九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

例外型 Hermite 多項式の零点について

羅, 宇
京都大学情報学研究科

https://doi.org/10.15017/1832819

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.111-118, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 18 (pp. 111 - 118)

例外型 Hermite 多項式の零点について

羅 宇（LUO Yu）

（Received 15 January 2017; Accepted 1 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

例外型 Hermite 多項式の零点について

京都大学情報学研究科　　羅 宇 (LUO Yu)

概要

例外型直交多項式は，古典直交多項式の Darboux 変換により得られ，多項式列に次数の欠けを許すものである．本報告では，例外型 Hermite 多項式の零点に関する Stieltjes-Calogero 型関係式を導出し，そこからある静電気モデルとの関係を示す．

1　はじめに

量子力学において最も重要な方程式の一つである Shrödinger 方程式のポテンシャルが特定の形をとる場合，古典直交多項式の微分方程式と対応づけることで解析的に解けることが知られている [4]．最近の研究で発見された例外型直交多項式は古典直交多項式に有限回の Darboux 変換を施すことにより得られている [4, 10, 1]．例外型直交多項式は古典直交多項式と同様に線形二階微分方程式を満たし，ある重み関数のもとでの直交性を有する多項式列でありながら次数の意味で一般化がなされている．

例外型直交多項式は新しい可解な量子力学モデルの導出や，ランダム行列理論への応用などが試みられており，今後数理物理において重要な役割を果たしていくものと期待されている [6, 4, 5, 10]．また例外型直交多項式の数学的性質についても研究が盛んに行われている．例えば，例外型直交多項式の分類に関する研究 [5] や，例外型直交多項式の零点についての研究 [6] などがある．これらの研究は，古典直交多項式における重要な性質が例外型直交多項式においても成り立つか，という点に焦点があてられている．

本報告では，例外型 Hermite 多項式の零点 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について，

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_i)^m}$$

の値を調べ，その結果を用いてある多粒子系とのつながりを示す．

2　例外型 Hermite 多項式

本節では [6, 4] に基づいて例外型 Hermite 多項式の定義や重要な性質を説明する．まず，例外型 Hermite 多項式に関する定義を与える．

定義 2.1. 整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ について，r は偶数であり，$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_r$ かつ $\lambda_{2i-1} = \lambda_{2i}$, $i = 1, \ldots, r/2$ を満たすとき，例外型 Hermite 多項式は

$$H_n^{(\lambda)} := \mathrm{Wr}[H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2+1}, \ldots, H_{\lambda_r+r-1}, H_{n-|\lambda|+r}], \quad n - |\lambda| + r \in \mathbb{N} \backslash \{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_r + r - 1\},$$

で与えられる．ただし，$|\lambda| = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i$，Wr はロンスキー行列を示し，$H_k$ は k 番目の Hermite 多項式である．

この定義から明らかに $\deg H_n^{(\lambda)}(z) = n$ が分かる．また，例外型 Hermite 多項式の重み関数は

$$\omega_\lambda(z) = \frac{e^{-z^2}}{H_\lambda^2(z)}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

であり，$H_\lambda(z)$ は次のロンスキー行列

$$H_\lambda = \mathrm{Wr}[H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2+1}, \ldots, H_{\lambda_r+r-1}]$$

で与えられ，$\deg H_\lambda(z) = |\lambda|$．整数列 λ の決め方により，$H_\lambda(z)$ は実軸に零点をもたないと知られているので [4]，$\omega_\lambda(z)$ の正定性 (positive-definiteness) が確認できる．こうして，例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(x)$ は重み関数 $\omega_\lambda(z)$ により直交性を有する：

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i^{(\lambda)}(x) H_j^{(\lambda)}(x) \omega_\lambda(x) dx = \delta_{ij} \sqrt{\pi} 2^j j! p_\lambda^2(j). \tag{2.1}$$

ここで，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ，

$$p_\lambda(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2 + 1) \cdots (x - \lambda_r - r + 1).$$

例外型 Hermite 多項式が満たす線形二階微分方程式が知られている：

命題 2.2. 例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(z)$ は次の固有値問題の固有関数である．

$$T_\lambda[H_n^{(\lambda)}(z)] = 2(|\lambda| - n) H_n^{(\lambda)}(z), \quad n - |\lambda| + r \in \mathbb{N} \backslash \{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_r + r - 1\},$$

ただし，

$$T_\lambda := \partial^2 - 2\big(z + \frac{H'_\lambda(z)}{H_\lambda(z)}\big)\partial + \frac{H''_\lambda(z)}{H_\lambda(z)} + 2z \frac{H'_\lambda(z)}{H_\lambda(z)}.$$

また，古典直交多項式と違って，例外型直交多項式は実の零点だけではなく複素数の零点ももっている．例えば，例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(z)$ は $n - |\lambda| + \big|\{j = 1, \ldots, r | \lambda_j + j - (r+1) \geq n - |\lambda|\}\big|$ 個の実の零点をもつと知られている．特に，$n \geq |\lambda| + \lambda_r$ を満たすときに $H_n^{(\lambda)}(z)$ は $n - |\lambda|$ 個の実の零点と $|\lambda|$ 個の複素数の零点を有する．

3 Stieltjes-Calogero 型関係式

前節では例外型 Hermite 多項式が満たす二階微分方程式やその零点に関する予備知識を紹介した．これを活用して本節では線形二階微分方程式の多項式解の零点に関する Stieltjes-Calogero 型関係式を導出する．その結果を利用して例外型 Hermite 多項式の零点に関する Stieltjes-Calogero 型関係式を導く．

Stieltjes が 1885 年に，ある静電モデルを研究する中で Hermite 多項式の零点が

$$\sum_{k=1, k \neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} = x_j$$

を満たすことにより，Hermite 多項式の零点がその平衡配位となることを示した [9]．約百年後に Calogero らは一次元可積分多体系の観点から，零点と平衡配位の関係を再考した [2, 3, 1]．このような歴史的背景から定式化された Stieltjes-Calogero(SC) 型関係式は以下のように定義されている:

$$S_{m,j} := \sum_{k=1, k \neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^m} = f(x_j).$$

ただし，$f(x_j)$ は x_j に関する関数，$j \neq k$ のとき，$x_j \neq x_k$ が成り立つ．特に，線形二階微分方程式の多項式解の零点に関する SC 型関係式が求められた [7]．

定理 3.1. 線形二階微分方程式

$$A_0(x) y''(x) + A_1(x) y'(x) + A_2(x) y(x) = 0 \tag{3.1}$$

の多項式解 $y(x)$ が単純零点 $x_1, \ldots, x_n$ をもつと仮定し，SC 型関係式は

$$S_{1,j} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} = -\frac{A_1(x_j)}{2A_0(x_j)}, \tag{3.2}$$

$$S_{2,j} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} = \frac{2[A_0'(x_j) + A_1(x_j)]S_{1,j} + [A_1'(x_j) + A_2(x_j)]}{3A_0(x_j)} + S_{1,j}^2, \tag{3.3}$$

$$S_{3,j} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^3} = -\frac{1}{8A_0(x_j)}\Big\{3[2A_0'(x_j) + A_1(x_j)][S_{1,j}^2 - S_{2,j}] + 2[A_0''(x_j) + 2A_1'(x_j) + A_2(x_j)]S_{1,j}\Big\} + \frac{3}{2}S_{1,j}S_{2,j} - \frac{1}{2}S_{1,j}^3, \tag{3.4}$$

で与えられる．ただし，$A_0(x)$, $A_1(x)$, $A_2(x)$ は x について微分可能な関数である．

証明. まず，方程式 (3.1) の多項式解 $y(x)$ の零点がすべて単純であると仮定する：

$$y(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i).$$

ここで，$y_j(x) = y(x)/(x - x_j)$ とおくと，

$$S_{1,j} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} = \frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)} \tag{3.5}$$

が得られる．さらに，式 (3.5) の両端に x_j について $m-1$ 回微分することで，

$$S_{m,j} = \sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{y_j'(x)}{y_j(x)}\right)^{(m-1)}\Big|_{x=x_j} \tag{3.6}$$

が成立する．また，$y^{(r)}(x_j) = ry_j^{(r-1)}(x_j)$ であるので，方程式 (3.1) は $x = x_j$ において

$$2A_0(x_j)y_j'(x_j) + A_1(x_j)y_j(x_j) = 0$$

となる．よって，

$$S_{1,j} = \frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)} = -\frac{A_1(x_j)}{2A_0(x_j)}$$

が分かる．(3.1) を x について微分すると，

$$A_0(x)y'''(x) + (A_0'(x) + A_1(x))y''(x) + (A_1'(x) + A_2(x))y'(x) + A_2'(x)y(x) = 0,$$

となり，同様に $x = x_j$ において，次のように書き換える:

$$3A_0(x_j)y_j''(x_j) + 2(A_0'(x_j) + A_1(x_j))y_j'(x_j) + (A_1'(x_j) + A_2(x_j))y_j(x_j) = 0.$$

両端に $y_j(x_j)$ を割って，

$$3A_0(x_j)\frac{y_j''(x_j)}{y_j(x_j)} + 2(A_0'(x_j) + A_1(x_j))\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)} + (A_1'(x_j) + A_2(x_j)) = 0, \tag{3.7}$$

になる．

$$\frac{y_j''(x_j)}{y_j(x_j)} = \left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right)' + \left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right)^2 = -S_{2,j} + S_{1,j}^2$$

により式 (3.7) は

$$3A_0(x_j)(-S_{2,j} + S_{1,j}^2) + 2(A_0'(x_j) + A_1(x_j))S_{1,j} + (A_1'(x_j) + A_2(x_j)) = 0,$$

と書ける．従って，(3.3) が導かれる．同様，(3.1) を x について 2 回微分すると，

$$\frac{y_j'''(x_j)}{y_j(x_j)} = \left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right)'' + 3\left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right)'\left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right) + \left(\frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}\right)^3 = 2S_{3,j} - 3S_{2,j}S_{1,j} + S_{1,j}^3$$

により (3.4) も得られる．このように，$S_{m,j}$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ がすべて求められる． □

以上の結果を使って，例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(x)$ の零点に関する SC 型関係式が得られる．$H_n^{(\lambda)}(x)$ が満たす線形二階微分方程式 (2.2) により，

$$A_0(x) = 1, \quad A_1(x) = -2\big(x + \frac{H_\lambda'(x)}{H_\lambda(x)}\big), \quad A_2(x) = \frac{H_\lambda''(x)}{H_\lambda(x)} + 2x\frac{H_\lambda'(x)}{H_\lambda(x)} + 2n - 2|\lambda|,$$

(3.2), (3.3), (3.4) に代入すると次の結果がある．

系 3.2. 例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(x)$ は単純零点 $x_1, \ldots, x_n$ をもつとき，以下の関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{x_j - x_k} &= x_j + \frac{H_\lambda'(x_j)}{H_\lambda(x_j)}, \\
\sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} &= \frac{2}{3}(n-1-r) - \frac{1}{3}\left[x_j^2 + \frac{H_\lambda''(x_j)}{H_\lambda(x_j)} - \left(\frac{H_\lambda'(x_j)}{H_\lambda(x_j)}\right)^2\right], \\
\sum_{k=1,k\neq j}^{n} \frac{1}{(x_j - x_k)^3} &= \frac{1}{2}x_j.
\end{aligned}$$

注意 3.3. 上記の関係式の中で，特に 3 番目 ($S_{3,j}$) については Hermite 多項式の零点においても同じような式が成り立つ．これらの関係式は一次元可積分多体系の平衡配位の問題に表れる [1, 2].

4 例外型 Hermite 多項式と静電平衡問題

前節では，線形二階微分方程式の多項式解の零点が満たす SC 型関係式を示した．それを用いて例外型 Hermite 多項式の零点に関する SC 型関係式が得られる．そこで，本節ではこの結果を用いて例外型 Hermite 多項式と静電平衡問題との関係を示す．

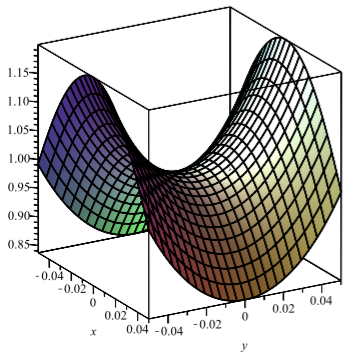
古典直交多項式が満たす二階微分方程式の導出は，ある静電平衡問題と関連づける，というのはよく知られている事実である [8, chapter 6.7]．この事実は次の関数[*1] の最大値を求めることにより示される：

$$T_\omega(X) := T_\omega(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \omega(x_i) \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)^2. \tag{4.1}$$

注意 4.1. $\log(T_\omega^{-1})$ は，可動電荷間の反発力が対数ポテンシャルから生じる場合の多粒子系のエネルギー関数と解釈できる．関数 T_ω が最大値を当たる点において，エネルギーが最小，静電平衡状態となる．

例外型直交多項式の場合においても同様なことが成り立つがどうか，というのは自然に生じる問題である．今回では例外型 Hermite 多項式についてこれを調べる．ここで注意すべきなのは，例外型 Hermite 多項式は複素数の零点を有し，そこで $T_\omega(X)$ の値が複素数となる．具体的に，例外型 Hermite 多項式の零点の近傍に $T_\omega(X)$ の挙動を調べるために，単値関数 $f(z)$ の $z = 0$ の近傍挙動を図 1 で示す．但し，

$$f(z) = \left|\frac{T_\omega(z_1 + z, \cdots, z_n + z)}{T_\omega(z_1, \cdots, z_n)}\right|, \quad \omega(x) = \frac{e^{-^2}}{H_\lambda^2(x)},$$



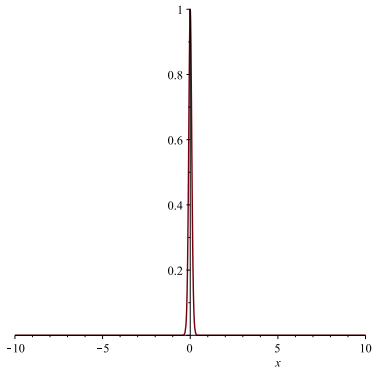


図 1　整数列 $\lambda = (1,1,1,1)$ に付随する例外型 Hermite 多項式 $H_8^{(1,1,1,1)}(z)$ の零点 $z_1,\ldots,z_8$ において，$f(z)$ の $z=0$ の近傍挙動：$z \in \mathbb{C}$(左) と $z \in \mathbb{R}$(右).

$z_1,\cdots,z_n$ を例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(z)$ の零点とする．

図 1 により，$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ のときに $z=0$ は $f(z)$ の鞍点であるが，$z \in \mathbb{R}$ のときに $z=0$ は $f(z)$ の最大値点となる．確かに，最大絶対値の原理により (複素数平面上に)$|T_\omega(X)|$ の最大値は境界でしか得られない．従って，関数 $|T_\omega(X)|$ にそれぞれの変数の虚部を $z_1,\ldots,z_8$ の虚部に固定して実部だけを動かすと，$|T_\omega(X)|$ の最大値は $z_1,\ldots,z_8$ で当たる．任意の例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(z)$ について，$z_1 = x_1,\ldots,z_{n-|\lambda|} = x_{n-|\lambda|}$ をその実の零点とし，$z_{n-|\lambda|+1} = x_{n-|\lambda|+1} + iy_{n-|\lambda|+1},\ldots,z_n = x_n + iy_n$ をその複素数の零点とする．$\omega(z) = e^{-z^2}/H_\lambda^2(z)$ の場合，関数 $|T_\omega^1(U)| = |T_\omega^1(u_1,\ldots,u_n)| := |T_\omega(u_1,\ldots,u_{n-|\lambda|},u_{n-|\lambda|+1}+iy_{n-|\lambda|+1},\ldots,u_n+iy_n)|$ が $x_1,\ldots,x_n$ で最大になる十分条件を次の定理で示す．

定理 4.2. $\omega(z) = e^{-z^2}/H_\lambda^2(z)$ とし，$H_\lambda(z)$ が以下の条件を満たすとき，$|T_\omega^1(U)|$ の最大値が例外型 Hermite 多項式 $H_n^{(\lambda)}(z)$ の零点の実部 $x_1,\ldots,x_n$ で得られる．

$$\big(\log H_\lambda(x)\big)'' + 1 \geq 0,\quad x \in (-\infty,\infty) \tag{4.2}$$

$$\big(\log H_\lambda(x_i)\big)'' + 1 > \sum_{j=n-|\lambda|+1}^{n} \frac{1}{(x_i-x_j)^2},\quad 1 \leq i \leq n-|\lambda|, \tag{4.3}$$

$$\big(\log H_\lambda(x_i+iy_i)\big)'' + \big(\log H_\lambda(x_i-iy_i)\big)'' + 2 > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{2}{(x_i-x_j)^2},\quad n-|\lambda|+1 \leq i \leq n, \tag{4.4}$$

証明. まず，系 3.2 により，$x_1,\ldots,x_n$ において $|T_\omega^1(U)|^2 = T_\omega^1(U)\overline{T_\omega^1(U)}$ の一階微分が 0 である：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \log|T_\omega^1(U)|^2}{\partial u_i}\Big|_{u_i=x_i} &= 2\frac{\omega'(x_i)}{\omega(x_i)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n-|\lambda|} \frac{4}{x_i-x_j} + \sum_{j=n-|\lambda|+1}^{n} \frac{4(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)^2+y_j^2},\quad 1 \leq i \leq n-|\lambda|,\\
&= -4x_i - 4\frac{H_\lambda'(x_i)}{H_\lambda(x_i)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{4}{z_i-z_j} - \sum_{j=n-|\lambda|+1}^{n} \frac{4iy_j}{(x_i-x_j)^2+y_j^2},\\
&= -4z_i - 4\frac{H_\lambda'(z_i)}{H_\lambda(z_i)} + 4\left(z_j + \frac{H_\lambda'(z_j)}{H_\lambda(z_j)}\right) - \sum_{j=n-|\lambda|+1}^{n} \frac{4iy_j}{(x_i-x_j)^2+y_j^2} = 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \log|T_\omega^1(U)|^2}{\partial u_i}\Big|_{u_i=x_i} = \frac{\omega'(x_i+iy_i)}{\omega(x_i+iy_i)} + \frac{\omega'(x_i-iy_i)}{\omega(x_i-iy_i)} + \sum_{j=1}^{n-|\lambda|} \frac{4(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)^2+y_i^2} + \sum_{j=n-|\lambda|+1,j\neq i}^{n} \frac{4(x_i-x_j)}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2}$$

[*1] 関数 T_ω は [8, chapter 6.7] の関数 T のもとで書き直したものである．

$$= 2\frac{\omega'(x_i+iy_i)}{\omega(x_i+iy_i)} + \sum_{j=1,j\neq i}^{n} \frac{4}{z_i-z_j} + \frac{\omega'(x_i-iy_i)}{\omega(x_i-iy_i)} - \frac{\omega'(x_i+iy_i)}{\omega(x_i+iy_i)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-|\lambda|} \frac{4iy_i}{(x_i-x_j)^2+y_i^2} + \sum_{j=n-|\lambda|+1,j\neq i}^{n} \frac{4i(y_i-y_j)}{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2} = 0, \quad n-|\lambda|+1 \leq i \leq n.$$

また，ヘッセ行列 $H = \left(\partial^2 \log|T_\omega^1(U)|^2/\partial u_i \partial u_j\right)_{i,j=1,\ldots,n}$ は対称であり，式 (4.3), (4.4) が満たされば H は対角優位かつすべての対角要素が正となる．従って，H は正定行列，$x_1,\ldots,x_n$ において $|T_\omega^1(U)|^2$ の極大値が得られる．さらに，式 (4.2) により $-\log\omega(z)$ の凸性が示され，関数 $|T_\omega^1(U)|^2$ の極大値の唯一性が保証できる．境界 $(-\infty,\infty)$ において $|T_\omega^1(U)|$ は 0 に落ち，最大値が $x_1,\ldots,x_n$ でしか得られない． □

5 結論

本報告では, 例外型 Hermite 多項式の零点に関する Stieltjes-Calogero 型関係式を導出し，それを用いて例外型 Hermite 多項式の重み関数が含めるエネルギー関数の最大値との関係が示された．本報告では詳しく述べていないが，同様な結果は例外型 Laguerre と例外型 Jacobi 多項式の場合も得られる．しかしながら，例外型直交多項式の零点の応用などについてまだ解明されていない部分が多い．そのため，古典直交多項式の既存の応用分野への拡張，特に一次元可積分多体系との関連付けと多項式補間などについて調べていく必要があると考えられる．

参考文献

[1] S. Ahmed, M. Bruschi, F. Calogero, M.A. Olshanetsky, A.M. Perelomov, *Properties of zeros of the classical polynomials and of the Bessel functions*, Nuovo Cimento, 49B, 173-199, 1979.

[2] F. Calogero, *On the zeros of Hermite polynomials*, Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985), 20(14), 489-490, 1977.

[3] F. Calogero, *Equilibrium configuration of the one-dimensional n-body problem with quadratic and inversely quadratic pair potentials*, Lettere Al Nuovo Cimento (1971-1985), 20(7), 251-253, 1977.

[4] D. Gómez-Ullate, Y. Grandati, R. Milson, *Rational extensions of the quantum harmonic oscillator and exceptional Hermite polynomials*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 47(1), 015203, 2013.

[5] M. García-Ferrero, D. Gómez-Ullate, R. Milson, *A Bochner type classification theorem for exceptional orthogonal polynomials*, arXiv:1603.04385v1[math.CA], 2016.

[6] A. B. Kuijlaars and R. Milson, *Zeros of exceptional Hermite polynomials*, Journal of Approximation Theory, 200, 28-39, 2015.

[7] A. Ronveaux and M. E. Muldoon, *Stieltjes sums for zeros of orthogonal polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 57(1), 261-269, 1995.

[8] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society colloquium publications, 23, 1939.

[9] T. J. Stieltjes, *Sur quelques théoremes d'algebre*, Compltes Rendus de l'Académie des Science, Paris, 100, 439-440, 1885.

[10] R. Sasaki, S. Tsujimoto, A. Zhedanov, *Exceptional Laguerre and Jacobi polynomials and the corresponding potentials through Darboux-Crum transformations*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43 (31) (2010): 315204.