時間遅れをもつ常微分方程式の離散化について

松家, 敬介
武蔵野大学工学部

https://doi.org/10.15017/1832817

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.99-104, 2017-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 16 (pp. 99 - 104)

時間遅れをもつ常微分方程式の離散化について

松家 敬介（MATSUYA Keisuke）

（Received 15 January 2017; Accepted 4 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

時間遅れをもつ常微分方程式の離散化について

武蔵野大学 工学部 数理工学科　松家敬介　(MATSUYA Keisuke)

概　要

Hutchinson-Wright (以下, HW) 方程式はロジスティック方程式に時間遅れを入れた方程式であり, 生物種の数が時間遅れの効果を伴って生物種の増減に影響を及ぼす数理モデルである. HW 方程式の平衡解の安定性は時間遅れのパラメータによって変化することが知られている. 本稿では, HW 方程式の離散化の平衡解の大域的安定性と時間遅れのパラメータの関連性について議論する.

1　はじめに

$u := u(t),\ t \geq 0$ とする. 常微分方程式:

$$\frac{du}{dt} = u(1-u)\ (t \geq 0) \tag{1.1}$$

はロジスティック方程式と呼ばれており, 生物種や人口の増減の数理モデルとして知られている. 本稿では, $v := v(t),\ t \geq 0,\ T > 0$ とし, (1.1) に時間遅れを加えた常微分方程式:

$$\frac{dv}{dt} = v\{1 - v(t-T)\}\ (t \geq T) \tag{1.2}$$

の離散化について議論する. (1.2) による数理モデルは生態学者である Hutchinson [1] によって提案され, ほぼ同時期に (1.2) をはじめとする時間遅れをもつ常微分方程式の平衡解の線形安定性が Wright [5, 6] によって調べられた. この二人の名前をとって, (1.2) は Hutchinson-Wright 方程式 (以下, HW 方程式) と呼ばれる. (1.2) のような時間遅れをもつ微分方程式は解の具体的な表示をえることが一般的には困難である. したがって, 解の挙動を確認するためには数値計算が必要となる. 数値計算の手法の一つとして差分法が挙げられる. ただ, この手法を適用するためには方程式を離散化して対応する差分方程式を得る必要がある. 離散化して得られる方程式は時間遅れをもつ差分方程式, すなわち高階の差分方程式でもある. 高階の方程式になると多くの初期条件を与える必要があり, 解析も複雑になっていく. 時間遅れをもつ微分方程式の離散化を扱う上で, 方程式の形が複雑すぎないものから考えたい. このような経緯から (1.2) は, 複雑すぎないものとして適した方程式と考えられる. さらに, (1.2) の平衡解は時間遅れのパラメータによって不安定化するという性質をもっており, 平衡解の安定性を保った離散化を考えることが重要になってくる. これまでに (1.2) の離散化とその平衡解の線形安定性について (1.2) と類似した結果が得られている [7]. 本稿では, (1.2) の離散化の平衡解の大域的安定性について議論する.

本稿の構成は次の通りである. 第 2 節では (1.2) の平衡解とその安定性について概説する. 次に第 3 節で [7] に沿って (1.2) の離散化とその平衡解の線形安定性に関する定理を述べ, 第 4 節で本稿の主定理である大域的安定性に関する定理とその証明を与える. そして, 第 5 節では本稿の結論と今後の課題について述べる.

2 HW 方程式の平衡解とその安定性について

(1.2) は, $v \equiv 0$ および $v \equiv 1$ を平衡解にもつ. $v \equiv 0$ は不安定な平衡解である. これは (1.2) を $v \equiv 0$ のまわりで線形化した方程式が

$$\frac{dV}{dt} = V$$

となり, その特性方程式 $\lambda = 1$ の根の実部が正であることからわかる. また, $v \equiv 1$ の線形安定性について次の定理が成り立つ.

定理 1 ([6]) (1.2) の平衡解 $v \equiv 1$ は以下の性質をもつ.

1. $T < \pi/2$ のとき, 局所漸近安定.

2. $T > \pi/2$ のとき, 不安定.

この定理は $v \equiv 1$ の局所的安定性に関するもので, 大域的安定性については未解決問題であり, 次の予想 [6] が知られている.

予想 1 $T < \pi/2$ とする. このとき, 恒等的に 0 でない非負の初期条件における (1.2) の解 $v(t)$ に対して,

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 1$$

が成り立つ.

この予想は局所漸近安定であれば大域的にも安定であるというものである。[6] において, この予想の一部である次の命題が証明されている.

命題 1 $T < 3/2$ とする. このとき, 恒等的に 0 でない非負の初期条件における (1.2) の解 $v(t)$ に対して,

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 1$$

が成り立つ.

次節で扱う (1.2) の離散化の平衡解の大域的安定性に対してこの命題の一部の離散類似が本稿の主定理である.

3 HW 方程式の離散化とその平衡解の安定性について

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $N \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\delta > 0$ とする. 有理式を用いた常微分方程式の離散化が村田ら [3, 4] によって報告されており, この手法によって (1.2) の離散化として時間遅れをもつ差分方程式:

$$v_{n+1} = \frac{1+\delta}{1+\delta v_{n-N}} v_n \tag{3.1}$$

が得られる. 実際に, (3.1) は

$$v_{n+1} = v_n + \delta v_n (1 - v_{n-N}) + O\left(\delta^2\right) \qquad (\delta \to 0)$$

と変形でき, $v_n = v(\delta n)$, $\delta n = t$, $\delta N = T$ として極限 $\delta \to 0$ をとると (1.2) が得られる.
(3.1) に対して $N = 0$ とした差分方程式はロジスティック方程式 (1.1) の離散化として [2] で報告されているものである. この場合, 差分方程式の解を具体的に書き下すことができることも知られている.

(3.1) は $v \equiv 0$ および $v \equiv 1$ を平衡解にもつ. $v \equiv 0$ が不安定な平衡解になることは (1.2) と類似している。実際に, (3.1) を $v \equiv 0$ のまわりで線形化した方程式が, 共に

$$V_{n+1} = (1+\delta)V_n$$

となり, その特性方程式 $\lambda = 1+\delta$ の根の絶対値が 1 より大きいことから分かる. 一方, $v \equiv 1$ の線形安定性については次の定理が成立する.

定理 2 ([7])

$$N_0 := \frac{\cos^{-1}\frac{\delta}{2(\delta+1)}}{\pi - 2\cos^{-1}\frac{\delta}{2(\delta+1)}}$$

とする. このとき, (3.1) の平衡解 $v \equiv 1$ は, 以下の性質をもつ.

1. $N < N_0$ のとき, 局所漸近安定.

2. $N > N_0$ のとき, 不安定.

この定理にある通り, $N < N_0$ の場合 $v \equiv 1$ は線形安定となるが, 恒等的に 0 ではない非負の初期条件に対する (3.1) の解が $v \equiv 1$ に漸近するか, すなわち, $v \equiv 1$ が大域的安定な解となるかは明らかにされていない. そこで, 数値計算を行い (3.1) の解の挙動を観察してみる. 例えば, 時間間隔のパラメータを $\delta = 0.5$ とし, 時間遅れのパラメータ N を変えて (3.1) の解の挙動を図示すると次の図が得られる. 図 1 および図 2 は, 横軸を n, 縦軸を (3.1) の解 v_n として適当な初期条件の下で数値計算

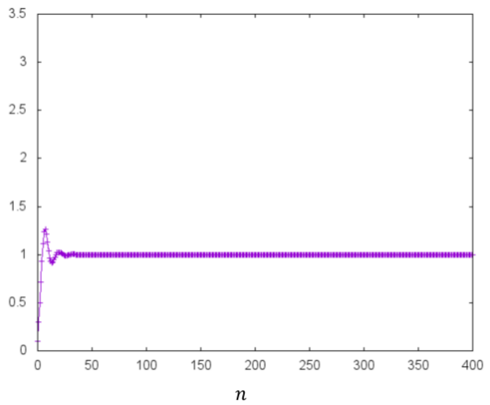

図 1: $N = 2$ の場合の (3.1) の解の例

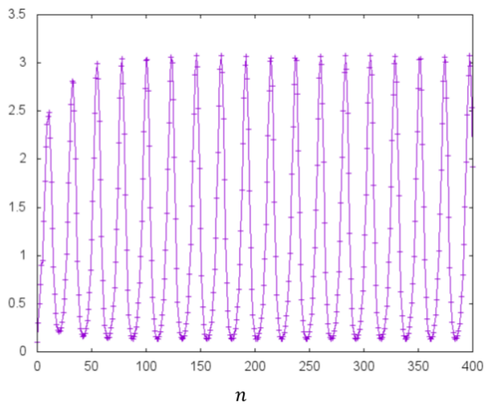

図 2: $N = 5$ の場合の (3.1) の解の例

を行った図である. 図 1 では $N = 2$, 図 2 では $N = 5$ としており, それぞれのグラフから平衡解 $v \equiv 1$ は, $N = 2$ の場合は大域的に安定であり, $N = 5$ の場合は大域的に安定ではないという予想ができる. また, $\delta = 0.5$ の場合, $N_0 \approx 4.19...$ であり, この数値計算の結果から予想 1 の主張の離散類似:

予想 2 $T < N_0$ とする. このとき, 恒等的に 0 でない非負の初期条件における (3.1) の解 v_n に対して,

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1$$

が成り立つ.

も成り立つことが期待される.

4　主定理とその証明

本節では, 前節で扱った (3.1) の平衡解 $v \equiv 1$ が大域的安定であるための十分条件を与える定理を述べ, その証明も与える.

定理 3 $N \leq 1/\delta$ とする. このとき, 恒等的に 0 でない非負の初期条件における (3.1) の解 v_n に対して,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

が成り立つ.

注意　$1/\delta < N_0$ が成り立つことを注意しておく.

この定理の証明は (3.1) の解 v_n の上極限および下極限を比較することで行う. まず,

$$x := \varlimsup_{n} v_n, \quad y := \varliminf_{n} v_n \tag{4.1}$$

とする. 定理の証明の前に x および y が満たす性質について考察する. 上極限と下極限の定義から $x \geq y$ が成り立ち, 非負の初期条件を考えていることから $y \geq 0$ も成り立つ. そこで, x, y は 3 通りのいずれかを満たす.

1. $y \leq x \leq 1$
2. $1 \leq y \leq x$
3. $y < 1 < x$

1. の場合, $n \leq n_0 \Rightarrow v_n \leq 1$ を満たす $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在し, (3.1) から $n \geq n_0 + N$ において v_n は単調増加することが分かる. すなわち, v_n は $n \geq n_0 + N$ において上に有界な単調増加列となり収束し,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1 \text{ i.e. } x = y = 1$$

が成り立つ. また, 2. の場合でも, $n \leq n_0 \Rightarrow v_n \geq 1$ を満たす $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在し, (3.1) から $n \geq n_0 + N$ において v_n は単調減少することが分かる. すなわち, v_n は $n \geq n_0 + N$ において下に有界な単調減少列となり収束し,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1 \text{ i.e. } x = y = 1$$

が成り立つ. 以上から, 3. の場合のみを考える. この場合における x および y の関係について次の補題を証明する.

補題　(4.1) の x および y に対して

$$x \leq \left(\frac{1+\delta}{1+\delta y}\right)^{N+1}, \quad y \geq \left(\frac{1+\delta}{1+\delta x}\right)^{N+1}$$

が成り立つ.

証明　x および y がそれぞれ v_n の上極限および下極限であることから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$n \geq m \Rightarrow y - \varepsilon \leq v_n \leq x + \varepsilon \tag{4.2}$$

を満たす $m \in \mathbb{Z}$ が存在する. さらに, m_1, $m_2 \geq m + 2N + 1$ をそれぞれ,

(M1) $v_{m_1} > x-\varepsilon$ かつ $v_{m_1} \geq v_{m_1-1}$

(M2) $v_{m_2} < y+\varepsilon$ かつ $v_{m_2} \leq v_{m_2-1}$

を満たすものとする. *(M1)* および *(M2)* それぞれの二つ目の不等式と (3.1) から, それぞれ

$$v_{m_1-1-N} \leq 1, \tag{4.3}$$

$$v_{m_2-1-N} \geq 1 \tag{4.4}$$

が得られる. 一方, (3.1) から

$$v_n = \frac{1+\delta}{1+\delta v_{n-1-N}} v_{n-1} = \frac{1+\delta}{1+\delta v_{n-1-N}} \times \frac{1+\delta}{1+\delta v_{n-2-N}} v_{n-2} = \cdots = \left(\prod_{k=n-1-N}^{n-1} \frac{1+\delta}{1+\delta v_{k-N}} \right) v_{n-1-N}$$

が得られる. 非負の初期条件における (3.1) の解 v_n は方程式の形から非負であることが従うので, (4.2), (4.3), (4.4) および *(M1)* と *(M2)* それぞれの一つ目の不等式を用いることで,

$$x-\varepsilon < \left\{ \frac{1+\delta}{1+\delta(y-\varepsilon)} \right\}^{N+1}, \quad y+\varepsilon > \left\{ \frac{1+\delta}{1+\delta(x+\varepsilon)} \right\}^{N+1}$$

が得られる. これらの不等式は任意の ε に対して成り立つので, 補題の主張にある不等式が従う.

この補題を用いて定理 3 の証明を行う. 補題の不等式中にある文字はすべて非負なので, 二つの不等式から

$$x < \left\{ \frac{1+\delta}{1+\delta \left(\frac{1+\delta}{1+\delta x} \right)^{N+1}} \right\}^{N+1} \tag{4.5}$$

が得られる. $x \geq 1$ であったことに注意すると, $N \leq 1/\delta$ のとき (4.5) を満たす x は存在しないことが分かる. 実際に,

$$f(x) := x - \left\{ \frac{1+\delta}{1+\delta \left(\frac{1+\delta}{1+\delta x} \right)^{N+1}} \right\}^{N+1}$$

とすると, $N \leq 1/\delta$ の下で, $f'(1) \geq 0$ および $f'(x)$ は $x>1$ において単調増加することが分かる. したがって, $x>1$ において $f'(x) \geq 0$ すなわち $f(x)$ は単調増加し, $f(1)=0$ から $f(x) \geq 0$ が従い, $x>1$ において (4.5) を満たす x は存在しないことが分かる. 以上から $y<1<x$ とはならないことが分かる. したがって, $N \leq 1/\delta$ のとき, 非負の初期条件による (3.1) の解 v_n は

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$$

を満たす.

5　結論と今後の課題

本稿では, ロジスティック方程式に時間遅れを入れた Hutchinson-Wright 方程式の離散化した方程式について考察した. 離散化した方程式には連続の場合と同様に二種類の平衡解が存在し, それぞれの線形安定性について述べ, 一方が不安定でもう一方が時間遅れのパラメータによって安定性が変化するというものであった. さらに, 線形安定な場合に大域的安定性について一部のパラメータ領域で議論した. そのパラメータ領域は $N \leq 1/\delta$ であり, これは連続の変数に読み替えると $T \leq 1$ に対応している. これは 2 節で紹介した命題 1[6] の条件よりも弱い条件となっている. 離散の場合の証明を改良し, 命題 1 の離散類似に相当する性質も証明したい. さらには予想 2 の成立の可否についても今後の課題としたい.

参考文献

[1] G. E. Hutchinson, “Circular causal systems in ecology”, Ann. N. Y. Acad. Sci. 50(1948) 221–246.

[2] M. Morishita, “The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density”, Res. Popul. Ecol. VII(1965) 52–55.

[3] M. Murata, J. Satsuma, A. Ramani, B. Grammaticos, “How to discretize differential systems in a systematic way”, J. Phys. A: Math. Theor. 31(2010), 315203, 15pp.

[4] M. Murata, “Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation”, J. Difference. Equ. Appl. 19(2013), 1008–1021.

[5] E. M. Wright, “The stability of solutions of non-linear difference-differential equations”, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 63(1950) 18–26.

[6] E. M. Wright, “A non-linear difference-differential equation”, J. Reine Angew. Math. 194(1955) 66–87.

[7] 松家 敬介, 「時間遅れをもつロジスティック方程式の離散化について」, 武蔵野大学数理工学センター紀要, 2(2017) 掲載予定.