超離散パーマネントとMax Plus 線形方程式

新澤, 信彦
西日本工業大学

https://doi.org/10.15017/1832818

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.105-110, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 17 (pp. 105 - 110)

超離散パーマネントと Max Plus 線形方程式

新澤 信彦（SHINZAWA Nobuhiko）

（Received 27 January 2017; Accepted 25 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

超離散パーマネントと Max Plus 線形方程式

新澤 信彦 (Nobuhiko Shinzawa)

西日本工業大学

概 要

Max Plus の連立線形方程式から変数を消去しようとすると、方程式が極端に複雑になってしまう事が多い。ここでは、あるクラスの Max Plus 線形方程式では、その様な複雑化が起らず、可解条件を超離散パーマネント (Max Plus での行列式) を使って簡潔に表せる事を示す。

1 Introduction

ソリトンセルオートマトンは、差分可積分方程式の超離散極限を取る事で得られ、その過程で足し算とかけ算は、最大値を取る Max と足し算とにそれぞれ移される。この対応関係を使ってソリトンセルオートマトンの色々な性質を明らかに出来るが、差分可積分方程式で言える事の全てが、ソリトンセルオートマトンでも言える訳ではない。Max 演算には逆演算が存在しないからである。線形方程式を連立させて、変数を消去する事も、Max Plus 方程式では簡単でない。

これまでの研究では、ソリトンセルオートマトンの Bäcklund 変換を研究し、その過程で 2 変数 2 連立 Max Plus 線形方程式が有限な解を持つ為の条件を、行列式に相当するもの (超離散パーマネント) で表せる事を明かにした [2]。この結果を一般化して、Max Plus 線形方程式が解を持つ為の条件を明らかにしたい。しかしながら、一般的 Max Plus 線形方程式から変数を消去しようとすると、条件が複雑になってしまって、見通しが立たない。ここでは、Max Plus 連立方程式の中でも基本的と思われる以下の 3 個のクラスの Max Plus 線形方程式を取り上げ、これらの方程式が有限な解を持つ為の必要十分条件を調べる。

Case 1)

$$a_{ii}+x_i=\max_{k=1,\ \cdots,\ n}(a_{ik}+x_k),\ (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{1}$$

Case 2)

$$\max_{\substack{k\neq i\\ k=1,\ \cdots,\ n}}(a_{ik}+x_k)=\max_{k=1,\ \cdots,\ n}(a_{ik}+x_k),\ (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{2}$$

Case 3)

$$a_{ii}+x_i=\max_{\substack{k\neq i\\ k=1,\ \cdots,\ n}}(a_{ik}+x_k),\ (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{3}$$

以下では、係数の内の対角成分 $a_{ii},\ i=1,\ ,\ \cdots,\ n$ が 0 である事を仮定する。

$$a_{ii}=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

係数を $a_{ij}\to a_{ij}-a_{ii}$ と置き換えれば、容易に a_{ii} を再現出来るからである。

2　2変数2連立Max Plus方程式の可解条件

まずは解を持つ為の条件を調べる為の基本的な道具として、複数の方程式から1個の変数を消去する為の、以下の定理を紹介したい。

Theorem 1 *[3] 2変数 $x,\ y$ に対する n 連立 Max Plus 線形方程式*

$$\max(a_{i1}+x, a_{i2}+y) = \max(\tilde{a_{i1}}+x, \tilde{a_{i2}}+y),\ (i=1,\ \cdots,\ n) \tag{4}$$

が、有限な解を持つのは、係数 $a_{ij},\ \tilde{a_{ij}}$ が以下の条件を満す時であり、かつその時に限る。

$$\begin{aligned}&\max(a_{i1}+\tilde{a_{i2}}, \tilde{a_{i1}}+a_{i2})\\ &\quad = \max(a_{i1}+a_{i2},\ \tilde{a_{i1}}+a_{i2}, a_{i1}+\tilde{a_{i2}}, \tilde{a_{i1}}+\tilde{a_{i2}}),\ (i=1,\ \cdots,\ n)\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\max(a_{i1}+a_{j2},\ \tilde{a_{i1}}+\tilde{a_{j2}}, a_{i2}+\tilde{a_{j1}}, \tilde{a_{i2}}+a_{j1})\\ &\quad = \max(a_{i1}+\tilde{a_{j2}}, \tilde{a_{i1}}+a_{j2}, a_{i2}+a_{j1}, \tilde{a_{i2}}+\tilde{a_{j1}}),\ (i,j=1,\ \cdots,\ n).\end{aligned} \tag{6}$$

□

ここで、(6) 式は (4) の第 i 式と第 j 式を連立させて出て来る条件であり、2変数2連立同次線形方程式の時の行列式が0になるという条件に相当するものである。(5) 式は (4) のそれぞれの式が $x,\ y$ に対して解を持つ為の条件である。Max Plus の線形方程式では、片方の辺がもう片方の辺より恒等的に大きくなるという事が起こり得るので、ひとつの方程式が解ける為にも条件が必要である。

(4) 式で、両辺から y を引き、$z=x-y$ と置くと、

$$\max(a_{i1}+z, a_{i2}) = \max(\tilde{a_{i1}}+z, \tilde{a_{i2}}),\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

の様に表せるから、この結果を使うと、複数の方程式からひとつづつ変数を消去していく事が出来る。

3　Case 1

しかしながら、一般の場合にこの方法を適用すると、変数をひとつ消去する度に方程式の数は爆発的に増加してしまい、係数の次数も指数関数的に増加してしまって収集がつかない。(1), (2), (3) ではその様な爆発は起らず、方程式の形を変えずに、サイズのみを小くしていく事が可能である。

その結果を述べる前に、いくつかの記号を導入したい。

まず、超離散パーマネントを以下の様に定義しよう。

$$|A| = \max_{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n \in S_n} (a_{1i_1}+a_{2i_2}+\cdots+a_{ni_n})$$

右辺の max は行列式同様、n 次の順列全てについての和である。

また、もととなる行列 A の $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r$ 行と、$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r$ 列のみから作った小行列の超離散パーマネントを

$$\underset{\{i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_r\}}{|\ A\ |}$$

の様に表す。

更に、以下の様な記号も使う。

$$a_{ij}^{(r)}=\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i\ n-r+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n-r+1\ j} & a_{n-r+1\ n-r+1} & \cdots & a_{n-r+1\ n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj} & a_{n\ n-r+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ (i,\ j<n-r+1)$$

$r=0$ の時は、$a_{ij}^{(0)}=a_{ij}$ とする。

これらの記号を使うと、(1) 式の Max Plus 線形方程式に対する変数消去は以下の様になる。

Lemma 1 *[3]* 係数が

$$\underset{\{i,\ n-r+1,\ \cdots,\ n\}}{|\ A\ |}=0,\quad (i=1,2,\cdots,\ n-r), \tag{7}$$

を満たし、かつ、方程式

$$a_{ii}^{(r)}+x_i=\max_{k=1,2,\cdots,\ n-r}\left(a_{ik}^{(r)}+x_k\right),\quad (i\le n-r), \tag{8}$$

に有限な解が存在する為の必要十分条件は、係数が

$$\underset{\{i,\ n-r,\ \cdots,\ n\}}{|\ A\ |}=0,\quad (i=1,2,\cdots,\ n-r-1), \tag{9}$$

を満たし、かつ、方程式

$$a_{ii}^{(r+1)}+x_i=\max_{k=1,2,\cdots,\ n-r-1}\left(a_{ik}^{(r+1)}+x_k\right),\quad (i\le n-r-1), \tag{10}$$

に有限な解が存在する事である。

□

定理の中で、(8) 式と (10) 式は、通常の掛け算と足し算の場合の結果にそのまま対応している。線形方程式で変数を次々に消去していくと、得られた方程式の係数はもとの方程式の係数の小行列式で表されるが、(8) 式や (10) 式に現れる係数は、そうして得られた小行列式を対応する超離散パーマネントに置き換えたものに他ならない。しかしながら、通常の線形方程式の場合とは違って、(7) や (9) の様な条件式も同時に考える必要がある。条件式と方程式をセットにして取り扱うと、変数の消去と共に方程式の数も一つずつ減っていき、更には方程式の型も変えず、再帰的に変数を消去していく事が出来る。

この補題を繰返し使い、全ての変数を消去すると、係数に対するひとつの条件式だけが残る。それは超離散パーマネントを使って、以下の様に表される。

$$|A|=0$$

係数を $a_{ij}\to a_{ij}+a_{ii}$ と置き換えて、対角成分を復元すると、以下の定理が得られる。

Theorem 2 *Max Plus* 線形方程式 *(1)* が、有限な解を持つ為の必要十分条件は、係数が

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

を満す事である。

4 Case 2

次に (2) の変数消去の方法を紹介したい。改めて、(2) の Max Plus 線形方程式を書き出そう。

$$\max_{\substack{k\neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik}+x_k) = \max_{k=1,\ \cdots,\ n}(a_{ik}+x_k),\ (i=1,\ \cdots,\ n)$$

(1) の場合には、それぞれの方程式で両辺に共通して含まれる変数は 1 個だけで、i 番目の式の両辺には x_i が含まれていた。(2) の場合には、i 番目の方程式で右辺にしか含まれていない変数は x_i だけである。その意味で Case 2 は、Case 1 の対極になっている。又、(1) の解集合は凸包であったが、(2) の場合は全ての角が凹であるような図形に対応しており、その意味でも対極になっている。

この場合にも、(1) と同様、方程式の形を変えず再帰的に変数を消去していく事が出来るが、条件と方程式は論理和で結ばれる。補題 1 で条件式と方程式が論理積で結ばれていた所を、全て論理和に置き換えた形で、変数を消去していく事が可能である。

$$\nmid A \nmid$$

を $|A|$ から、対角成分のみの和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ を除いたものとすると、結果は以下の様になる。

Lemma 2 「係数が

$$\bigvee_i \quad |A|_{\{i,\ n-r+1,\ \cdots,\ n\}} = \nmid A \nmid_{\{i,\ n-r+1,\ \cdots,\ n\}}, \quad (i=1,2,\cdots,\ n-r),$$

を満すか、又は、方程式

$$\mathop{max}_{\substack{k\neq i \\ k=1,2,\ \cdots,\ n-r}} \left(a_{ik}^{(r)}+x_k\right) = \max_{k=1,2,\cdots,\ n-r}\left(a_{ik}^{(r)}+x_k\right),\ (i\leq n-r),$$

に有限な解が存在する」事に対する必要十分条件は、「係数が

$$\bigvee_i \quad |A|_{\{i,\ n-r,\ \cdots,\ n\}} = \nmid A \nmid_{\{i,\ n-r,\ \cdots,\ n\}}, \quad (i=1,2,\cdots,\ n-r-1),$$

を満すか、又は、方程式

$$\mathop{max}_{\substack{k\neq i \\ k=1,2,\ \cdots,\ n-r-1}} \left(a_{ik}^{(r+1)}+x_k\right) = \max_{k=1,2,\cdots,\ n-r-1}\left(a_{ik}^{(r+1)}+x_k\right),\ (i\leq n-r-1),$$

に有限な解が存在する」事である。□

この場合にも、補題を繰り返し使うと、全ての変数を消去する事ができ、(2) 式に解がある為の条件が得られる。

Theorem 3 *Max Plus* 線形方程式 *(2)* に有限な解がある為の必要十分条件は、係数が、

$$|A| = \nmid A \nmid$$

を満す事である。

5 Case 3

(3) の Max Plus 線形方程式を改めて書き出そう。

$$a_{ii} + x_i = \max_{\substack{k \neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik} + x_k),\ (i = 1,\ \cdots,\ n)$$

(1) の第 i 式では x_i のみが両辺に表れ、(2) の第 i 式では x_i のみが片方の辺にしか表れなかったが、(3) の第 i 式では x_i のみが左辺にあらわれ、そして右辺には x_i のみが存在しない。(3) の Max Plus 線形方程式は、(1) と (2) の境目に位置している様な方程式である。

実際 $x_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ が (3) 式を満たしていたとすると、

$$\begin{aligned} a_{ii} + x_i &= \max_{\substack{k \neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik} + x_k) \\ &= \max(\max_{\substack{k \neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik} + x_k),\ \max_{\substack{k \neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik} + x_k)) \\ &= \max(\max_{\substack{k \neq i \\ k=1,\ \cdots,\ n}} (a_{ik} + x_k), a_{ii} + x_i) \\ &= \max_{k=1,\ \cdots,\ n} (a_{ik} + x_k) \end{aligned}$$

となって、(1) 式、(2) 式の両方を満たしている。$x_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ が (1) 式と (2) 式を満たしていると (3) 式も満たしている事も容易に読み取れる。

従って $x_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ が (3) 式を満たしていたとすると、$0 = |A| = \nmid A \nmid$ となって、係数は

$$0 = \nmid A \nmid$$

を満さなければならない。

しかしながら、逆はただちには言えない。(1) 式に解があり、(2) 式に解があったとしても、その解が (1) と (2) の両方を満すとは限らないからである。

この場合には小行列式に相当する超離散パーマネントを作ると、両方を同時に満す解がある事を示せる。今、

$$A\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$$

をもとの行列 A の第 i 行と第 j 列を除いた行列だとし、n 個のベクトル $x^{(i)}$ を

$$x^{(i)} = \left(A\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix},\ \cdots,\ A\begin{bmatrix} i \\ n \end{bmatrix} \right),\ (i = 1,\ \cdots, n). \tag{11}$$

のように定義する。この時、$0 = \nmid A \nmid$ が満されていれば、次の事が言える [3]。

1. $x^{(i)}$ は、全ての i について (1) の解になっている。
2. ある i があって、$x^{(i)}$ は (2) の解になる。

従って、$0 = \nmid A \nmid$ が満されていれば、(3) にも解がある事が分り、これで $0 = \nmid A \nmid$ が (3) に解がある為の必要十分条件である事が分る。

再び、$a_{ij} \to a_{ij} - a_{ii}$ として、対角成分を復元すると、以下の定理が得られる。

Theorem 4 *Max Plus* 線形方程式 *(3)* に有限な解がある為の必要十分条件は、係数が

$$\nmid A \nmid = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

を満す事である。

6　先行研究との関係

Max Plus 代数や Max Plus 代数を拡張したいろいろな代数で、線形方程式に解がある為の条件が調べられている。例えば、[1] には対称化した Max Plus 代数の同次線形方程式に解がある為の必要十分条件が述べられている。その文脈で言うと、この研究での条件は totally positive な解が存在する為の必要十分条件である。

ソリトンセルオートマトンでの Bäcklund 変換を構成する為には、Max Plus の同次線形方程式に、全ての変数が有限である様な (つまり $-\infty$ になったりしない) 解がある為の必要十分条件が必要であり、この研究では (1), (2), (3) のそれぞれの式に対してこの条件を明かにした。

もっと一般的な Max Plus 線形方程式に対して、解がある為の必要十分条件を明かにする事は、今後の課題である。

参考文献

[1] M. Plus. "Linear systems in (max, +)-algebra." In Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control, Honolulu, Dec. 1990.

[2] N. Shinzawa and R. Hirota. "The Bäcklund transformation equations for the ultradiscrete KP equation" J. Phys. A: Math. Gen. (2003) **36** 4667-4675

[3] N. Shinzawa. "Ultra discrete permanent and the consistency of max plus linear equations." Linear Algebra and its Applications 506 (2016)