九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

離散KP方程式の簡約と、その一般解

岩尾, 慎介
東京大学大学院数理科学研究科

https://doi.org/10.15017/18693

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (3), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 3 (pp. 16-22)

離散KP方程式の簡約と、その一般解

岩尾 慎介 (IWAO Shinsuke)

（Received January 8, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

離散 KP 方程式の簡約と、その一般解

東京大学数理科学研究科　岩尾慎介　(IWAO Shinsuke)

概　要　　周期簡約条件を課した離散 KP 方程式を、（Fay の恒等式を使わないで、）構成的に解く方法を紹介する。用いる手法は逆散乱法である。任意の初期値に対して、具体的に解の挙動が計算できる利点がある。

1　はじめに

以下の離散 KP 方程式を考えよう:

$$-\delta f^{t+1}_{m,n} f^{t}_{m+1,n+1} + (1+\delta) f^{t}_{m+1,n} f^{t+1}_{m,n+1} - f^{t}_{m,n+1} f^{t+1}_{m+1,n} = 0. \tag{1.1}$$

変数変換 $I^t_{m,n} := (1+\delta)\dfrac{f^t_{m+1,n} f^{t+1}_{m+1,n+1}}{f^t_{m+1,n+1} f^{t+1}_{m+1,n}}$, $V^t_{m,n} := \delta \dfrac{f^t_{m,n} f^t_{m+1,n+1}}{f^t_{m+1,n} f^t_{m,n+1}}$ によって式 (1.1) は

$$I^t_{m-1,n} + V^{t+1}_{m,n-1} = I^t_{m,n-1} + V^t_{m,n}, \qquad I^t_{m-1,n} V^{t+1}_{m,n} = I^t_{m,n} V^t_{m,n}. \tag{1.2}$$

となる．本稿では，方程式系 (1.2) に周期簡約条件:

$$I^t_{n+N} \equiv I^t_n, \qquad V^t_{n+N} \equiv V^t_n, \qquad N > 0, \tag{1.3}$$

及び，以下の簡約条件:

$$f^t_{m,n} = f^{t-D}_{m-E,n+F}, \qquad D,E \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ F \in \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

を課したものを扱う．方程式系 (1.2–1.4) を *reduced periodic discrete KP equation* (rpdKP) と呼ぶことにする. rpdKP は，周期離散戸田方程式（$D = E = F = 1$），周期 KdV 方程式 ($D = E = 1, F = 0$), 周期ハングリー戸田方程式（$E = F = 1$）等を特別な場合として含む.

rpdKP は，超離散化によって様々な箱玉系を生み出すことが知られている [5]. ここでは，rpdKP の初期値から厳密解を求める方法を考察する.

Remark 1.1 本稿では簡単のため，D, E, F に以下の条件を仮定する．一般の場合は，[2], §3 を参照.

$$D, E > 0, \quad F \geq 0, \quad N \geq D + E - F > 0, \quad \mathrm{g.c.d.}(D,E) = \mathrm{g.c.d.}(D+E-F, N) = 1. \tag{1.5}$$

記号: 代数曲線 C に対し $\mathrm{Div}(C)$ を C 上の因子のなす群，$\mathrm{Pic}(C)$ を C の Picard 群とする．$\mathscr{D} \in \mathrm{Div}(C)$ に対し，自然な全射 $\mathrm{Div}(C) \to \mathrm{Pic}(C)$ による像を $[\mathscr{D}]$ と書く.

2　離散 Lax 形式を利用した，逆散乱法解法の手順

周期系 (1.2–1.3) は以下の離散 Lax 形式に書きなおされる:

$$L_m^{t+1}(y)R_{m-1}^t(y) = R_m^t(y)L_m^t(y), \tag{2.1}$$

ここで

$$L_m^t(y) = \begin{pmatrix} V_{m,1}^t & 1 & & \\ & V_{m,2}^t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ y & & & V_{m,N}^t \end{pmatrix}, \quad R_m^t(y) = \begin{pmatrix} I_{m,1}^t & 1 & & \\ & I_{m,2}^t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ y & & & I_{m,N}^t \end{pmatrix}, \quad y \text{ は複素パラメータ}.$$

このとき簡約条件 (1.4) は

$$L_m^t = S^F L_{m-E}^{t-D} S^{-F}, \qquad R_m^t = S^F R_{m-E}^{t-D} S^{-F}, \qquad S := S(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ y & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

と書きなおせる．新しい行列 $X_m^t := X_m^t(y) = S^{-F} \cdot L_{m+E}^{t+D} \cdots L_{m+2}^{t+D} L_{m+1}^{t+D} \cdot R_m^{t+D-1} \cdots R_m^{t+1} R_m^t$ によって，(2.1–2.2) は以下のように書きかえられる．

$$X_m^{t+1}R_m^t = R_m^t X_m^t, \qquad \text{もしくは}, \qquad L_m^t X_{m-1}^t = X_m^t L_m^t. \tag{2.3}$$

さて，特性方程式 $\det(X_m^t(y) - xI) = 0$ から定まる代数曲線を C と書こう．式 (2.3) により，C は t,m-不変である．曲線 C をスペクトル曲線と呼ぶ．

2.1　スペクトル曲線の性質

Proposition 2.1 *C は以下の点を含む:*

(i) D 個の点 $A_t : (x,y) = (0, I_t)$,　$t = 0,1,\ldots,D-1$.　　$(I_t := (-1)^N \cdot \prod_{n=1}^N I_{0,n}^t)$.

(ii) E 個の点 $B_m : (x,y) = (0, V_m)$,　$m = 1,2,\ldots,E$.　　$(V_m := (-1)^N \cdot \prod_{n=1}^N V_{m,n}^D)$.

(iii) $(x,y) = \begin{cases} (\Lambda, 0) & F = 0 \\ (\infty, 0) & F > 0 \end{cases}$,　$(\Lambda := (1+\delta)^D \cdot \delta^E)$　　と書かれる唯一の点 Q.

(iv) $(x,y) = (\infty, \infty)$　　と書かれる唯一の点 P.

Proof. (i)–(iii) は直接計算による．(iv) は，[3] の p.101,102 を参照．■

$\mathscr{C}$ を，曲線 C と $(D+E)$ 点の組 $\mathscr{C} := (C; A_0, A_1, \ldots, A_{D-1}; B_1, B_2, \ldots, B_E)$ とする．$\mathscr{C}$ に対して，等位集合 $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ を以下で定める:

$$\mathscr{T}_{\mathscr{C}} := \left\{ (R_0^\alpha; L_\beta^D)_{0\le\alpha<D}^{0<\beta\le E} \;\middle|\; \begin{array}{l} \bullet \det(X_m^t - xE) = 0 \text{ は曲線 } C \text{ を定める}, \\ \bullet \prod_n I_{m,n}^t \neq \prod_n V_{m,n}^{t+1},\ \prod_n I_{m-1,n}^t \neq \prod_n V_{m,n}^t, \\ \bullet A_t : (0, I_t),\ B_m : (0, V_m). \end{array} \right\}.$$

不等式 $\prod_n I^t_{m,n} \neq \prod_n V^{t+1}_{m,n}$，$\prod_n I^t_{m-1,n} \neq \prod_n V^t_{m,n}$ は，(1.2) の自明な解 $I^t_{m-1,n} = V^t_{m,n}, V^{t+1}_{m,n} = I^t_{m,n}$ を避けるために課した．式 (2.1) により，この不等式は，等式 $\prod_n I^t_{m-1,n} = \prod_n I^t_{m,n}$ と $\prod_n V^t_{m,n} = \prod_n V^{t+1}_{m,n}$ を導く．したがって，

$$I_t = \prod_n I^t_{m,n}, \quad (\forall m), \qquad V_m = \prod_n V^t_{m,n}, \quad (\forall t) \tag{2.4}$$

が成り立つ．さらに簡約条件 (1.4) より以下を得る:

Proposition 2.2 $I_t = I_{t\pm D} = I_{t\pm 2D} = \cdots$，$V_m = V_{m\pm E} = V_{m\pm 2E} = \cdots$. ■

Remark 2.1 ここからは $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ に含まれる初期条件のみを考えることにする．点 $A_t, B_m \in C$ の添字は，それぞれ $\mathbb{Z}/D\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/E\mathbb{Z}$ の元であると考え，$A_t = A_{t\pm D} = A_{t\pm 2D} = \cdots$ などと解釈する．

以下では C は滑らかであるとする．このとき，固有ベクトル写像と呼ばれる写像 $\varphi : \mathscr{T}_{\mathscr{C}} \to \mathrm{Pic}^d(C)$ が存在して，以下が成り立つことが知られている:

Proposition 2.3 (1) : $X \in \mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ に対し，次数 $g = \mathrm{genus(C)}$ の一般有効因子 $\mathscr{D}_1$，$\mathscr{D}_2$ が存在して，$\varphi(X) = [\mathscr{D}_1 + (N-1)\cdot Q] = [\mathscr{D}_2 + (N-1)\cdot P]$ が成り立つ．特に $d = g+N-1$.

(2) : $v = (g_1, g_2, \ldots, g_N)^T$ を，$X(y)v = x\cdot v$ で定数倍を除いて定まる C 上の有理型ベクトル値関数 $C \ni (x,y) \to v(x,y) \in \mathbb{P}^{N-1}$ とする．このとき (1) の因子 $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ は以下を満たす:

$$(g_1/g_N) = \mathscr{D}_2 + (N-1)\cdot P - \mathscr{D}_1 - (N-1)\cdot Q.$$

Proof. [3], Proposition 1. ■

2.2 線形化定理

この章では $H := D+E-F$ と定める．等位集合 $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ から自分自身への写像 σ, μ, ρ を

$$\sigma(X^t_m) := SX^t_m S^{-1}, \qquad \mu(X^t_m) := R^t_m X^t_m (R^t_m)^{-1}, \qquad \rho(X^t_m) := L^t_{m+1} X^t_m (L^t_{m+1})^{-1} \tag{2.5}$$

で定めよう．等式 (2.3) によれば，これらの写像は元の KP 方程式に対して $n \mapsto n+1$, $t \mapsto t+1$, $m \mapsto m+1$ の作用をする．さて，$X^t_m(y) \in \mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ に対して線形問題

$$X^t_m(y) v^t_m(x,y) = x \cdot v^t_m(x,y), \qquad v^t_m = (g^t_{m,1}, \ldots, g^t_{m,N})^T \tag{2.6}$$

を考える．[] によれば，式 (2.6) は，ある $H\times H$ 行列 $Y^t_m(x)$ を用いて

$$Y^t_m(x)\cdot w^t_m(x,y) = y\cdot w^t_m(x,y), \qquad w^t_m = (g^t_{m,1}, \ldots, g^t_{m,H})^T \tag{2.7}$$

の形に書きなおせる．便宜的に (2.6) の形の行列方程式を x-form，(2.7) の形の行列方程式を y-form と呼ぶことにしよう．

Example 2.4 *x-form* $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ y & a_2 & b_2 \\ b_3 y & y & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}$, に対応する *y-form* は,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x-a_3 & -b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x-a_2 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x-a_1 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

である．

以下，写像 σ, μ, ρ の，x-form/y-form 固有ベクトルに対する作用を計算しよう．

(i) x-form 固有ベクトルへの作用

式 (2.5) から，x-form 固有ベクトルへの作用 σ, μ, ρ は，

$$\sigma : v_m^t \mapsto S v_m^t, \qquad \mu : v_m^t \mapsto R_m^t v_m^t, \qquad \rho : v_m^t \mapsto L_{m+1}^t v_m^t$$

で表される．各行列 S, R_m^t, L_{m+1}^t が可逆であるかどうかが，のちの計算で重要となる．

Lemma 2.5 直接計算により以下を得る
$\det S = (-1)^{N+1} \cdot y, \qquad \det R_m^t = (-1)^{N+1}(y - I_t), \qquad \det L_{m+1}^t = (-1)^{N+1}(y - V_{m+1}).$ ■

(ii) y-form 固有ベクトルへの作用

$v_m^t = (g_{m,1}^t, \ldots, g_{m,N}^t)^T$ を x-form 固有ベクトルとする．式 (2.6) から，$g_{H+1} = \sum_{n=1}^H G_n g_n$ を満たす x のみによる多項式 $G_1, G_2, \ldots, G_H$ が存在する ($N \geq H$ より)．以下で行列 $\widehat{S}, \widehat{R}_m^t, \widehat{L}_{m+1}^t$ を定めよう:

$$\widehat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ G_1 & G_2 & \cdots & G_H \end{pmatrix}, \ \widehat{R}_m^t = \begin{pmatrix} I_{m,1}^t & 1 & & \\ & I_{m,2}^t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ G_1 & G_2 & \cdots & I_{m,H}^t + G_H \end{pmatrix},$$
$$\widehat{L}_{m+1}^t = \begin{pmatrix} V_{m+1,1}^t & 1 & & \\ & V_{m+1,2}^t & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ G_1 & G_2 & \cdots & V_{m+1,H}^t + G_H \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

σ, μ, ρ の y-form への作用は以下で与えられる．

$$\sigma : w_m^t \mapsto \widehat{S} w_m^t, \qquad \mu : w_m^t \mapsto \widehat{R}_m^t w_m^t, \qquad \rho : w_m^t \mapsto \widehat{L}_{m+1}^t w_m^t.$$

Lemma 2.6 直接計算より，以下を得る*:*
$\det \widehat{S} = \begin{cases} (-1)^{H+1} \cdot \{x - \Lambda\} & F = 0 \\ (-1)^{H+1} \cdot x & F > 0 \end{cases}, \qquad \det \widehat{R}_m^t = \det \widehat{L}_{m+1}^t = (-1)^{H+1} \cdot x.$

Proof. [2] Appendix A. ■

以上の議論により，σ, μ, ρ の作用は，固有ベクトルに対しては行列の積であらわされる．Proposition 2.2 で固有ベクトル写像と固有ベクトルの関係を見たが，行列 $S, R_m^t, \ldots$ たちが可逆でないような地点 $(x,y) \in C$ において固有ベクトルの成分 $g_{m,1}^t, g_{m,2}^t, \ldots$ の次数は変化するため，これらの点の情報から，固有ベクトル写像の像 $\varphi(X_m^t)$ への σ, μ, ρ の作用が決定される．詳しくは [2] §2.3 を参照．Lemma 2.5, 2.6 により，以下を得る:

Theorem 2.7 (線形化定理) (I): $\varphi(\sigma(X_m^t)) = \varphi(X_m^t) + [P - Q]$.
(II): $\varphi(X_m^{t+1}) = \varphi(X_m^t) + [P - A_t]$.
(III): $\varphi(X_{m+1}^t) = \varphi(X_m^t) + [P - B_{m+1}]$. ■

Proposition 2.3 (2) の一般因子 $\mathscr{D}_2$ を $\mathfrak{d}(X_m^t)$ と書く．($\varphi(X_m^t) = [\mathfrak{d}(X_m^t) + (N-1) \cdot P]$)．このとき，線形化定理の系として以下を得る:

Corollary 2.8 $X_m^t v_m^t = x\cdot v_m^t,\quad v_m^t=(g_{m,1}^t,\dots,g_{m,N}^t)^T$ とするとき，

$$(g_{m,1}^t/g_{m,N}^t)=\mathfrak{d}(X_m^t)+(N-1)P-\mathfrak{d}(\sigma^{-1}X_m^t)-(N-1)Q.$$

Proof. Proposition 2.2 (2) より $[\mathscr{D}_1]=[\mathfrak{d}(X_m^t)+(N-1)\cdot(P-Q)]=[\mathfrak{d}(\sigma^{N-1}X_m^t)]=[\mathfrak{d}(\sigma^{-1}X_m^t)]$. ここで，$\mathscr{D}_1$ も $\mathfrak{d}(\sigma^{-1}X_m^t)$ も次数 g の一般因子であるから，両者は一致する． ■

2.3 逆散乱

線形化定理 2.7 は，rpdKP の運動を $\mathrm{Pic}^d(C)$ 上の加算として表現したものである．今度は，$\mathrm{Pic}^d(C)$ 上の情報を $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ 上に引き戻すことを考えねばならない．

スペクトル曲線 C に対し，シンプレクティック基底 $\alpha_1,\dots,\alpha_g;\beta_1,\dots,\beta_g\in H_1(C;\mathbb{Z})$ を固定し，$\int_{\alpha_i}\omega_j=\delta_{i,j}$ をみたす正則微分形式 $\omega_1,\dots,\omega_g$ をとる．周期行列を $\Omega:=(\int_{\beta_i}\omega_j)_{i,j}$ と書く．固定点 $p_0\in C$ に対し, *Abel-Jacobi* 写像 $\mathbf{A}:\mathrm{Div}(C)\to\mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g+\Omega\mathbb{Z}^g)$ を

$$\sum Y_i-\sum Z_j\ \mapsto\ \sum(\textstyle\int_{p_0}^{Y_i}\omega_1,\cdots,\int_{p_0}^{Y_i}\omega_g)-\sum(\int_{p_0}^{Z_j}\omega_1,\cdots,\int_{p_0}^{Z_j}\omega_g)$$

で定める．

次に，普遍被覆 $\pi:\mathfrak{U}\to C$ を考えよう．点 $p_0\in C$ の π による持ちあげ $\mathfrak{p}_0\in\mathfrak{U}$ を一つ固定しておく．すると，自然な Abel-Jacobi 写像の持ちあげ $\widetilde{\mathbf{A}}:\mathrm{Div}(\mathfrak{U})\to\mathbb{C}^g$ が一意的に存在する．もちろん $\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{p}_0)=0$ である．

今度は因子 $\mathfrak{d}(X_m^t)\in\mathrm{Div}^g(C)$ を持ちあげよう．ある固定された m,t に対して，持ちあげ $\mathfrak{D}(X_m^t)\in\mathrm{Div}^g(\mathfrak{U})$ (s.t. $\pi(\mathfrak{D}(X_m^t))=\mathfrak{d}(X_m^t)$) が定まっているとする．$A_i, B_i, Q, P\in C$ たちの持ちあげ $\widetilde{A}_i, \widetilde{B}_i, \widetilde{Q}, \widetilde{P}\in\mathfrak{U}$ を，関係

$$-F\cdot\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{Q})+\textstyle\sum_{j=1}^D\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{A}_j)+\sum_{j=1}^E\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{B}_j)=0. \tag{2.9}$$

が成り立つように選ぶ. (この関係式は，簡約 (1.4) から来る)．以上の準備のもと，因子 $\mathfrak{D}(\sigma(X_m^t))$, $\mathfrak{D}(X_m^{t+1})$, $\mathfrak{D}(X_{m+1}^t)\in\mathrm{Div}^g(\mathfrak{U})$ を以下で定める:

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(\sigma(X_m^t)))=\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(X_m^t))+\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{Q}),\qquad \pi(\mathfrak{D}(\sigma(X_m^t)))=\mathfrak{d}(\sigma(X_m^t)), \tag{2.10}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(X_m^{t+1}))=\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(X_m^t))+\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{A}_t),\qquad \pi(\mathfrak{D}(X_m^{t+1}))=\mathfrak{d}(X_m^{t+1}), \tag{2.11}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(X_{m+1}^t))=\widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(X_m^t))+\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{B}_{m+1}),\quad \pi(\mathfrak{D}(X_{m+1}^t))=\mathfrak{d}(X_{m+1}^t). \tag{2.12}$$

さて，ここで $\mathfrak{U}$ 上の正則関数 $\tau_m^t(p)=\theta\left(\widetilde{\mathbf{A}}\{\mathfrak{D}(X_m^t)-p-\Delta\}\right)$ を考えよう．ただし，$\theta(\bullet)=\theta(\bullet;\Omega)$ Riemann テータ関数，$\Delta\in\mathrm{div}^{g-1}(\mathfrak{U})$ 持ちあげられた theta characteristic divisor ([4], Chap. II, cor. 3.11) である. 混乱のない時には，文字 “$\widetilde{\mathbf{A}}$” を省いて $\tau_m^t(p)=\theta(\mathfrak{D}(X_m^t)-p-\Delta)$ などと書くことにしよう．

$\tau_m^t(p)$ は $\mathfrak{U}$ 上の正則関数であると同時に，C 上の多価関数でもある．Riemann の消滅定理 ([4], Chap. II, thm. 3.11) により，$\tau_m^t(p)$ のゼロ点は $\mathfrak{d}(X_m^t)$ と一致することが言える．

$\tau_{m,n}^t(p):=\theta(\mathfrak{D}(\sigma^{n-1}X_m^t)-p-\Delta)$ とおく. テータ関数の準周期性 ([4], §II.1) と線形化定理により，$\mathfrak{U}$ 上関数

$$\Psi_m^t(p):=\frac{\tau_{m,2}^t\cdot\tau_{m,1}^{t+1}}{\tau_{m,1}^t\cdot\tau_{m,2}^{t+1}}(p)=\frac{\theta(\mathfrak{D}(\sigma X_m^t)-p-\Delta)\cdot\theta(\mathfrak{D}(X_m^{t+1})-p-\Delta)}{\theta(\mathfrak{D}(X_m^t)-p-\Delta)\cdot\theta(\mathfrak{D}(\sigma X_m^{t+1})-p-\Delta)}$$

は，C 上有理型関数でもあることがわかる．ところで一方 $\{\tau_{m,n}^t\text{のゼロ点}\}=\mathfrak{d}(\sigma^{n-1}X_m^t)$ なのだから，corollary 2.8 と Liouville の定理により,

$$\Psi_m^t(p)=c\times\frac{g_{m,2}^t(p)\cdot g_{m,1}^{t+1}(p)}{g_{m,1}^t(p)\cdot g_{m,2}^{t+1}(p)},\qquad c\text{ は定数} \tag{2.13}$$

なる別の表示も存在する．この第 2 の表示のおかげで，関数 $\Psi_m^t(p)$ の特別な点での値が計算できる．

Lemma 2.9 g.c.d.$(D+E-F,N)=1$ の条件のもとで，(i) $\Psi_m^t(P)=c$, (ii) $\Psi_m^t(Q)=c\times\frac{I_{m,1}^t}{I_{m,2}^t}$.

Proof. $(g_{m,1}^{t+1},g_{m,2}^{t+1},\dots,g_{m,N}^{t+1})=R_m^t\cdot(g_{m1}^t,g_{m2}^t,\dots,g_{mN}^t)$ であるから, 式 (2.13) より

$$\Psi_m^t=c\times\frac{g_{m,2}^t\cdot(I_{m,1}^t g_{m,1}^t+g_{m,2}^t)}{g_{m,1}^t\cdot(I_{m,2}^t g_{m,2}^t+g_{m,3}^t)}$$

である．Lemma は以下の Fact から従う．

Fact: g.c.d.$(D+E-F,N)=1$ の条件のもとで，次の (i), (ii) が成り立つ:

(i) k を $k(P)=0$ なる C の局所座標とする．このとき $g_{m,j}^t\sim k^{N-j}$ $(k\to 0)$ が成り立つ．

(ii) k を $k(Q)=0$ なる C の局所座標とする．このとき $g_{m,j}^t\sim(\Lambda k)^{j-1}$ $(k\to 0)$ が成り立つ．

(**Fact** の証明は [1], Appendix A, [2], proposition 2.1 を参照). ■

さて，$\theta(\mathfrak{D}(X)-\widetilde{Q}-\Delta)=\theta(\mathfrak{D}(X)+(\widetilde{P}-\widetilde{Q})-\widetilde{P}-\Delta)=\theta(\mathfrak{D}(\sigma X)-\widetilde{P}-\Delta)$ であるから,

$$\Psi_m^t(Q)=\sigma\Psi_m^t(P),\qquad \text{ただし}\quad \sigma\Psi_m^t(P)=\sigma\left\{\frac{\tau_{m,2}^t\cdot\tau_{m,1}^{t+1}}{\tau_{m,1}^t\cdot\tau_{m,2}^{t+1}}(p)\right\}=\frac{\tau_{m,3}^t\cdot\tau_{m,2}^{t+1}}{\tau_{m,2}^t\cdot\tau_{m,3}^{t+1}}(p)$$

が成り立つ．よって Lemma 2.9 は，$I_{m,2}^t\cdot\sigma\Psi_m^t(P)=I_{m,1}^t\cdot\Psi_m^t(P)$ と言い換えられる．

同じ議論を $\sigma\Psi_m^t(p)$ に行えば $I_{m,3}^t\cdot\sigma^2\Psi_m^t(P)=I_{m,2}^t\cdot\sigma\Psi_m^t(P)$ を得，さらに繰り返すことにより

$$I_{m,1}^t\cdot\Psi_m^t(P)=I_{m,2}^t\cdot\sigma\Psi_m^t(P)=I_{m,3}^t\cdot\sigma^2\Psi_m^t(P)=I_{m,4}^t\cdot\sigma^3\Psi_m^t(P)=\cdots$$

を得る．$\Psi_{m,n}^t:=\sigma^{n-1}\Psi_m^t(P)$ と書くことにすれば，等式 $\Psi_{m,n+N}^t=\Psi_{m,n}^t$ および $I_{m,n}^t\Psi_{m,n}^t=\varepsilon_m^t$ を導く．ここで，ε_m^t は n に依らない複素数である．

同様の議論を，今度は関数

$$\Phi_m^t(p):=\frac{\tau_{m+1,1}^t\cdot\tau_{m,2}^t}{\tau_{m,1}^t\cdot\tau_{m+1,2}^t}(p)=\frac{\theta(\mathfrak{D}(X_{m+1}^t)-p-\Delta)\cdot\theta(\mathfrak{D}(\sigma X_m^t)-p-\Delta)}{\theta(\mathfrak{D}(X_m^t)-p-\Delta)\cdot\theta(\mathfrak{D}(\sigma X_{m+1}^t)-p-\Delta)}.$$

に対して行う．Corollary 2.8 と Liouville の定理より

$$\Phi_m^t(p)=c'\times\frac{g_{m,2}^t(p)\cdot g_{m+1,1}^t(p)}{g_{m,1}^t(p)\cdot g_{m+1,2}^t(p)},\qquad c'\text{は定数}\tag{2.14}$$

が成り立つ. Lemma 2.9 と同様にして以下が証明できる:

Lemma 2.10 g.c.d.$(D+E+F,N)=1$ の条件のもとで，(i) $\Phi_m^t(P)=c'$, (ii) $\Phi_m^t(Q)=c'\times\frac{V_{m+1,1}^t}{V_{m+1,2}^t}$. ■

等式 $\Phi_m^t(Q)=\sigma\Phi_m^t(P)$ により lemma 2.10 は $V_{m+1,2}^t\cdot\sigma\Phi_m^t(P)=V_{m+1,1}^t\cdot\Phi_m^t(P)$ と変形できる．これは

$$V_{m+1,1}^t\cdot\Phi_m^t(P)=V_{m+1,2}^t\cdot\sigma\Phi_m^t(P)=V_{m+1,3}^t\cdot\sigma^2\Phi_m^t(P)=\cdots$$

を導くので，$\Phi_{m,n}^t:=\sigma^{n-1}\Phi_m^t(P)$ と書くことにすれば，等式 $\Phi_{m,n+N}^t=\Phi_{m,n}^t$ および $V_{m+1,n}^t\Phi_{m,n}^t=\gamma_m^t$ が成り立つ．ここで，γ_m^t は n に依らない複素数である．

$\tau_{m+1,n}^t:=\tau_{m,n}^t(\widetilde{P})$ とおこう．これまでの議論から，$I_{m,n}^t$ $V_{m,n}^t$ は以下を満たす．

$$I_{m,n}^t=\varepsilon_m^t\times\frac{\tau_{m+1,n}^t\tau_{m+1,n+1}^{t+1}}{\tau_{m+1,n+1}^t\tau_{m+1,n}^{t+1}},\qquad V_{m,n}^t=\gamma_m^t\times\frac{\tau_{m,n}^t\tau_{m+1,n+1}^t}{\tau_{m+1,n}^t\tau_{m,n+1}^t}.\tag{2.15}$$

2.4 rpdKP の一般解の表示

g-次元ベクトル a,b に対し，$\langle a,b\rangle := a^T b \in \mathbb{C}$ としよう．

周期簡約条件 $\mathfrak{d}(\sigma^N X_m^t) = \mathfrak{d}(X_m^t)$ によって，ある整数ベクトル $p,q \in \mathbb{Z}^g$ が存在して $\widetilde{\mathbf{A}}(N(\widetilde{P}-\widetilde{Q})) = p+\Omega q$ が成立する．Riemann テータ関数の準周期性により，等式

$$\tau_{m,n+N}^t = \tau_{m,n}^t \times \exp(-2\sqrt{-1}\pi\cdot\langle q,z\rangle - \sqrt{-1}\pi\cdot\langle q,\Omega q\rangle), \qquad z = \widetilde{\mathbf{A}}(\mathfrak{D}(\sigma^{n-1}X_{m-1}^t) - \widetilde{P} - \Delta)$$

が成り立つ．式 (2.15) により，

$$I_{m,1}^t I_{m,2}^t \cdots I_{m,N}^t = \{\varepsilon_m^t\}^N \times \frac{\tau_{m+1,1}^t \tau_{m+1,N+1}^{t+1}}{\tau_{m+1,N+1}^t \tau_{m+1,1}^{t+1}} = \{\varepsilon_m^t\}^N \times \exp(-2\sqrt{-1}\pi\cdot\langle q,\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{A}_t)\rangle), \tag{2.16}$$

$$V_{m,1}^t V_{m,2}^t \cdots V_{m,N}^t = \{\gamma_m^t\}^N \times \frac{\tau_{m,1}^t \tau_{m+1,N+1}^t}{\tau_{m+1,1}^t \tau_{m,N+1}^t} = \{\gamma_m^t\}^N \times \exp(-2\sqrt{-1}\pi\cdot\langle q,\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{B}_m)\rangle). \tag{2.17}$$

積 $\prod_n I_{m,n}^t = I_t$ (resp. $\prod_n V_{m,n}^t = V_m$) は， $t \bmod D$ (resp. $m \bmod E$) のみに依ることを思い出そう．(Proposition 2.2). ε^t,γ_m は初期値のみによって決まる複素数であり，以下の等式で決定される:

$$\varepsilon^t = \{I_t\}^{1/N}\cdot\exp(2\sqrt{-1}N^{-1}\pi\cdot\langle m,\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{A}_t)\rangle), \tag{2.18}$$

$$\gamma_m = \{V_m\}^{1/N}\cdot\exp(2\sqrt{-1}N^{-1}\pi\cdot\langle m,\widetilde{\mathbf{A}}(\widetilde{P}-\widetilde{B}_m)\rangle). \tag{2.19}$$

以下が本稿の結論である．

Theorem 2.11 *Remark 1.1* の条件のもとで，(2.15, 2.18, 2.19) は *rpdKP*(1.2–1.4) の一般解を与える．

謝辞: 本研究は科研費 (09J07090) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Iwao S “Solution of the generalised periodic Toda equation II; Tau function solution” in submition to *J.Phys.A.Math.Theor.*, (arXiv/0912.2213)

[2] Iwao S “Linearisation of the (M,K)-reduced non-autonomous discrete periodic KP equation” in submition to *Int.Math.Res.Not*, (arXiv/0912.3333)

[3] van Moerbeke P and Mumford D 1979 “The spectrum of difference operators and algebraic curves” *Acta Math.* **143** (1–2) 94–154

[4] Mumford D, Musili C, Nori M, Previato E and Stillman M 1983 *Tata Lectures on Theta I* (*Progress in mathematics*; v.28) ed. Bass H, Oesterlé J and Weinstein A (Berlin: Birkhäuser)

[5] 吉田真将，由良文孝 2009，九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.20ME-S7 182–187