帯行列の固有値を計算する離散可積分系について

福田，亜希子
東京理科大学大学院理学研究科

石渡，恵美子
東京理科大学理学部

山本，有作
神戸大学大学院工学研究科

岩崎，雅史
京都府立大学生命環境学部

他

https://doi.org/10.15017/18691

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．21ME-S7 (1), 2010-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 1 (pp. 1-6)

帯行列の固有値を計算する離散可積分系について

福田 亜希子 (FUKUDA Akiko), 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko), 山本 有作 (YAMAMOTO Yusaku), 岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi), 中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)

（Received January 31, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

帯行列の固有値を計算する離散可積分系について

東京理科大学大学院理学研究科　福田 亜希子　(FUKUDA Akiko)
東京理科大学理学部　石渡 恵美子　(ISHIWATA Emiko)
神戸大学大学院工学研究科　山本 有作　(YAMAMOTO Yusaku)
京都府立大学生命環境学部　岩崎 雅史　(IWASAKI Masashi)
京都大学大学院情報学研究科　中村 佳正　(NAKAMURA Yoshimasa)

概　要　離散可積分系に分類される離散ハングリーロトカ・ボルテラ系及び離散ハングリー戸田方程式の時間発展は，あるクラスの帯行列の相似変形を与える．この性質を利用して定式化された帯行列の固有値計算アルゴリズムを紹介する．

1　はじめに

個々の生物種が複数の生物種を捕食することを想定した離散可積分系として，離散ハングリーロトカ・ボルテラ (dhLV: discrete hungry Lotka-Volterra) 系

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)} \displaystyle\prod_{j=1}^{M} (1+\delta^{(n+1)} u_{k-j}^{(n+1)}) = u_k^{(n)} \prod_{j=1}^{M} (1+\delta^{(n)} u_{k+j}^{(n)}),\ k=1,2,\ldots,M_m, \\ u_{-M+1}^{(n)} \equiv 0,\ u_{-M+2}^{(n)} \equiv 0,\ldots,u_0^{(n)} \equiv 0,\ u_{M_m+1}^{(n)} \equiv 0,\ldots,u_{M_m+M}^{(n)} \equiv 0,\ n=0,1,\ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

が知られている．ここで，$M_m := (m-1)M+m$ であり，k は生物種の番号，n は離散時間，$u_k^{(n)}, \delta^{(n)}$ はそれぞれ離散時間 n における生物種 k の個体数，正の差分パラメータを表す．$M=1$ のとき，(1.1) は個々の生物種が 1 種の生物種を捕食する様子を記述した離散ロトカ・ボルテラ (dLV) 系と一致し，[3] では dLV 系に基づいて，上 2 重対角行列の特異値を計算するための dLV アルゴリズムが定式化されている．dhLV 系からも，dhLV アルゴリズムと名付けられた帯行列の複素固有値を求めるためのアルゴリズムが定式化されている [1].

戸田方程式から広田差分によって得られる離散戸田方程式

$$\begin{cases} q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)} + e_k^{(n)}, \quad k=1,2,\ldots,m, \\ e_k^{(n+1)} = e_k^{(n)} \dfrac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+1)}}, \quad k=1,2,\ldots,m-1, \\ e_0^{(n)} \equiv 0, \quad e_m^{(n)} \equiv 0, \quad n=0,1,\ldots \end{cases} \tag{1.2}$$

は，対称な 3 重対角行列の固有値計算のための qd (quotient difference) アルゴリズム [5] の漸化式と一致することが知られている．この離散戸田方程式に対してもハングリー型の離散可積分系

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = Q_k^{(n)} + E_k^{(n)} - E_{k-1}^{(n+1)}, \quad k=1,2,\ldots,m, \\ E_k^{(n+1)} = \dfrac{Q_{k+1}^{(n)} E_k^{(n)}}{Q_k^{(n+M)}}, \quad k=1,2,\ldots,m-1, \\ E_0^{(n)} = E_m^{(n)} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

が報告されている．(1.3) は離散ハングリー戸田（dhToda: discrete hungry Toda）方程式と呼ばれる [4]．本報告では，2 章で dhLV 系，3 章では dhToda 方程式をもとに定式化される帯行列の固有値計算アルゴリズム [2] を紹介し，4 章では 2 つのアルゴリズムの関連について述べる．

2 離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく行列の固有値計算

本節では，dhLV 系の性質から導かれる帯行列の固有値計算アルゴリズムについて述べる．まず，dhLV 系のラックス表示及び dhLV 変数の漸近挙動を示す．dhLV 系のラックス表示は以下で与えられる [1].

$$\mathscr{R}^{(n)}\mathscr{L}^{(n+1)} = \mathscr{L}^{(n)}\mathscr{R}^{(n)}, \tag{2.1}$$

$$\mathscr{L}^{(n)} = \begin{pmatrix} \overbrace{0 & \dots & 0}^{M} & U_1^{(n)} & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & U_2^{(n)} & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & U_{M_m}^{(n)} \\ & & & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathscr{R}^{(n)} = \begin{pmatrix} V_1^{(n)} & & & & & & & 0 \\ 0 & V_2^{(n)} & & & & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & & & & \\ \delta^{(n)} & 0 & & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & & \\ & & \delta^{(n)} & \underbrace{0 & \dots & 0}_{M} & & V_{M_m+M}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$U_k^{(n)} := u_k^{(n)} \prod_{j=1}^{M} (1+\delta^{(n)} u_{k-j}^{(n)}), \quad V_k^{(n)} := \prod_{j=0}^{M} (1+\delta^{(n)} u_{k-j}^{(n)}). \tag{2.2}$$

dhLV 変数の初期値は $0 < u_k^{(0)} < K_0$ を満たすとする．ここで，K_0 は正の定数である．ラックス行列 $\mathscr{R}^{(n)}$ において，$\delta^{(n)} > 0$ と (1.1) を考慮すると，(2.2) より $k = 1,2,\dots,M_m+M$ に対して $V_k^{(n)} \geq 1$ であることがわかる．よって $\mathscr{R}^{(n)}$ の逆行列 $(\mathscr{R}^{(n)})^{-1}$ が存在し，(2.1) は以下のように書き換えられる．

$$\mathscr{L}^{(n+1)} = (\mathscr{R}^{(n)})^{-1}\mathscr{L}^{(n)}\mathscr{R}^{(n)}. \tag{2.3}$$

(2.3) より，$\mathscr{L}^{(n)}$ と $\mathscr{L}^{(n+1)}$ は相似であり，dhLV 系の時間発展 $n \to n+1$ は $\mathscr{L}^{(n)}$ の固有値保存変形を与えることがわかる．よって，$\mathscr{L}^{(0)}$ と $\mathscr{L}^{(1)},\mathscr{L}^{(2)},\dots$ の固有値も同じといえる．さらに，単位行列を I，任意の実数を d とすれば，$\mathscr{L}^{(0)}+dI$ と $\mathscr{L}^{(1)}+dI,\mathscr{L}^{(2)}+dI,\dots$ の固有値も同じとなる．

帯行列 $\mathscr{L}^{(n)}$ の成分 $U_k^{(n)}$ に関する保存量は，以下のように与えられる [1].

$$\sum_{k=1}^{M_m} U_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{M_m} U_k^{(n+1)}, \quad \prod_{k=1}^{m} U_{M_k}^{(n)} = \prod_{k=1}^{m} U_{M_k}^{(n+1)}. \tag{2.4}$$

(2.4) の第 1 式は $\mathscr{L}^{(n)}$ の全固有値の $(M+1)$ 乗和，第 2 式は $\mathscr{L}^{(n)}$ の行列式の値と一致する．$0 < u_k^{(0)} < K_0$ より，正数 K_1, K_2 に対して $0 < \sum_{k=1}^{M_m} U_k^{(0)} < K_1$，$0 < \prod_{k=1}^{m} U_{M_k}^{(0)} < K_2$ が成立する．(2.4) よ

り，任意の n に対して $0 < u_k^{(n)} < K$ となることがわかる．ここで，K は正数である．このとき，dhLV 変数 $u_k^{(n)}$ の $n \to \infty$ における漸近挙動は以下のようになる [1].

$$\lim_{n\to\infty} u_{M_k}^{(n)} = c_k, \quad k = 1,2,\ldots,m, \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_{M_k+p}^{(n)} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m-1, \quad p = 1,2,\ldots,M. \tag{2.6}$$

ここで，c_k は正数であり，$c_1 \geq c_2 \geq \cdots \geq c_m$ を満たす．(2.2)，(2.5)，(2.6) より，$U_k^{(n)}$ と $V_k^{(n)}$ の極限が存在するので，$\mathscr{L}^{(n)} + dI$ の極限は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(d) &:= \lim_{n\to\infty}(\mathscr{L}^{(n)} + dI)\\ &= \begin{pmatrix} \mathscr{L}_1(d) & & & \mathbf{O} \\ \mathscr{E}_M & \mathscr{L}_2(d) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathscr{E}_M & \mathscr{L}_m(d) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ただし，ブロック行列 $\mathscr{L}_k(d)$，$\mathscr{E}_M$ は $(M+1)\times(M+1)$ 行列

$$\mathscr{L}_k(d) := \begin{pmatrix} d & & & c_k \\ 1 & d & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & d \end{pmatrix}, \quad \mathscr{E}_M := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

である．このとき，明らかに $\det(\lambda I - \mathscr{L}_k(d)) = (\lambda - d)^{M+1} - c_k$ なので，$\mathscr{L}(d)$ の固有多項式は

$$\det(\lambda I - \mathscr{L}(d)) = \prod_{k=1}^{m}\left\{(\lambda - d)^{M+1} - c_k\right\} \tag{2.7}$$

となる．これは，$\mathscr{L}(d)$ の固有値が c_k の $(M+1)$ 乗根に d を加えた値であることを意味する．$\mathscr{L}(d)$ と $\mathscr{L}^{(n)} + dI$ が相似であることから，$\mathscr{L}^{(n)} + dI$ の固有値は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}&\lambda_{k,\ell} = \sqrt[M+1]{c_k}\left\{\cos\left(\frac{2\ell\pi}{M+1}\right) + i\sin\left(\frac{2\ell\pi}{M+1}\right)\right\} + d, \\ &\ell = 1,2,\ldots,M+1, \quad k = 1,2,\ldots,m.\end{aligned} \tag{2.8}$$

ある有限の n では，$\mathscr{L}^{(0)} + dI$ の固有多項式は近似的に $\prod_{k=1}^{m}\{(\lambda - d)^{M+1} - U_{M_k}^{(n)}\}$ と因数分解され，n が大きくなるにつれて (2.7) の右辺に近づく．以上より，dhLV アルゴリズムと名づけられた帯行列 $\mathscr{L}^{(0)} + dI$ の固有値計算アルゴリズムが定式化される．$M, m, d, U_k^{(0)}$ の値は初期行列 $\mathscr{L}^{(0)} + dI$ より定め，$\delta^{(n)} > 0$ とする．つづいて，$\mathscr{L}^{(0)} + dI$ の成分 $U_k^{(0)}$ をもとに dhLV 系の初期値を

$$u_k^{(0)} = \frac{U_k^{(0)}}{\prod_{j=1}^{M}(1 + \delta^{(0)} u_{k-j}^{(0)})}, \quad k = 1,2,\ldots,M_m \tag{2.9}$$

とする．(2.9) の値をもとに，dhLV 系を利用して，すなわち，

$$u_k^{(n+1)} = u_k^{(n)} \prod_{j=1}^{M} \frac{1 + \delta^{(n)} u_{k+j}^{(n)}}{1 + \delta^{(n+1)} u_{k-j}^{(n+1)}}, \quad k = 1,2,\ldots,M_m$$

によって $u_k^{(1)}, u_k^{(2)}, \ldots$ を逐次的に求め，十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\max_{k \neq M_1, M_2 \ldots, M_m} u_k^{(n)} < \varepsilon$ が満たされた時点で反復を停止する．そのときの $u_{M_k}^{(n)}$ の値を c_k の近似値とみなせば，(2.8) より $\mathscr{L}^{(0)} + dI$ の固有値が得られる．

3　離散ハングリー戸田方程式に基づく行列の固有値計算

qd アルゴリズムの漸化式とみなすことができる (1.2) は，減算をなくして，加算と乗除算からなる漸化式に書き換えられる．differential 型の qd，いわゆる dqd アルゴリズムは，この減算なしの漸化式を利用した アルゴリズムである [5]．qd アルゴリズムの漸化式，つまり離散戸田方程式にならい，dhToda 方程式 (1.3) も減算のない differential 型へ変形する．まず，新しい変数 $D_k^{(n)}$ を導入する．

$$D_1^{(n)} = Q_1^{(n)}, \quad D_k^{(n)} = Q_k^{(n)} - E_{k-1}^{(n+1)}, \quad k = 2,3,\ldots,m.$$

このとき，(1.3) より $D_k^{(n)}$ と $D_{k+1}^{(n)}$ の関係式

$$D_{k+1}^{(n)} = \frac{Q_{k+1}^{(n)}}{Q_k^{(n+M)}} D_k^{(n)} \tag{3.1}$$

が得られる．(3.1) の $Q_{k+1}^{(n)}/Q_k^{(n+M)}$ は dhToda 方程式の第 2 式にも現れる．これを $F_{k+1}^{(n)} := Q_{k+1}^{(n)}/Q_k^{(n+M)}$ とし，$D_k^{(n)}$ と $F_k^{(n)}$ を使って dhToda 方程式を書き換えると次式が得られる．

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = E_k^{(n)} + D_k^{(n)}, \quad k = 1,2,\ldots,m, \\ E_k^{(n+1)} = F_{k+1}^{(n)} E_k^{(n)}, \quad k = 1,2,\ldots,m-1, \\ D_{k+1}^{(n)} := F_{k+1}^{(n)} D_k^{(n)}, \quad F_{k+1}^{(n)} := \dfrac{Q_{k+1}^{(n)}}{Q_k^{(n+M)}}. \end{cases} \tag{3.2}$$

(3.2) の初期値を $Q_k^{(0)} > 0,\ Q_k^{(1)} > 0,\ \ldots, Q_k^{(M-1)} > 0$，$E_k^{(0)} > 0$ とすれば，正数の加算及び乗除算によって時間発展 $n \to n+1$ が行われるので，あらゆる n に対して $Q_k^{(n)} > 0$，$E_k^{(n)} > 0$ となる．この正値性を利用すれば，$n \to \infty$ における dhToda 変数の漸近挙動について次の定理が導かれる．

定理 3.1 dhToda 変数の初期値を $Q_k^{(0)} > 0,\ Q_k^{(1)} > 0, \ldots, Q_k^{(M-1)} > 0$，$E_k^{(0)} > 0$ とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} E_k^{(n)} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m-1, \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{M-1} Q_k^{(n-j)} = C_k, \quad k = 1,2,\ldots,m. \tag{3.4}$$

ここで，定数 C_k は $C_1 \geq C_2 \geq \cdots \geq C_m > 0$ を満たす．

$M=1$ のとき，$E_k^{(n)} = e_k^{(n)}, Q_k^{(n)} = q_k^{(n)}$ なので，定理 3.1 は離散戸田変数の $n \to \infty$ における漸近挙動を示す．$M = 2,3,\ldots$ のとき，n が十分大きくなると $Q_k^{(n)}$ の値は周期的に変動するが，積 $\prod_{j=0}^{M-1} Q_k^{(n-j)}$ が正数 C_k に収束する．

つづいて，dhToda 方程式に関する以下のラックス表示から保存量について考察する．

$$L^{(n+1)} R^{(n+M)} = R^{(n)} L^{(n)}, \tag{3.5}$$

$$L^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ E_1^{(n)} & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & E_2^{(n)} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & E_{m-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{(n)} := \begin{pmatrix} Q_1^{(n)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_2^{(n)} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & Q_m^{(n)}. \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

ここで，(3.6) のラックス行列の積によって定義される

$$A^{(n)} := L^{(n)} R^{(n+M-1)} R^{(n+M-2)} \cdots R^{(n+1)} R^{(n)} \tag{3.7}$$

を導入する．このとき，$R^{(n)}$ は正則なので，(3.5) より $A^{(n+1)} = R^{(n)} A^{(n)} (R^{(n)})^{-1}$ が得られる．これは，dhToda 方程式の時間発展 $n \to n+1$ を利用して，$A^{(n)}$ から $A^{(n+1)}$ への相似変形が実行できることを意味する．明らかに $\mathrm{Tr}\{(A^{(n)})^j\}$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ は保存量であり，[4] でも番号付き箱玉系の保存量として示されている．[4] では，dhToda 方程式を利用して具体的に固有値を求める方法については言及されていない．以下では，dhToda 方程式から導かれる dhToda アルゴリズム [2] と名付けられた帯行列 $A^{(0)}$ の固有値計算アルゴリズムを紹介する．

$m > M$ のとき，$A^{(0)} = L^{(0)} R^{(M-1)} R^{(M-2)} \cdots R^{(0)}$ は

$$A^{(0)} = \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{6em}}^{M} \hspace{10em} \\ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 1 & & \mathbf{0} \\ * & \ddots & \ddots & * & \ddots & \\ & * & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & * & * \end{pmatrix} \end{array}$$

となる．ここで，$*$ は非零成分であり，右上の帯成分は 1 に固定される．つまり，$A^{(0)}$ は下帯幅 1，上帯幅 M の Hessenberg 行列となる．$m \le M$ ならば，$A^{(0)}$ は上 3 角部分が密な Hessenberg 行列となる．右上の 1 以外の非零成分は $Q_k^{(0)}, Q_k^{(1)}, \ldots, Q_k^{(M-1)}$ 及び $E_k^{(0)}$ の積和で表現される．dhToda 方程式の時間発展 $n \to n+1$ によって $A^{(0)}$ から $A^{(n)}$ へ相似変形されるが，その $A^{(n)}$ の下側副対角成分，すなわち，第 $(i+1,i)$ 成分は $E_i^{(n)} \prod_{j=0}^{M-1} Q_i^{(n+j)}$ で与えられる．dhToda 変数 $Q_k^{(n)}$ は有界なので，定理 3.1 より $n \to \infty$ において $A^{(n)}$ の第 $(i+1,i)$ 成分は全て 0 に，また $A^{(n)}$ の第 (i,i) 成分は $C_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=0}^{M-1} Q_i^{(n-j)}$ に収束することがわかる．よって，$n \to \infty$ において $A^{(n)}$ は上 3 角行列に収束するので，その対角成分 C_k が $A^{(0)}$ の固有値となる．

初期行列 $A^{(0)}$ をもとに正数 m, M 及び $E_k^{(0)}, Q_k^{(0)}, Q_k^{(1)}, \ldots, Q_k^{(M-1)}$ を定め，dhToda 方程式の differential 型 (3.2) によって時間発展 $n \to n+1$ を繰り返す．十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\max_k E_k^{(n)} < \varepsilon$ を満たされた段階で反復を停止すると，$\prod_{j=0}^{M-1} Q_k^{(n-j)}$ が $A^{(0)}$ の固有値を与える．

4　dhLV アルゴリズムと dhToda アルゴリズム

(3.7) の $L^{(n)}, R^{(n)}, R^{(n+1)}, \ldots, R^{(n+M-1)}$ をブロックとして並べた $(M+1)m$ 次の拡大行列

$$B^{(n)} = \begin{pmatrix} & & & & L^{(n)} \\ R^{(n+M-1)} & & & & \\ & R^{(n+M-2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & & R^{(n)} & \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，$j = 1,2,\ldots,M+1$, $k = 1,2,\ldots,m$ に対し，$\big((k-1)(M+1)+j, (j-1)m+k\big)$ 成分が 1 で，残りの成分が 0 となる置換行列 P を導入すると，$PB^{(n)}$ は $B^{(n)}$ の第 $((j-1)m+k)$ 行が第 $((k-1)(M+1)+j)$ 行に変換された行列，$B^{(n)}P^{\top}$ は $B^{(n)}$ の第 $((j-1)m+k)$ 列が第 $((k-1)(M+$

$1)+j)$ 列に変換された行列となる．また，$PB^{(n)}P^{\top}$ に適当な対角行列 D による相似変換を施すと，$DPB^{(n)}P^{\top}D^{-1}$ は dhLV アルゴリズムが適用できる行列 $\mathscr{L}^{(n)}$ となる．一連の変換において固有値不変であり，$B^{(n)}$ と $\mathscr{L}^{(n)}$ の固有値は一致する．さらに，[6] の定理によれば $A^{(n)}$ の固有値の $(M+1)$ 乗根は $B^{(n)}$ の固有値と一致するので，$A^{(n)}$ の固有値の $(M+1)$ 乗根と $\mathscr{L}^{(n)}$ の固有値が等しいと結論付けられる．すなわち，dhToda アルゴリズムにおける収束値 C_k の $(M+1)$ 乗根は，dhLV アルゴリズムで求まる $\mathscr{L}^{(n)}$ の固有値と一致する．逆に，dhLV アルゴリズムにおける収束値 c_k は，dhToda アルゴリズムで求まる $A^{(n)}$ の固有値と等しくなる．

5 まとめ

本報告では，まず dhLV 系のラックス表示と dhLV 変数の漸近挙動を明らかにし，帯行列の複素固有値が計算できる dhLV アルゴリズムを示した．dhLV アルゴリズムでは dhLV 系の時間発展 $n \to n+1$ を利用して，帯行列を相似なブロック対角行列に近づける．得られたブロック対角行列の固有値は dhLV 変数の収束値の $(M+1)$ 乗根で与えられる．一方，dhToda アルゴリズムの定式化には，dhToda 方程式の時間発展 $n \to n+1$ によって，上 Hessenberg 行列が上 3 角行列に相似変形できることを利用した．dhToda 変数で表現される上 3 角行列の対角成分は $n \to \infty$ において定数に収束し，その定数が上 Hessenberg 行列の固有値となる．さらに，dhToda アルゴリズムで求まる固有値は dhLV アルゴリズムでも求まり，逆もまた成り立つことを述べた．

dhLV アルゴリズム，dhToda アルゴリズムに対する収束加速のための原点シフト導入は今後の課題である．

参考文献

[1] A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki, Y. Nakamura: “The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues”, Inverse Problems **25** (2009), 015007.

[2] A. Fukuda, E. Ishiwata, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, Y. Nakamura: “The discrete hungry integrable systems and their related algorithms ”, preprint.

[3] M. Iwasaki, Y. Nakamura: “An application of the discrete Lotka-Volterra system with variable step-size to singular value computation”, Inverse Problems **20** (2004), 553–563.

[4] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma: “Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization”, Inverse Problems **15** (1999), 1639–1662.

[5] H. Rutishauser: “Lectures on Numerical Mathematics”, Birkhauser, Boston, 1990.

[6] D. S. Watkins: “Product eigenvalue problems”, SIAM Review, **47** (2005), 3–40.