超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解

久保, 涼平
立教大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部

https://doi.org/10.15017/1832822

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.133-138, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 21 (pp. 133 - 138)

超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解

久保 涼平（**KUBO Ryouhei**），筧 三郎（**KAKEI Saburo**）

（Received 31 January 2017; Accepted 10 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式の楕円関数解

立教大学大学院　久保 涼平（Kubo, Ryouhei）
立教大学理学部　筧 三郎（Kakei, Saburo）

概 要

榊・筧は，超幾何関数によって表される不変量を持つ連立型差分方程式の構成法を与え，具体例を 12 個与えた．これらの差分方程式に対する解は，近藤，梅野によって調べられきた．本稿では，まだ解かれていなかった方程式の解を考察し，その解が楕円関数で与えられることを示す．

1　はじめに

榊・筧は，${}_2F_1$ 型超幾何関数によって表される不変量を持つ連立型差分方程式の構築法を提示し，12 個の具体例を与えた [1]．ここでは，論文 [2, 3] にしたがって，これらの方程式を Sakaki-Kakei (SK) 方程式と呼ぶことにし，論文 [1] で与えられている順に SK-1 ∼ SK-12 とする．近藤は SK 方程式の求解方法を提案し，12 個の SK 方程式のうち 7 個の厳密解を近藤が，1 個の厳密解を梅野が明らかにした [4].

今回は，未解決であった SK-4 の厳密解を紹介する．ただし，SK-4 の導出に関して，出発点となる関数等式に誤植があったため，まずは修正した方程式を導出し，それについて解を議論する．修正した際，2 つの新しい SK 型方程式 modified SK(mSK)-4-1，mSK-4-2 が導出され，この 2 つの解が楕円関数で書けることを述べる．

次節では具体例として SK-1 を挙げ，超幾何関数から差分方程式，不変量の構成法と，近藤の求解方法を用いて解を記述する．

2　方程式の導出と解法：SK-1 を例に

2.1　sl 関数

SK-1 の場合は，解は楕円関数の 1 つである sl（レムニスケートサイン）関数を用いて表される．そのため，解の最初に SK-1 の解となるレムニスケートサイン関数について，その定義と公式を紹介しておく．この sl 関数は SK-1 の解を与えるのみではなく，後に定義する mSK-4-1,mSK-4-2 にもあらわれる．

まずは Weierstraßの $\wp$ 関数を考えることにして，$\wp(z;\tau)$ を $1,\tau(\tau\in\mathbb{H})$ を周期とする $\wp$ 関数とする．ここで，$\tau=i$ と取れば，対応する周期格子 Λ は，

$$\Lambda=\mathbb{Z}[i]=\{m+ni\mid m,n\in\mathbb{N}\} \tag{1}$$

とガウス整数になる．このとき，次の関数等式が成立することが知られている [5]:

$$\wp((1+i)z;i)=\frac{1}{2i}\left(\wp(z;i)-\frac{16K^4}{\wp(z;i)}\right)\quad\left(K=\int_0^1\frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{1-t^4}}\right). \tag{2}$$

レムニスケートサイン sl 関数は次のように定義される．

定義 1 (sl 関数) 次式の逆関数で定義される関数を，sl 関数と呼ぶ：

$$\mathrm{sl}^{-1}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^4}}. \tag{3}$$

sl 関数は，$\tau = i$ のときの $\wp$ 関数と次のように関係する：

$$\wp(z;i) = \frac{4K^2}{\mathrm{sl}^2(2Kz)}. \tag{4}$$

よって，関係式 (2),(4) を合わせることにより，$w = 2Kz$ とすれば，

$$\mathrm{sl}^2((1+i)w) = 2i\frac{\mathrm{sl}^2(w)}{1-\mathrm{sl}^4(w)} \tag{5}$$

なる sl 関数の $(1+i)$ 倍公式が得られる．

2.2 SK-1 の導出，およびその解

SK-1 を例に，超幾何関数等式に対する差分方程式を構成法を述べる．まずは次の関数等式を考える:

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{-4x}{(1-x)^2}\right). \tag{6}$$

ここに $x = b/a$ $(a > b)$ を代入し，両辺に $a^{-\frac{1}{2}}(=1/\sqrt{a})$ をかけると，

$$\frac{1}{\sqrt{a}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{a-b}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{-4ab}{(a-b)^2}\right) \tag{7}$$

が得られる．そこで，$a = a_n$, $b = b_n$ として，

$$\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n - b_n}, \quad \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{-4a_nb_n}{(a_n-b_n)^2} \tag{8}$$

となるように a_{n+1}, b_{n+1} を定めれば，

$$a_{n+1} = a_n - b_n, \quad b_{n+1} = \frac{-4a_nb_n}{a_n - b_n} \tag{9}$$

なる差分方程式が生成される．このとき，(7) から，

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4};\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \tag{10}$$

が成立する．

(注) 超幾何関数に対する関数等式は任意の x で成立するわけではなく，(6) の場合は $-1 < x < 1$ でのみ成り立つ．よって (10) が成り立つのも a_n, b_n の範囲は制限を受けるため，厳密な意味での “不変量” ではない．このような制限付きの “不変量” を，ここでは “擬不変量” と呼ぶことにする．

次に，方程式 (9) を例に，近藤による解法を紹介する．(9) では，

$$a_{n+1}b_{n+1} = -4a_nb_n \tag{11}$$

なる関係式が成り立つことがわかる．これより，$c := a_0b_0$ として，$a_nb_n = (-4)^n c$ が得られるので，

$$a_{n+1} = a_n - (-4)^n \frac{c}{a_n} \tag{12}$$

と 1 次元化できる．さらに，$a_n = 2^n\sqrt{c}\tilde{a}_n$ とすれば，

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n - \frac{(-1)^n}{\tilde{a}_n}\right) \tag{13}$$

となる．しかし，右辺に $(-1)^n$ が残り，まだ非自励系である．そこで近藤は $\tilde{a}_n$ の偶数列を作り，それらが sl 関数の倍数公式に帰着できることを示すことで，SK-1 の偶数項の表示式を得た．

さらに $\tilde{a}_n = i^n/\hat{a}_n$ なる変換を (13) に施すと，

$$\hat{a}_{n+1} = 2i\frac{\hat{a}_n}{1-\hat{a}_n^2} \tag{14}$$

が導かれ，(14) は (5) に一致する．したがって，δ を定数とすれば，

$$\hat{a}_n = \mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta) \tag{15}$$

となる．以上をまとめると，

$$a_n = (2i)^n\sqrt{c}\frac{1}{\mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta)}, \quad b_n = (2i)^n\sqrt{c}\ \mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta) \tag{16}$$

が得られる．ここで δ は，初期条件 a_0, b_0 によって

$$\delta = \mathrm{sl}^{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{b_0}{a_0}}\right) \tag{17}$$

と表される．

3 mSK-4-1, mSK-4-2 の定義とその解

榊・筧 [1] における SK-4 の導出では，関数等式に誤植がある．そのため，これを訂正した上で，新たな 2 つの SK 方程式を定義し，その 2 つの方程式に対する差分方程式，不変量，さらに解を考察する．

3.1 mSK-4-1

まず次の関数等式を考える ([1], 命題 15):

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4};x\right) = \frac{1+x}{(1-x)^{3/2}}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4};\frac{-4x}{(1-x)^2}\right). \tag{18}$$

このとき，前述の構成法により次の差分方程式 (mSK-4-1) と，対応する擬不変量が得られる:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^3}{(a_n + b_n)^2}, \quad b_{n+1} = \frac{-4a_n b_n (a_n - b_n)}{(a_n + b_n)^2}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt[4]{t^3 (t + a_0 - b_0)^3}}. \tag{20}$$

今の場合，(20) は実際に積分でき，

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}; \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{1}{\sqrt{a_n - b_n}} \tag{21}$$

となる．差分方程式 (19) を用いて直接計算すれば，$a_n - b_n$ が (範囲の制限を受けずに) n によらず一定であることが分かる．そこで，$c := a_0 - b_0 = a_n - b_n$ として，(19) の上式に代入すれば，

$$a_{n+1} = \frac{c^3}{(2a_n - c)^2} \tag{22}$$

と 1 次元化される．ここで，$a_n = c/(1 - \tilde{a}_n)$ とおくと，

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{-4\tilde{a}_n}{(1 - \tilde{a}_n)^2} \tag{23}$$

と変換され，これは $\tilde{a}_n = \mathrm{sl}^4((1+i)^n x)$ とすれば (5) の 2 乗の式に一致する．したがって，λ を定数として，$\tilde{a}_n = \mathrm{sl}^4((1+i)^n \lambda)$ とすれば，

$$a_n = \frac{c}{1 - \mathrm{sl}^4((1+i)^n \lambda)} \tag{24}$$

が得られる．また，b_n は，$b_n = a_n - c$ であるから，

$$b_n = \frac{c\,\mathrm{sl}^4((1+i)^n \lambda)}{1 - \mathrm{sl}^4((1+i)^n \lambda)} \tag{25}$$

となり，以上より mSK-4-1 の解が得られた．ここで λ は，SK-1 と同様の議論をすれば，

$$\lambda = \mathrm{sl}^{-1}\left(\sqrt[4]{\frac{b_0}{a_0}}\right) \tag{26}$$

と取ればよいことが分かる．

3.2 mSK-4-2

次の関数等式を考える ([1], 命題 15):

$$ {}_2F_1\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; x\right) = \frac{1+x}{(1-x)^2} {}_2F_1\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{-4x}{(1-x)^2}\right) \tag{27}$$

この関数等式 (27) と，SK-1 で用いた関数等式 (6) には関係がある．これをみるために次の変換を紹介しておく：

定義 2 (Pfaff 変換) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C},\ \gamma \neq -1, -2, -3, \cdots$ として，

$$ {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{-\alpha} {}_2F_1\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma; \frac{x}{x-1}\right) \tag{28}$$

が成り立つ．この変換を *Pfaff* 変換という．

また，α, β の両方に関して Pfaff 変換を施すと，

$$
{}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x) \tag{29}
$$

という関係式が得られる．これを (27) の両辺に用いれば，SK-1 の関数等式 (6) と一致する．

本題に戻り，mSK-4-2 の差分方程式と擬不変量を考えよう:

$$
a_{n+1} = \frac{(a_n - b_n)^2}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{-4a_n b_n}{a_n + b_n}, \tag{30}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{a_n}}{}_2F_1\left(1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; \frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{\Gamma(5/4)}{\Gamma(1/4)} \int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{t^3(t+a_0)^2(t+a_0-b_0)^3}. \tag{31}
$$

(30) の解を求めるため，a_n, b_n の関係式を調べると，

$$
a_{n+1}b_{n+1}(a_{n+1} - b_{n+1})^2 = -4a_n b_n (a_n - b_n)^2 \tag{32}
$$

が成り立つ．これより，$c := a_0 b_0 (a_0 - b_0)^2$ とすれば，

$$
a_n b_n (a_n - b_n)^2 = (-4)^n c \tag{33}
$$

となるが，これでは a_n, b_n のどちらについても明示的には解けないため，近藤の手法を用いることができない．そこで，次の座標変換を考える：

$$
a_n = \frac{p_n}{\sqrt{p_n - q_n}}, \quad b_n = \frac{q_n}{\sqrt{p_n - q_n}}. \tag{34}
$$

これらは，p_n, q_n について解くと，

$$
p_n = a_n(a_n - b_n), \quad q_n = b_n(a_n - b_n) \tag{35}
$$

となる．すると，(32) は，

$$
p_{n+1}q_{n+1} = -4p_n q_n \tag{36}
$$

という関係式となる．また，p_n, q_n の満たす差分方程式は

$$
p_{n+1} = p_n - q_n, \quad q_{n+1} = \frac{-4p_n q_n}{p_n - q_n} \tag{37}
$$

である．ここで得られた (36), (37) は，は SK-1 の関係式 (11)，差分方程式 (9) に他ならない．よって，p_n, q_n はすでに求めた SK-1 の解であるから，(34) を用いれば mSK-4-2 の解が得られる．こうして，mSK-4-2 の解が次式で与えられることが分かった：

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
a_n &=& (2i)^{n/2}\sqrt[4]{c}\dfrac{1}{\mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta)}\sqrt{\dfrac{\mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta)}{1-\mathrm{sl}^4((1+i)^n\delta)}}, \\
b_n &=& (2i)^{n/2}\sqrt[4]{c}\,\mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta)\sqrt{\dfrac{\mathrm{sl}^2((1+i)^n\delta)}{1-\mathrm{sl}^4((1+i)^n\delta)}}.
\end{array}
\right. \tag{38}
$$

4　おわりに

本稿では，超幾何関数の恒等式より新しく定義した差分方程式 mSK-4-1, mSK-4-2 に対して，それらの解を構成した．これらの系は明示的に書かれる解を持つが，その挙動はカオス的であり，

梅野 [6, 7] の意味での「厳密に解けるカオス」となっている．さらに，テント写像と位相同型であることを示すことができ，それを通して不変測度を明示的に書くことが可能である．

また，ここでは詳細を記述する余裕がないが，SK-8, 9, 10 についても，同様のアプローチで解を得ることができる．その際には周期格子がアイゼンシュタイン整数 $\mathbb{Z}[\omega]$ ($\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$) である $\wp$ 関数，およびその虚数乗法公式が利用される．このように，超幾何関数の関数等式から出発して構成された「可解カオス系」が虚数乗法論と関係を持つことが，より深い意味を持ち得るかどうかは今後に向けての課題である (cf. [4])．このような系は虚数乗法を持つ楕円曲線と関係しており，一般の場合である [7] とは別のクラスと考えられる．

虚数乗法を持つ $\wp$ 関数の満たす関数方程式のうち，分子が 2 次まで，分母が 1 次までの有理式で表されるもののリストが，文献 [5] で与えられている．今回用いた (2) もその 1 つであるが，リストにある他の方程式が，${}_2F_1$ 型超幾何関数等式と結びつくかどうかも，未解決の課題である．

さらに根源的な問いとして，超幾何関数等式と可解カオス系とがなぜ関係するかの解明がある．任意の超幾何関数等式に対して，対応する差分方程式の解が明示的に書けるのかどうかは，現在分かっていない．ここまでに分かっている例では，差分方程式の解は三角関数，楕円関数などで書けているが，これらの解を決める要因は分かっていない．

参考文献

[1] 榊武史・筧三郎, 超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式, 日本応用数理学会論文誌 **17** (2007), 455–462.

[2] K. Kondo, Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 1, 2, 7 and 12, *JSIAM Letters* **3** (2011), 45–48.

[3] K. Kondo, Solutions of Sakaki-Kakei equations of type 3, 5 and 6, *JSIAM Letters*, **2** (2010), 73–76.

[4] 梅野健, 情報の統計力学, 数理科学 **600**, サイエンス社, 2013 年 6 月, pp. 35–41.

[5] A.P. Veselov, What is an integrable mapping?, in: *What is Integrability?*, V.E. Zakharv (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1991, pp. 251–272.

[6] 梅野健, カオスと計算, 別冊数理科学 カオス研究の最前線, サイエンス社, 1999 年 9 月, pp. 159–168.

[7] K. Umeno, Method of constructing exactly solvable chaos, *Phys. Rev.* **E55** (1997), 5280–5284.