kaup による先駆的研究 (1977 年)。

Junkichi SATSUMA and David KAUP: “ A Bäcklund Transformation for a Higer Order Koteweg-De Vries Equation ”,J.Phys.Soc.Jpn.(1977)692-697

1. Lax operator の固有値に相当する定数 λ が含まれているため、この定数を利用して方程式の高次保存量を生成することが可能である。
2. しかし Lax pair の固有値問題が 3 階の微分方程式になるため逆散乱問題を解くことが非常に難しくなる。現在まで Lax pair を使って解が作れていない。

(B)　現在　discrete AKP (Hirota-Miwa) 方程式と呼ばれている次の形の双線形差分方程式

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3)]f \cdot f = 0,$$

のバックルンド変換が求められた。

Ryogo HIROTA: "Discrete Analogue of a Generalized Toda Equation", J.Phys.Soc.Jpn.50(1981)3785-3791.

(C)　三輪哲二氏の私信、1981 年 11 月。

この中で、discrete BKP 方程式のバックルンド変換式が求められている。ただし任意パラメータは含まれていない。

(D)　三輪氏の結果に刺激されて、広田は discrete BKP 双線形方程式のバックルンド変換式を求めている。ただしバックルンド変換式の無矛盾性は示していない。1981 年 12 月 4 日　未発表。

(E)　symmetric Bäcklund 変換方程式。

新澤信彦氏と斉藤暁氏は f と g に対するバックルンド変換方程式を拡張して f, g に対する新たな補助方程式を作り、Hirota-Miwa 方程式に対するバックルンド変換式を　行列 $\times$ ベクトル $= 0$　の形に表現し、無矛盾条件をこの行列の　行列式 $= 0$　と表現することに成功した：
N.Shinzawa and S.Saito J.Phys.A**31**(1988) 4533-4540.

　更に、BKP 差分方程式の symmetric バックルンド変換式も同様に表現できることを示した。　新澤信彦、広田良吾：数理解析研究所講研録 1280 巻 2002 年 71-75.

　Lax-pair はどこに隠れているのだろう！このために

バックルンド変換の復習

をやる。バックルンド変換の基本公式は次の二つである。

1) *Exchange formula* (f と g の相対位置を換える)。

$$\{\exp(D_j)f\cdot f\}\{\exp(D_k)g\cdot g\}-\{\exp(D_k)f\cdot f\}\{\exp(D_j)g\cdot g\}$$
$$=2\sinh[(D_j+D_k)/2]\{\exp[(D_j-D_k)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_j-D_k)/2]f\cdot g\},$$

for $j,k=1,2,3,4.$

2) *Interchange formula* (インデックス j と $j-1$ を入れ換える)。

$$2\sinh[(D_j+D_4)/2])\{\exp[(D_j-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{[\exp[-(D_{j+1}-D_{j-1})/2]f\cdot g\}$$
$$=2\sinh[(D_{j-1}+D_4)/2])\{\exp[(D_{j-1}-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{[\exp[(D_j-D_{j+1})/2]f\cdot g\},$$

for $j=1,2,3$ and for the fixed D_4,where $D_{j-1}=D_{j+2}(Mod\,3)$.

バックルンド変換の求め方

一般化 BKP 差分方程式を考える。

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f=0,$$

ただし $D_1+D_2+D_3+D_4=0$。

この差分方程式の一つの解 f と同じ方程式の別解 g

$$[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g=0.$$

を結ぶバックルンド変換を考える。
天下りに次式 P を考える。

$$\begin{aligned}P_{12}\equiv&\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\&\times\{[z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\\&-\{[z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\&\times\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\\=&\sum_{j=1,2}\sum_{k=3,4}z_jz_k\\&\times\{[\exp(D_j)f\cdot f][\exp(D_k)g\cdot g]-[\exp(D_k)f\cdot f][\exp(D_j)g\cdot g]\}.\end{aligned}$$

後の議論のために、同じような関数 P_{23},P_{31} も導入する。

$$\begin{aligned}P_{23}\equiv&\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\&\times\{[z_1\exp(D_1)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\{[z_1\exp(D_1)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\
&\quad\times\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\\
=&\sum_{j=2,3}\sum_{k=1,4}z_jz_k\\
&\times\{[\exp(D_j)f\cdot f][\exp(D_k)g\cdot g]-[\exp(D_k)f\cdot f][\exp(D_j)g\cdot g]\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{31}\equiv&\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\
&\quad\times\{[z_2\exp(D_2)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\\
&-\{[z_2\exp(D_2)+z_4\exp(D_4)]f\cdot f\}\\
&\quad\times\{[z_1\exp(D_1)+z_2\exp(D_2)+z_3\exp(D_3)+z_4\exp(D_4)]g\cdot g\}\\
=&\sum_{j=3,1}\sum_{k=2,4}z_jz_k\\
&\times\{[\exp(D_j)f\cdot f][\exp(D_k)g\cdot g]-[\exp(D_k)f\cdot f][\exp(D_j)g\cdot g]\}.
\end{aligned}
$$

P_{12} は *Exchange formula* を使うと

$$
\begin{aligned}
P_{12}=&\sum_{j=1,2}\sum_{k=3,4}z_jz_k2\sinh[(D_j+D_k)/2]\\
&\{\exp[(D_j-D_k)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_j-D_k)/2]f\cdot g\}
\end{aligned}
$$

となる。条件式 $D_1+D_2+D_3+D_4=0$ によって

$$
\begin{aligned}
&\sinh[(D_1+D_4)/2]=-\sinh[(D_2+D_3)/2),\\
&\sinh[(D_2+D_4)/2]=-\sinh[(D_1+D_3)/2)
\end{aligned}
$$

となるため、この P_{12} は 2 項づつまとめられて

$$
\begin{aligned}
P_{12}=&\,2\sinh[(D_1+D_3)/2]\\
&\Big\{z_1z_3\{\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_1-D_3)/2]f\cdot g\}\\
&-z_2z_4\{\exp[(D_2-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_2-D_4)/2]f\cdot g\}\Big\}\\
&+2\sinh[(D_2+D_3)/2]\\
&\Big\{z_2z_3\{\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_2-D_3)/2]f\cdot g\}\\
&-z_1z_4\{\exp[(D_1-D_4)/2]f\cdot g\}\cdot\{\exp[-(D_1-D_4)/2]f\cdot g\}\Big\}
\end{aligned}
$$

と表現される。
バックルンド変換の形として次式を仮定する。

$$
\begin{aligned}
&\{a_2\exp[(D_2-D_3)/2]+b_2\exp[-(D_2-D_3)/2]\\
&\quad+c_2\exp[(D_1-D_4)/2]+d_2\exp[-(D_1-D_4)/2]\}f\cdot g=0,\\
&\{a_3\exp[(D_3-D_1)/2]+b_3\exp[-(D_3-D_1)/2]\\
&\quad+c_3\exp[(D_2-D_4)/2]+d_3\exp[-(D_2-D_4)/2]\}f\cdot g=0
\end{aligned}
$$

である。　**Interchange formula** (インデックス $j-1$ と j を交換する）は

$$
\begin{aligned}
&2\sinh[(D_{j-1}+D_{j+1})/2] \\
&\qquad \Big(\exp[(D_{j-1}-D_{j+1})/2]f\cdot g\Big)\cdot\Big(\exp[(D_j-D_4)/2]f\cdot g\Big) \\
&= 2\sinh[(D_j+D_{j+1})/2] \\
&\qquad \Big(\exp[(D_j-D_{j+1})/2]f\cdot g\Big)\cdot\Big(\exp[(D_{j-1}-D_4)/2]f\cdot g\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{for } j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

を使う。ただし D_4 は固定し、$D_0 = D_3, D_{j+3} = D_j$, for $j = 1, 2, 3$ とする。
Interchange formula を使うために、バックルンド変換を使って P_{12} を書き直す。バックルンド変換の第一式より

$$
\begin{aligned}
&\exp[-(D_2-D_3)/2]f\cdot g \\
&= -(1/b_2)\{a_2\exp[(D_2-D_3)/2] \\
&\qquad\qquad +c_2\exp[(D_1-D_4)/2]+d_2\exp[-(D_1-D_4)/2]\}f\cdot g, \\
&\exp[(D_1-D_4)/2]f\cdot g \\
&= -(1/c_2)\{a_2\exp[(D_2-D_3)/2] \\
&\qquad\qquad +b_2\exp[-(D_2-D_3)/2]+d_2\exp[-(D_1-D_4)/2]\}f\cdot g.
\end{aligned}
$$

第二式より

$$
\begin{aligned}
&\exp[-(D_1-D_3)/2]f\cdot g \\
&= -(1/a_3)\{b_3\exp[-(D_3-D_1)/2] \\
&\qquad\qquad +c_3\exp[(D_2-D_4)/2]+d_3\exp[-(D_2-D_4)/2]\}f\cdot g, \\
&\exp[(D_2-D_4)/2]f\cdot g \\
&= -(1/c_3)\{a_3\exp[(D_3-D_1)/2] \\
&\qquad\qquad +b_3\exp[-(D_3-D_1)/2]+d_3\exp[-(D_2-D_4)/2]\}f\cdot g.
\end{aligned}
$$

を得る。
これらの表現を P_{12} に代入して整理すると、次式が得られる。

$$
\begin{aligned}
P_{12} &= \sinh[(D_1+D_3)/2] \\
&\quad \{(-z_1z_3d_3/a_3+z_2z_4b_3/c_3) \\
&\qquad [\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_2-D_4)/2]f\cdot g] \\
&\quad -z_1z_3c_3/a_3[\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[(D_2-D_4)/2]f\cdot g] \\
&\quad +z_2z_4a_3/c_3[\exp[-(D_1-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_2-D_4)/2]f\cdot g]\} \\
&+2\sinh[(D_2+D_3)/2]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{(-z_2z_3d_2/b_2+z_1z_4a_2/c_2)\\
&\quad[\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_1-D_4)/2]f\cdot g]\\
&-z_2z_3c_2/b_2[\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[(D_1-D_4)/2]f\cdot g]\\
&+z_1z_4b_2/c_2[\exp[-(D_2-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_1-D_4)/2]f\cdot g]\}
\end{aligned}
$$

したがって未定係数を

$$
a_2b_2z_1z_4=c_2d_2z_2z_3,\qquad a_3b_3z_2z_4=c_3d_3z_3z_1.
$$

と選ぶと P_{12} は少し簡単になる。

$$
\begin{aligned}
P_{12}=&\,2\sinh[(D_1+D_3)/2]\\
&\quad[(-z_1z_3c_3/a_3)\exp[(D_1-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[(D_2-D_4)/2]f\cdot g]\\
&+2\sinh[(D_2+D_3)/2]\\
&\quad[(-z_2z_3c_2/b_2)\exp[(D_2-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[(D_1-D_4)/2]f\cdot g]\\
&+2\sinh[(D_1+D_3)/2]\\
&\quad[(z_2z_4a_3/c_3)\exp[-(D_1-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_2-D_4)/2]f\cdot g]\\
&+2\sinh[(D_2+D_3)/2]\\
&\quad[(z_1z_4b_2/c_2)\exp[-(D_2-D_3)/2]f\cdot g]\cdot[\exp[-(D_1-D_4)/2]f\cdot g].
\end{aligned}
$$

この式に $Interchange\ formula$ を適用すると、未定係数が式　$a_3c_2z_2+b_2c_3z_1=0.$　を満たすとき,　$P_{12}=0$　である。

新しい量 P_{12} が 0 となるための未定係数の条件式は全部で次の

$$
a_2b_2z_1z_4=c_2d_2z_2z_3,\qquad a_3b_3z_2z_4=c_3d_3z_3z_1,\qquad a_3c_2z_2+b_2c_3z_1=0.
$$

3 個であり、未定係数の数が条件式の数より多いので、簡単に成立する。

一方バックルンド変換式の数は

$$
\begin{aligned}
&\{a_j\exp[(D_j-D_{j+1})/2]+b_j\exp[-(D_j-D_{j+1})/2]\\
&+c_j\exp[(D_{j+2}-D_4)/2]+d_j\exp[-(D_{j+2}-D_4)/2]\}f\cdot g=0,
\end{aligned}
$$

$(j=2,3.)$ であり、変数 f,g の数 と同数であるので、この 2 式から得られる線形差分方程式の無矛盾性が証明されるとそれが探していた　**Lax pair**　である。

関数 P_{12} の代わりに関数 P_{23},P_{31} も同様に考えると、
結論として未定係数の関係式を次のように

$$
\begin{aligned}
b_1=-\frac{a_2c_1z_1}{c_2z_3},\quad b_2=-\frac{a_3c_2z_2}{c_3z_1},\quad b_3=-\frac{a_1c_3z_3}{c_1z_2},\\
d_1=-\frac{a_1a_2z_4}{c_2z_2},\quad d_2=-\frac{a_2a_3z_4}{c_3z_3},\quad d_3=-\frac{a_3a_1z_4}{c_1z_1}
\end{aligned}
$$

設定すると、3 個のバックルンド変換式

$$\begin{aligned}&\{a_j \exp[(D_j - D_{j+1})/2] + b_j \exp[-(D_j - D_{j+1})/2]\\&+c_j \exp[(D_{j+2} - D_4)/2] + d_j \exp[-(D_{j+2} - D_4)/2]\} f \cdot g = 0,\end{aligned}$$

$j = 1, 2, 3.$　より

$$P_{12} = 0, \quad P_{23} = 0, \quad P_{31} = 0.$$

が得られることが分かる。したがって 3 個のバックルンド変換式から選んだ任意の pair から **Lax pair** が生成されることになる。

Lax pair の無矛盾性

バックルンド変換式は、変数変換　$g = f\phi$　と双線形演算子の基本的性質

$$\begin{aligned}\exp(zD_j) f \cdot f\phi &= \{\exp(zD_j) f \cdot f\}\{\exp(-z\partial_j)\phi\}\\ \partial_j &= \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad z = const. \quad \text{for } j = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

を使うと、ϕ に対する次の線形差分方程式に変換される。

$$\begin{aligned}&\{\exp[(D_j - D_{j+1})/2] f \cdot f\}\\&\quad \times \{(a_j \exp[-(\partial_j - \partial_{j+1})/2] + b_j \exp[(\partial_j - \partial_{j+1})/2])\phi\}\\&+\{\exp[(D_{j+2} - D_4)/2] f \cdot f\}\\&\quad \times \{(c_j \exp[-(\partial_{j+2} - \partial_4)/2] + d_j \exp[(\partial_{j+2} - \partial_4)/2])\phi\} = 0\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{for } j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

この式を $\exp[(D_j - D_{j+1})/2] f \cdot f$ で割り、

$$\hat{u}_j \equiv \frac{\exp[(D_{j+2} - D_4)/2] f \cdot f}{\exp[(D_j - D_{j+1})/2] f \cdot f}$$

と置くと次式になる。

$$\begin{aligned}&\{a_j \exp[-(\partial_j - \partial_{j+1})/2] + b_j \exp[(\partial_j - \partial_{j+1})/2]\\&+\hat{u}_j(c_j \exp[-(\partial_{j+2} - \partial_4)/2] + b_j \exp[(\partial_{j+2} - \partial_4)/2] = 0.\end{aligned}$$

更に、この式に $\exp[(\partial_j + \partial_{j+1})/2]$ を掛けて全体をシフトさせ、

$$u^{(j)} \equiv \exp[(\partial_j + \partial_{j+1})/2]\hat{u}_j$$

と置く。関係式 $\partial_j + \partial_{j+1} + \partial_{j+2} + \partial_4 = 0$ を使うと線形方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned}&\{a_j \exp(\partial_{j+1}) + b_j \exp(\partial_j)\\&\quad +u^{(j)}[c_j \exp(-\partial_{j+2}) + d_j \exp(\partial_j + \partial_{j+1} + \partial_{j+2}]\}\phi = 0.\end{aligned}$$

数式の表記を簡単にするため、シフト演算子 p, q, r を次式で導入する。任意の定数 α, β, γ に対して

$$p^\alpha \equiv \exp(\alpha \frac{\partial}{\partial x_1}), \quad q^\beta \equiv \exp(\beta \frac{\partial}{\partial x_2}), \quad r^\gamma \equiv \exp(\gamma \frac{\partial}{\partial x_3})$$

即ち任意関数 $h(x_1, x_2, x_3)$ に作用すると

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma h(x_1, x_2, x_3) = h(x_1 + \alpha, x_2 + \beta, x_3 + \gamma)$$

である。この式を短く

$$p^\alpha q^\beta r^\gamma h_{000} = h_{\alpha\beta\gamma}$$

と書く。$u^{(j)}$ の定義より

$$\begin{aligned}u^{(1)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_1+1, x_2+1, x_3+1) f(x_1, x_2, x_3-1)}{f(x_1+1, x_2, x_3) f(x_1, x_2+1, x_3)},\\u^{(2)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_1+1, x_2+1, x_3+1) f(x_1-1, x_2, x_3)}{f(x_1, x_2+1, x_3) f(x_1, x_2, x_3+1)},\\u^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= \frac{f(x_1+1, x_2+1, x_3+1) f(x_1, x_2-1, x_3)}{f(x_1, x_2, x_3+1) f(x_1+1, x_2, x_3)}.\end{aligned}$$

である。この式を $u^{(1)} = u, u^{(2)} = v, u^{(3)} = w$ と置いて、

$$u_{000} = \frac{f_{111} f_{00-1}}{f_{100} f_{010}}, \quad v_{000} = \frac{f_{111} f_{-100}}{f_{010} f_{001}}, \quad w_{000} = \frac{f_{111} f_{0-10}}{f_{001} f_{100}}.$$

と略記する。

u, v, w の定義式より、次の重要な $\{u, v, w\}$ の関係式が得られる。

$$\frac{u_{000}}{v_{000}} = \frac{u_{-1-10}}{v_{0-1-1}}, \quad \frac{v_{000}}{w_{000}} = \frac{v_{0-1-1}}{w_{-10-1}}, \quad \frac{w_{000}}{u_{000}} = \frac{w_{-10-1}}{u_{-1-10}}.$$

この記号を使うと ϕ に対する 3 個の線形方程式は

$$\begin{aligned}\hat{L}_1 \phi_{000} &= 0, \quad \hat{L}_1 = a_1 q + b_1 p + u_{000}[c_1 r^{-1} + d_1 pqr],\\\hat{L}_2 \phi_{000} &= 0, \quad \hat{L}_2 = a_2 r + b_2 q + v_{000}[c_2 p^{-1} + d_2 pqr],\\\hat{L}_3 \phi_{000} &= 0, \quad \hat{L}_3 = a_3 p + b_3 r + w_{000}[c_3 q^{-1} + d_3 pqr].\end{aligned}$$

と表される。

線形方程式の無矛盾性

3 個の線形方程式の中から任意の 2 個の方程式を選ぶ。
たとえば $\hat{L}_1\phi_{000} = 0,\ \hat{L}_2\phi_{000} = 0$ を選ぶ。この 2 式から生成された Lax pair$\{L_{12}, A_{12}\}$ の交換関係が0になること、即ち $[L_{12}, A_{12}] = 0$ は、ある条件のもとで、第3の方程式 $\hat{L}_3\phi_{000} = 0$ に等しい。

ある条件とは変数 $\{u, v, w\}$ に関する非線形差分方程式が成り立つことであるが、この条件は f が一般化 BKP 差分方程式

$$[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4)]g \cdot g = 0.$$

を満たせば常に満たされる。

このことを以下で証明する。

一組の演算子 $\{\hat{L}_1, \hat{L}_2\}$ より次式のように Lax pair $\{L_{12}, A_{12}\}$ を生成する。

$$\begin{aligned} L_{12} &\equiv q^{-1}\hat{L}_1 - a_1 = b_1pq^{-1} + u_{0-10}(c_1q^{-1}r^{-1} + d_1pr), \\ A_{12} &\equiv q^{-1}\hat{L}_2 - b_2 = a_2q^{-1}r + v_{0-10}(c_2p^{-1}q^{-1} + d_2pr). \end{aligned}$$

L_{12} と A_{12} の交換関係式 C_{12} を定義する。

$$C_{12}(x_1, x_2, x_3) \equiv L_{12}(A_{12}\phi_{000}) - A_{12}(L_{12}\phi_{000}).$$

C_{12} を計算すると

$$\begin{aligned} &C_{12}(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad = a_2c_1(u_{0-10} - u_{0-21})\phi_{0-20} + a_2d_1(u_{0-10} - u_{0-21})\phi_{1-12} \\ &\quad -b_1c_2(v_{0-10} - v_{1-20})\phi_{0-20} - b_1d_2(v_{0-10} - v_{1-20})\phi_{2-11} \\ &\quad +c_1d_2(u_{0-10}v_{0-2-1} - u_{1-11}v_{0-10})\phi_{1-10} \\ &\quad +c_2d_1(u_{0-10}v_{1-11} - u_{-1-20}v_{0-10})\phi_{0-11} \\ &\quad +d_1d_2(u_{0-10}v_{1-11} - u_{1-11}v_{0-10})\phi_{202}. \end{aligned}$$

となる。この式に含まれていた c_1c_2 の項は $\{u, v, w\}$ の関係式によって 0 になっている。

線形方程式 $\{\hat{L}_1\phi_{000} = 0, \hat{L}_2\phi_{000} = 0,\}$ に $pq^{-1}r$ を掛けてシフトすると、表現式

$$\begin{aligned} \phi_{2-11} &= -(1/b_1)[a_1\phi_{101} + u_{1-11}(c_1\phi_{1-10} + d_1\phi_{202})], \\ \phi_{1-12} &= -(1/a_2)[b_2\phi_{101} + v_{1-11}(c_2\phi_{0-11} + d_2\phi_{202})]. \end{aligned}$$

を得る。これらを C_{12} に代入すると

$$
\begin{aligned}
&C_{12}(x_1,x_2,x_3)=\\
&\qquad [a_1d_2(v_{0-10}-v_{1-20})-b_2d_1(u_{0-10}-u_{0-21})]\phi_{101}\\
&\qquad +[a_2c_1(u_{0-10}-u_{0-21})-b_1c_2(v_{0-10}-v_{1-20})]\phi_{0-20}\\
&\qquad +c_1d_2(u_{0-10}v_{0-2-1}-u_{1-11}v_{1-20})\phi_{1-10}\\
&\qquad -c_2d_1(u_{-1-20}v_{0-10}-u_{0-21}v_{1-11})\phi_{0-11}.
\end{aligned}
$$

である。この式に含まれていた ϕ_{202} の項は $\{u,v,w\}$ の関係式によって 0 となっている。

$C_{12}(x_1,x_2,x_3)$ の x_2 を 1 だけシフトし、項の並べ替えをすると

$$
\begin{aligned}
&C_{12}(x_1,x_2+1,x_3)=\\
&\qquad c_1d_2(u_{000}v_{0-1-1}-u_{101}v_{1-10})\phi_{100}\\
&\qquad -c_2d_1(u_{-1-10}v_{000}-u_{0-11}v_{101})\phi_{001}\\
&\qquad +[a_2c_1(u_{000}-u_{0-11})-b_1c_2(v_{000}-v_{1-10})]\phi_{0-10}\\
&\qquad +[a_1d_2(v_{000}-v_{1-10})-b_2d_1(u_{000}-u_{0-11})]\phi_{111}.
\end{aligned}
$$

を得る。下記の関係式

$$
\begin{aligned}
&u_{000}v_{0-1-1}-u_{101}v_{1-10}=u_{-1-10}v_{000}-u_{0-11}v_{101},\\
&a_2c_1(u_{000}-u_{0-11})-b_1c_2(v_{000}-v_{1-10})=-(b_1c_2/z_1)[z_3(u_{000}-u_{0-11})+z_1(v_{000}-v_{1-10})],\\
&a_1d_2(v_{000}-v_{1-10})-b_2d_1(u_{000}-u_{1-10})=-(b_2d_1/z_3)[z_3(u_{000}-u_{0-11})+z_1(v_{000}-v_{1-10})].
\end{aligned}
$$

を使うと、C_{12} は

$$
\begin{aligned}
C_{12}(x_1,x_2+1,x_3)&=[u_{000}v_{0-1-1}-u_{101}v_{1-10}][c_1d_2\phi_{100}-c_2d_1\phi_{001}]\\
&\quad -[z_3(u_{000}-u_{0-11})+z_1(v_{000}-v_{1-10})][\frac{b_1c_2}{z_1}\phi_{0-10}+\frac{b_2d_1}{z_3}\phi_{111}].
\end{aligned}
$$

と表される。

この式は線形方程式　$\hat{L}_3\phi_{000}=a_3\phi_{100}+b_3\phi_{001}+w_{000}(c_3\phi_{0-10}+d_3\phi_{111})=0$　と同じ構造をしている。

以下では線形方程式 $\hat{L}_3\phi_{000}=0$ と交換関係式 $C_{12}(x_1,x_2+1,x_3)=0$ の同値性を示す。

$\hat{L}_3\phi_{000}$ に $(c_1d_2/a_3)[u_{000}v_{0-1-1}-u_{101}v_{1-10}]$ を掛けると

$$
\begin{aligned}
&[u_{000}v_{0-1-1}-u_{101}v_{1-10}]\\
&\qquad\times\{c_1d_2\phi_{100}+\frac{b_3c_1d_2}{a_3}\phi_{001}+w_{000}[\frac{c_1c_3d_2}{a_3}\phi_{0-10}+\frac{c_1d_2d_3}{a_3}\phi_{111}]=0.
\end{aligned}
$$

である。この式を未定係数の関係式から得られる次式

$$b_3 c_1 d_2 = -a_3 c_2 d_1, \quad c_1 c_3 d_2 z_1 = a_3 b_1 c_2 z_4, \quad c_1 d_2 d_3 z_3 = a_3 b_2 d_1 z_4.$$

によって書き直すと、

$$[u_{000} v_{0-1-1} - u_{101} v_{1-10}]\{c_1 d_2 \phi_{100} - c_2 d_1 \phi_{001} + z_4 w_{000}[\frac{b_1 c_2}{z_1}\phi_{0-10} + \frac{b_2 d_1}{z_3}\phi_{111}] = 0.$$

と変換される。この式が交換関係式 $C_{12} = 0$ に等しくなるための条件は、次の $\{u, v, w\}$ に対する非線形差分方程式が成り立つことである。

$$z_4[u_{000} v_{0-1-1} - u_{101} v_{1-10}] w_{000} + [z_3(u_{000} - u_{0-11}) + z_1(v_{000} - v_{1-10})] = 0.$$

ここで上記の非線形差分方程式は $\{u, v, w\}$ の定義式によって次の４次形式に変換されることに注意する。

$$\begin{aligned} &z_4[u_{000} v_{0-1-1} - u_{101} v_{1-10}] w_{000} + [z_3(u_{000} - u_{0-11}) + z_1(v_{000} - v_{1-10})] \\ &= (1/c_0)\exp[(\partial_1 + \partial_3)/2]\Big\{2\sinh[(D_1 + D_3)/2]\,\Big[\exp(D_2) f \cdot f\Big]\ \cdot \\ &\qquad \Big[[z_1 \exp(D_1) + z_2 \exp(D_2) + z_3 \exp(D_3) + z_4 \exp(D_4)] f \cdot f\Big]\Big\} = 0. \end{aligned}$$

ここで $c_0 \equiv f_{100} f_{010} f_{001} f_{1-11}$ である。したがって $\{u, v, w\}$ に対する非線形差分方程式は f が一般化 BKP 差分方程式を満たせば常に成立している。

以上で線形方程式 $\hat{L}_3 \phi_{000} = 0$ と交換関係式 $[L_{12}, A_{12}] = 0$ の同値性が示された。証明おわり。