GL(3)型 Atiyah-Ward 仮説とモノドロミー保存変形

足立, 好輝
立教大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部

https://doi.org/10.15017/1832821

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.125-132, 2017-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 20 (pp. 125 - 132)

$GL(3)$ 型 Atiyah-Ward 仮説と モノドロミー保存変形

足立 好輝（ADACHI Yoshiteru），筧 三郎（KAKEI Saburo）

（Received 15 January 2017; Accepted 27 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

$GL(3)$ 型 Atiyah-Ward 仮説とモノドロミー保存変形

立教大学大学院理学研究科　足立 好輝
立教大学理学部　筧 三郎

概 要

$SU(2)$ 自己相対ヤン・ミルズ方程式と Painlevé 方程式 (以下 P_{VI} と略す) の関連が知られている [1, 2]. 一方, 近年では, 3×3 の線形問題をもつ高次元 Painlevé 方程式が調べられている [3, 4]. そこで, ここでは, 3×3 Riemann-Hilbert 分解から出発して, そこから得られる方程式を考察する.

1　2×2 Riemann-Hilbert 分解と Painlevé VI

まずは 2×2 Riemann-Hilbert 分解と Painlevé VI との関係を概観しておく. 関数 $\rho(z)$ は $|z| = 1$ を含む円環領域で正則と仮定し, $\rho(z)$ は $|z| = 1$ において以下のように Laurent 展開されるものとする：

$$\rho(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \rho_n z^{-n}, \quad \rho_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \rho(z) z^{n-1} dz. \tag{1}$$

さらに，展開係数 ρ_n がパラメータ $\{u_i, v_i\}_{i=1,2}$ に依存するものとして，$\rho_n = \rho_n(u_1, v_2, u_2, v_2)$, $\rho(z) = \rho(z; u_1, v_2, u_2, v_2)$ とみなす．ここで, 記号を簡単にするために,

$$D_i^{(1)} = \partial_{v_i} - z\partial_{u_i}, \quad D^{(2)} = \partial_z - \sum_{i=1}^{m} v_i \partial_{v_i}, \quad D_i^{(3)} = u_i \partial_{u_i} + v_i \partial_{v_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

とおき, $\rho(z)$ は次の関係式を満たすものとする：

$$D_i^{(1)} \rho(z) = 0, \quad D^{(2)} \rho(z) = 0, \quad D_i^{(3)} \rho(z) = \theta_i \rho(z) \qquad (i = 1, 2). \tag{3}$$

ここで, N 次行列式 Δ_N を次のように定める:

$$\Delta_N = \det \left(\rho_{i-j} \right)_{i,j=1}^{N}. \tag{4}$$

天下りだが, 次の行列値関数を考える (Atiyah-Ward 仮説):

$$P(z) = \begin{pmatrix} z^N & \rho(z) \\ 0 & z^{-N} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

定理 1 ([5]) 条件 $\Delta_n \neq 0$ が成り立つとき, 次の関係を満たす行列値関数 $W(z), \overline{W}(z)$ が一意的に存在する:

$$\begin{aligned}
&W(z)P(z) = \overline{W}(z), \\
&W(z):\ |z| \geq 1 \text{ で正則}, W(z) = E + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^{-n} W_n, \\
&\overline{W}(z):\ |z| \leq 1 \text{ で正則}, \overline{W}(z) = G_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} z^n \overline{W}_n.
\end{aligned}$$

ここで E は単位行列であり, $W(z), \overline{W}(z)$ の係数行列 $\{W_j, \overline{W}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, および G_0 の成分は, $\{\rho_n\}$ を成分とする行列式で表される. また, $P(z)$ の相似性に注意することで, $W(z), \overline{W}(z)$ の満たす微分方程式を導出することができる.

定理 2 z によらない行列 A_i, B_i, C が存在して $W(z), \overline{W}(z)$ に関する次の微分方程式が成り立つ:

$$D_i^{(1)}W = B_iW, \quad D_i^{(1)}\overline{W} = B_i\overline{W}, \tag{6}$$

$$D^{(2)}W = CW + NWE_2, \quad D^{(2)}\overline{W} = C\overline{W} + N\overline{W}E_1, \tag{7}$$

$$D_i^{(3)}W = A_iW - \theta_iWE_1, \quad D_i^{(3)}\overline{W} = A_i\overline{W} - \theta_i\overline{W}E_1. \tag{8}$$

ただし, $E_1 = \mathrm{diag}\,(1,0)$, $E_2 = \mathrm{diag}\,(0,1)$ とする.

以上の準備の下で, P_{VI} の線形問題を導出する [2]. パラメータ m を $m=2$ とし, $\Psi(z;u_1,v_1,u_2,v_2) = \overline{W}\left(z^{-N}E_1 + E_2\right)$ を考える. 以下の相似性に注意する:

$$\begin{aligned} &\Psi(\lambda z;u_1,\lambda^{-1}v_1,u_2,\lambda^{-1}v_2) = (E_1+\lambda^{-N}E_2)\Psi, \\ &\Psi(z;\lambda u_1,\lambda v_1,u_2,v_2) = (\lambda^{\theta_1}E_1+E_2)\Psi, \quad \Psi(z;u_1,v_1,\lambda u_2,\lambda v_2) = (\lambda^{\theta_2}E_1+E_2)\Psi. \end{aligned} \tag{9}$$

さらに, (6) より以下の微分方程式が成り立つ:

$$(\partial_{v_1} - z\partial_{u_1})\Psi = B_1\Psi, \quad (\partial_{v_2} - z\partial_{u_2})\Psi = B_2\Psi. \tag{10}$$

また, (9) 式の両辺を λ で偏微分し, $\lambda=1$ を代入することで次を得る:

$$\begin{aligned} &(v_1\partial_{v_1} + v_2\partial_{v_2})\Psi = z\partial_z\Psi + NE_2\Psi, \\ &(u_1\partial_{u_1} + v_1\partial_{v_1})\Psi = \theta_1E_1\Psi, \quad (u_2\partial_{u_2} + v_2\partial_{v_2})\Psi = \theta_2E_1\Psi. \end{aligned} \tag{11}$$

ここで, (10), (11) より,

$$v_1\partial_{v_1}\Psi = \left(\theta_1E_1 + \frac{u_1(v_1B_1 - \theta_1E_1)}{u_1+zv_1}\right)\Psi, \tag{12}$$

$$v_2\partial_{v_2}\Psi = \left(\theta_2E_1 + \frac{u_2(v_2B_2 - \theta_2E_1)}{u_2+zv_2}\right)\Psi \tag{13}$$

を得る. こうして次が得られる:

$$z\partial_z\Psi = \left((\theta_1+\theta_2)E_1 - NE_2 + \frac{u_1(v_1B_1-\theta_1E_1)}{u_1+zv_1} + \frac{u_2(v_2B_2-\theta_2E_1)}{u_2+zv_2}\right)\Psi. \tag{14}$$

ここで P の条件に戻って考える. $P(\lambda z;u_1,\lambda^{-1}v_1,u_2,\lambda^{-1}v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-N} \end{pmatrix} P(z) \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が分かっているので, この式に $P = W^{-1}\overline{W}$ を代入し, z の正べきに注目すると,

$$\overline{W}(\lambda z;u_1,\lambda^{-1}v_1,u_2,\lambda^{-1}v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-N} \end{pmatrix} \overline{W} \begin{pmatrix} \lambda^N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る. この式を λ で偏微分し $\lambda=1$ を代入すると,

$$(v_1\partial_{v_1} + v_2\partial v_2)\overline{W} = z\partial_z\overline{W} + NE_2\overline{W} - N\overline{W}E_1$$

となる. $\overline{W} = G_0 + O(z)$ なので, z^0 の項に注目すると,

$$(v_1\partial_{v_1} + v_2\partial v_2)G_0 = NE_2G_0 - NG_0E_1.$$

また, (6) においても同様に z^0 の項のみを考えると $\partial_{v_1}G_0 = B_1G_0$ が成立するので先の式に代入すると, $v_1B_1G_0 + v_2B_2G_0 = NE_2G_0 - NG_0E_1$ が成り立ち, 右から G_0^{-1} をかければ,

$$v_1B_1 + v_2B_2 - NE_2 = -G_0 \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G_0^{-1} \tag{15}$$

が成り立つことが分かる. また, ほかの相似性より $P(z; \lambda u_1, \lambda v_1, u_2, v_2) = \begin{pmatrix} \lambda^{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P(z) \begin{pmatrix} \lambda^{-\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり, 先と同様に $P = W^{-1}\overline{W}$ を代入し z の正べきのみ考えれば,

$$\overline{W}(z; \lambda u_1, \lambda v_1, u_2, v_2) = \begin{pmatrix} \lambda^{\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overline{W}(z) \begin{pmatrix} \lambda^{-\theta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる. ここで λ で偏微分し, $\lambda = 1$ を代入し (6) を用いれば,

$$(u_1 + zv_1)\partial_{u_1}\overline{W} + v_1B_1\overline{W} = \theta_1E_1\overline{W} - \theta_1\overline{W}E_1$$

を得る. ここで, $\overline{W}$ は $z = -\dfrac{u_1}{v_1}$ で正則だと仮定し, $\overline{W}\left(z = -\dfrac{u_1}{v_1}\right) = G_1$ とおくと,

$$v_1B_1G_1 = \theta_1E_1G_1 - \theta_1G_1E_1 \iff v_1B_1 - \theta_1E_1 = -\theta_1G_1E_1G_1^{-1} \tag{16}$$

を得る. 同様にして, $\overline{W}$ は $z = -\dfrac{u_2}{v_2}$ で正則だと仮定し, $\overline{W}\left(z = -\dfrac{u_2}{v_2}\right) = G_2$ とおけば,

$$v_2B_2 - \theta_2E_1 = -\theta_2G_2E_1G_2^{-1} \tag{17}$$

を得る. (16), (17) を (14) に代入すると,

$$z\partial_z\Psi \quad = \left\{(\theta_1 + \theta_2 + N)E_1 + \tfrac{-\theta_1u_1G_1E_1G_1^{-1}}{v_1z+u_1} + \tfrac{-\theta_2u_2G_2E_1G_2^{-1}}{v_2z+u_2} - NE\right\}\Psi \tag{18}$$

となる. さらに $\dfrac{u_1}{v_1} = -1, \dfrac{u_2}{v_2} = -1$ とおき, さらに $\Psi = z^{-N}Y$ とすれば,

$$z\partial_zY = \left\{(\theta_1 + \theta_2 + N)E_1 + \frac{\theta_1G_1E_1G_1^{-1}}{z-1} + \frac{t\theta_2G_2E_1G_2^{-1}}{z-t}\right\}Y \tag{19}$$

とできる. ここで $-NG_0E_1G_0^{-1} = \mathcal{A}_0$, $\theta_1G_1E_1G_1^{-1} = \mathcal{A}_1$, $\theta_2G_2E_1G_2^{-1} = \mathcal{A}_t$ とおき, (15)～(17) より, $(\theta_1 + \theta_2 + N)E_1 = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_t$ に注意すると,

$$(24) \iff \partial_zY = \left\{\frac{\mathcal{A}_0}{x} + \frac{\mathcal{A}_1}{x-1} + \frac{\mathcal{A}_t}{x-t}\right\}Y \tag{20}$$

となる. ここで $\det\mathcal{A}_i = 0$, $\mathrm{tr}\mathcal{A}_i \neq 0$ $(i = 0, 1, t)$ に注意すれば, P_{VI} の線形問題 [6] が得られたことが分かる.

2 3×3 Riemann-Hilbert 分解

ここからは 3×3 Riemann-Hilbert 分解を考え, 何が得られるのかを考えていく. 新たに関数 $\rho(z), \widehat{\rho}(z)$ を考える. $\rho(z), \widehat{\rho}(z)$ は $|z| = 1$ を含む円環領域で正則と仮定し, 以下のように Laurent

展開されるとする：

$$\rho(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\rho_n z^{-n},\quad \rho_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\rho(z)z^{n-1}dz, \tag{21}$$

$$\widehat{\rho}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{\rho}_n z^{-n},\quad \widehat{\rho}_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\widehat{\rho}(z)z^{n-1}dz. \tag{22}$$

ここで $D_i^{(1)},D_i^{(3)}$ $(i=1,2)$ を先と同様とし, 新たに $\widehat{D}_i^{(1)},D^{(2)},\widehat{D}_i^{(3)}$ を

$$\widehat{D}_1^{(1)}=\partial_{\widehat{v}_i}-z\partial_{\widehat{u}_i},\quad D^{(2)}=z\partial_z-\sum_{i=1}^{m}v_i\partial_{v_i}-\sum_{i=1}^{\widehat{m}}\widehat{v}_i\partial_{\widehat{v}_i},\quad \widehat{D}_i^{(3)}=\widehat{u}_i\partial_{\widehat{u}_i}+\widehat{v}_i\partial_{\widehat{v}_i} \tag{23}$$

とおく. このとき, $\rho(z),\widehat{\rho}(z)$ は以下を満たすものとする:

$$\begin{aligned}&D_i^{(1)}\rho(z)=0,\quad \widehat{D}_i^{(1)}\widehat{\rho}(z)=0,\quad D^{(2)}(z)\rho(z)=0,\quad D^2\widehat{\rho}(z)=0,\\&D_i^{(3)}\rho(z)=\theta_i\rho(z),\quad \widehat{D}_i^{(3)}\widehat{\rho}(z)=\widehat{\theta}_i\widehat{\rho}(z).\end{aligned} \tag{24}$$

ここで以下のように $\Delta_{N_1+N_2}$ を定義する:

$$\Delta_{N_1+N_2}=\begin{vmatrix}\rho_0&\rho_{-1}&\cdots&\rho_{-N_1+1}&\widehat{\rho}_0&\widehat{\rho}_{-1}&\cdots&\widehat{\rho}_{-N_2+1}\\\rho_1&\rho_0&\cdots&\rho_{-N_1+2}&\widehat{\rho}_1&\widehat{\rho}_0&\cdots&\widehat{\rho}_{-N_2+2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\rho_{N_1+N_2-1}&\rho_{N_1+N_2-2}&\cdots&\rho_{N_2}&\widehat{\rho}_{N_1+N_2-1}&\widehat{\rho}_{N_1+N_2-2}&\cdots&\widehat{\rho}_{N_1}\end{vmatrix}. \tag{25}$$

天下りだが, 次の行列値関数を考える:

$$P(z)=\begin{pmatrix}z^{N_1}&0&\rho(z)\\0&z^{N_2}&\widehat{\rho}(z)\\0&0&z^{-N_1-N_2}\end{pmatrix} \tag{26}$$

を考える. このとき，以下の定理が成立する:

定理 3 条件 $\Delta_{N_1+N_2}\neq 0$ が成り立つとき, 次の関係を満たす行列値関数 $W(z),\overline{W}(z)$ は一意的に存在する*:*

$$\begin{aligned}W(z)&\quad P(z)=\overline{W}(z)\\W(z)&\quad :|z|\geq 1\text{ で正則},W(z)=E+\sum_{n\in\mathbb{N}}z^{-n}W_n\\\overline{W}(z)&\quad :|z|\leq 1\text{ で正則},\overline{W}(z)=G_0+\sum_{n\in\mathbb{N}}z^{n}\overline{W}_n.\end{aligned}$$

ここで, E は単位行列, $W(z),\overline{W}(z)$ の係数行列 $\{W_j,\overline{W}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, および G_0 の成分は, $\{\rho_n,\widehat{\rho}_n\}$ を成分とする行列式で表される. また, $P(z)$ の相似性に注意することで, $W(z),\overline{W}(z)$ の満たす微分方程式を導出できる.

定理 4 z によらない行列 $A_i,\widehat{A}_i,B_i,\widehat{B}_i,C$ が存在して $W(z),\overline{W}(z)$ に関する次の微分方程式が成り立つ*:*

$$D_i^{(1)}W=B_iW,D_i^{(1)}\overline{W}=B_i\overline{W},\quad \widehat{D}_i^{(1)}W=\widehat{B}_iW,\quad \widehat{D}_i^{(1)}\overline{W}=\widehat{B}_i\overline{W} \tag{27}$$

$$D^{(2)}W=CW+(N_1+N_2)WE_3,\quad D^{(2)}\overline{W}=C\overline{W}+N_1\overline{W}E_1+N_2\overline{W}E_2, \tag{28}$$

$$\begin{aligned}D_i^{(3)}W&=A_iW-\theta_iWE_1,\quad D_i^{(3)}\overline{W}=A_i\overline{W}-\theta_i\overline{W}E_1,\\\widehat{D}_i^{(3)}W&=\widehat{A}_iW-\widehat{\theta}_iWE_2,\quad \widehat{D}_i^{(3)}\overline{W}=\widehat{A}_i\overline{W}-\widehat{\theta}_i\overline{W}E_2.\end{aligned} \tag{29}$$

ただし, $E_a=(\delta_{ij}\delta_{ia})_{i,j=1,2,3}$ *(*$a=1,2,3$*)* とする.

ここで, $m=2$ とし, $\Psi(z;u_1,v_1,u_2,v_2,\widehat{u}_1,\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\widehat{v}_2)=\overline{W}\left(\lambda^{-N_1}E_1+\lambda^{-N_2}E_2+E_3\right)$ を考える. 先と同様に以下の相似性に注意する:

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda z;u_1,\lambda^{-1}v_1,u_2,\lambda^{-1}v_2,\widehat{u}_1,\lambda^{-1}\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\lambda^{-1}\widehat{v}_2) &= (E_1+E_2+\lambda^{-N_1-N_2}E_3)\Psi && (30)\\
\Psi(\lambda u_1,\lambda v_1,u_2,v_2,\widehat{u}_1,\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\widehat{v}_2) &= (\lambda^{\theta_1}E_1+E_2+E_3)\Psi && (31)\\
\Psi(u_1,v_1,\lambda u_2,\lambda v_2,\widehat{u}_1,\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\widehat{v}_2) &= (\lambda^{\theta_2}E_1+E_2+E_3)\Psi && (32)\\
\Psi(u_1,v_1,u_2,v_2,\lambda\widehat{u}_1,\lambda\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\widehat{v}_2) &= (E_1+\lambda^{\widehat{\theta}_1}E_2+E_3)\Psi && (33)\\
\Psi(u_1,v_1,u_2,v_2,\widehat{u}_1,\widehat{v}_1,\lambda\widehat{u}_2,\lambda\widehat{v}_2) &= (E_1+\lambda^{\widehat{\theta}_2}E_2+E_3)\Psi. && (34)
\end{aligned}$$

また, (27) より以下の微分方程式が成立する:

$$(\partial_{v_1}-z\partial_{u_1})\Psi=B_1\Psi,\quad (\partial_{v_2}-z\partial_{u_2})\Psi=B_2\Psi,\quad (\partial_{\widehat{v}_1}-z\partial_{\widehat{u}_1})\Psi=\widehat{B}_1\Psi,\quad (\partial_{\widehat{v}_2}-z\partial_{\widehat{u}_2})\Psi=\widehat{B}_2\Psi. \tag{35}$$

また, (30)～(34) を λ で偏微分し, $\lambda=1$ とすることで以下が得られる:

$$\begin{aligned}
&(v_1\partial_{v_1}+v_2\partial_{v_2}+\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}+\widehat{v}_2\partial_{\widehat{v}_2})\Psi=z\partial_z\Psi+(N_1+N_2)E_3\Psi && (36)\\
&(u_1\partial_{u_1}+v_1\partial_{v_1})\Psi=\theta_1E_1\Psi,\quad (u_2\partial_{u_2}+v_2\partial_{v_2})\Psi=\theta_2E_1\Psi, && (37)\\
&(\widehat{u}_1\partial_{\widehat{u}_1}+\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1})\Psi=\widehat{\theta}_1E_2\Psi,\quad (\widehat{u}_1\partial_{\widehat{u}_1}+\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1})\Psi=\widehat{\theta}_1E_2\Psi. && (38)
\end{aligned}$$

ここで, (35), (37) より

$$v_1\partial_{v_1}\Psi = \left\{\frac{u_1v_1}{u_1+zv_1}B_1+\frac{zv_1\theta_1E_1}{u_1+zv_1}\right\}\Psi=\left\{\theta_1E_1+\frac{u_1(v_1B_1-\theta_1E_1)}{u_1+zv_1}\right\}\Psi \tag{39}$$

が得られる. 同様にして,

$$\begin{aligned}
v_1\partial_{v_1}\Psi&=\left\{\theta_1E_1+\frac{u_1(v_1B_1-\theta_1E_1)}{u_1+zv_1}\right\}\Psi,\quad v_2\partial_{v_2}\Psi=\left\{\theta_2E_1+\frac{u_2(v_2B_2-\theta_2E_1)}{u_2+zv_2}\right\}\Psi,\\
\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}\Psi&=\left\{\widehat{\theta}_1E_2+\frac{\widehat{u}_1(\widehat{v}_1\widehat{B}_1-\widehat{\theta}_1E_2)}{\widehat{u}_1+z\widehat{v}_1}\right\}\Psi,\quad \widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}\Psi=\left\{\widehat{\theta}_2E_2+\frac{\widehat{u}_2(\widehat{v}_2\widehat{B}_2-\widehat{\theta}_2E_2)}{\widehat{u}_2+z\widehat{v}_2}\right\}\Psi
\end{aligned}\tag{40}$$

を得る. これらを (36) に代入すると,

$$z\partial_z\Psi=\left\{\begin{pmatrix}\theta_1+\theta_2&0&0\\0&\widehat{\theta}_1+\widehat{\theta}_2&0\\0&0&-N_1-N_2\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^{2}\frac{u_i(v_iB_i-\theta_iE_1)}{u_i+zv_i}+\sum_{i=1}^{2}\frac{\widehat{u}_i(\widehat{v}_i\widehat{B}_i-\widehat{\theta}_iE_2)}{\widehat{u}_i+z\widehat{v}_i}\right\}\Psi \tag{41}$$

ここで P の条件に戻って考えよう.

$$P(\lambda z;u_1,\lambda^{-1}v_1,u_2,\lambda^{-1}v_2,\widehat{u}_1,\lambda^{-1}\widehat{v}_1,\widehat{u}_2,\lambda^{-1}\widehat{v}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^{-N_1-N_2}\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\lambda^{N_1}&0&0\\0&\lambda^{N_2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

だった. ここで $P=W^{-1}\overline{W}$ を代入し z の正べきを考えると, 次が得られる:

$$\overline{W}(\lambda z;\lambda^{-1}v_1,\lambda^{-1}v_2,\lambda^{-1}\widehat{v}_1,\lambda^{-1}\widehat{v}_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^{-N_1-N_2}\end{pmatrix}\overline{W}\begin{pmatrix}\lambda^{N_1}&0&0\\0&\lambda^{N_2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{42}$$

この両辺を λ で偏微分し, $\lambda=1$ を代入すると,

$$(v_1\partial_{v_1}+v_2\partial_{v_2}+\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}+\widehat{v}_2\partial_{\widehat{v}_2})\overline{W}=z\partial_z\overline{W}+(N_1+N_2)E_3\overline{W}-N_1\overline{W}E_1-N_2\overline{W}E_2$$

となる. ここで, $\overline{W}=G_0+O(z)$ を代入し, z^0 の項に注目すると,

$$(v_1\partial_{v_1}+v_2\partial_{v_2}+\widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}+\widehat{v}_2\partial_{\widehat{v}_2})G_0=(N_1+N_2)E_3G_0-N_1G_0E_1-N_2G_0E_2 \tag{43}$$

となる. さらに, (35) においても z^0 の項に注目すると,

$$v_1\partial_{v_1}G_0=B_1G_0, v_2\partial_{v_2}G_0=B_2G_0, \widehat{v}_1\partial_{\widehat{v}_1}G_0=\widehat{B}_1G_0, \widehat{v}_2\partial_{\widehat{v}_2}G_0=\widehat{B}_2G_0$$

が分かる. これらを (43) に代入すると,

$$(v_1B_1+v_2B_2+\widehat{v}_1\widehat{B}_1+\widehat{v}_2\widehat{B}_2)G_0=(N_1+N_2)E_3G_0-G_0(N_1E_1+N_2E_2)$$

が成り立つ. 右から G_0^{-1} をかければ,

$$v_1B_1+v_2B_2+\widehat{v}_1\widehat{B}_1+\widehat{v}_2\widehat{B}_2+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-N_1-N_2\end{pmatrix}=G_0\begin{pmatrix}-N_1&0&0\\0&-N_2&0\\0&0&0\end{pmatrix}G_0^{-1} \tag{44}$$

が得られる. また, 相似性 $P(\lambda u_1,\lambda v_1)=\begin{pmatrix}\lambda^{\theta_1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P\begin{pmatrix}\lambda^{-\theta_1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ において, $P=W^{-1}\overline{W}$ とし, z の正べきのみ考えると,

$$\overline{W}(\lambda u_1,\lambda v_1)=\begin{pmatrix}\lambda^{\theta_1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overline{W}\begin{pmatrix}\lambda^{-\theta_1}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{45}$$

となる. λ で偏微分し, $\lambda=1$ を代入し, さらに (39) を用いれば,

$$(u_1+zv_1)\partial_{u_1}+v_1B_1\overline{W}=\theta_1E_1\overline{W}-\theta_1\overline{W}E_1$$

を得る. ここで $\overline{W}$ は $z=-\dfrac{u_1}{v_1}$ で正則であると仮定し, $\overline{W}\left(z=-\dfrac{u_1}{v_1}\right)=G_1$ とおくと

$$v_1B_1-\theta_1E_1=-\theta_1G_1E_1G_1^{-1} \tag{46}$$

を得る. 同様にして,

$$v_2B_2-\theta_2E_1=-\theta_2G_2E_1G_2^{-1},\quad \widehat{v}_1\widehat{B}_1-\widehat{\theta}_1E_2=-\widehat{\theta}_1\widehat{G}_1E_2\widehat{G}_1^{-1},\quad \widehat{v}_2\widehat{B}_2-\widehat{\theta}_2E_2=-\widehat{\theta}_2\widehat{G}_2E_2\widehat{G}_2^{-1} \tag{47}$$

を得る. これらを (41) に代入すれば,

$$z\partial_z\Psi=\left\{\begin{pmatrix}\theta_1+\theta_2&0&0\\0&\widehat{\theta}_1+\widehat{\theta}_2&0\\0&0&-N_1-N_2\end{pmatrix}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\theta_iu_iG_iE_1G_i^{-1}}{v_iz+u_i}-\sum_{i=1}^{2}\frac{\widehat{\theta}_i\widehat{u}_i\widehat{G}_iE_2\widehat{G}_i^{-1}}{\widehat{v}_iz+\widehat{u}_i}\right\}\Psi \tag{48}$$

を得る．ここで，$\dfrac{u_1}{v_1}=\dfrac{\widehat{u}_1}{\widehat{v}_1}=-1$, $\dfrac{u_2}{v_2}=-t$, $\dfrac{\widehat{u}_2}{\widehat{v}_2}=-\widehat{t}$, とおき，改めて $\mathcal{A}_1=\theta_1 G_1 E_1 G_1^{-1}$, $\mathcal{A}_t=\theta_2 G_2 E_1 G_2^{-1}$, $\widehat{\mathcal{A}}_1=\widehat{\theta}_1\widehat{G}_1 E_2\widehat{G}_1^{-1}$, $\widehat{\mathcal{A}}_2=\widehat{\theta}_2\widehat{G}_2 E_2\widehat{G}_2^{-1}$ とし，さらに

$$\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_t+\widehat{\mathcal{A}}_1+\widehat{\mathcal{A}}_t=(\theta_1+\theta_2)\,E_1+\left(\widehat{\theta}_1+\widehat{\theta}_2\right)E_2-(N_1+N_2)\,E_3$$

とおけば $\mathcal{A}_0=-G_0(N_1E_1+N_2E_2)G_0^{-1}$ となる．よって (48) は，

$$\begin{aligned} z\quad \partial_z\Psi &= \left\{(\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_t+\widehat{\mathcal{A}}_1+\widehat{\mathcal{A}}_t)+\frac{\mathcal{A}_1}{z-1}+\frac{t\mathcal{A}_t}{z-t}+\frac{\widehat{\mathcal{A}}_1}{z-1}+\frac{\widehat{t}\widehat{\mathcal{A}}_t}{z-\widehat{t}}\right\}\Psi \\ \Longleftrightarrow\qquad \partial_z\Psi &= \left\{\frac{\mathcal{A}_0}{z}+\frac{\mathcal{A}_1}{z-1}+\frac{\mathcal{A}_t}{z-t}+\frac{\widehat{\mathcal{A}}_1}{z-1}+\frac{\widehat{\mathcal{A}}_t}{z-\widehat{t}}\right\}\Psi \end{aligned} \tag{49}$$

となる．ここで $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_t$, $\widehat{\mathcal{A}}_1$, $\widehat{\mathcal{A}}_t$ についての重要な値を下記の表にまとめておく:

	$\mathcal{A}_0$	$\mathcal{A}_1$	$\mathcal{A}_t$	$\widehat{\mathcal{A}}_1$	$\widehat{\mathcal{A}}_t$
det	0	0	0	0	0
tr	$-N_1-N_2$	θ_1	θ_2	$\widehat{\theta}_1$	$\widehat{\theta}_2$
固有値	$-N_1$, $-N_2$, 0	θ_1, 0, 0	θ_2, 0, 0	$\widehat{\theta}_1$, 0, 0	$\widehat{\theta}_2$, 0, 0

こうして得られた系は，[7] で与えられているハミルトン系の 1 つである．[4, 7] での他のハミルトン系を今回のようなアプローチで扱えるかどうかは，今後の課題である．

謝辞

線形問題 (49) と論文 [7] との関係は，鈴木貴雄さんにご教示いただきました．ここで改めて感謝します．

参考文献

[1] L.J. Mason and N.M.J. Woodhouse, *Integrability, self-duality and twistor theory*, Clarendon Press, Oxford, 1996

[2] 筧三郎・菊地哲也，AKNS-ASDYM 階層とパンルヴェ方程式, 数理解析研究所講究録 **1662,** 京都大学 (2009), 195–210

[3] H.Sakai, Isomonodromic deformation and 4-dimentional Painlevé type equations, *preprint*, UTMS 2010-17

[4] T. Suzuki and K. Fuji, Higher arder Painlevé systems of type A, Drinfeld-Sokolov hierarchies and Fuchsian systems, *RIMS kokyûroku Bessatsu* **B30** (2012) 181–208

[5] 高崎金久，ツイスターの世界 – 時空・ツイスター空間・可積分系 –，共立出版，2005

[6] M.Jimbo and T.Miwa, Monodromy perserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II, *Physica* **2D** (1981), 407–448

[7] T. Tsuda, UC hierarchy and monodromy preserving deformation, *J. reine angew. Math.* **690** (2014), 1–34.