連立線形方程式の一般解の差分・超離散対応

赤木, 洸仁
東海大学理学研究科

長井, 秀友
東海大学理学部

https://doi.org/10.15017/1832811

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.73-80, 2017-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 12 (pp. 73 - 80)

連立線形方程式の一般解の差分・超離散対応

赤木 洸仁（AKAGI Hirohito），長井 秀友（NAGAI Hidetomo）

（Received 15 January 2017; Accepted 28 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

連立線形方程式の一般解の差分・超離散対応

東海大学理学研究科　赤木洸仁　(AKAGI Hirohito)
東海大学理学部　長井秀友　(NAGAI Hidetomo)

概　要　1 階連立線形差分方程式の一般解が行列を用いることで求まるのと同様に，1 階連立線形超離散方程式の一般解も Max-Plus 代数における行列の演算を導入することで求められる．似て非なる導出過程で求めたそれぞれの一般解が超離散化によって対応関係を有していることを示す．

1　イントロダクション

独立変数 n と従属変数 x_n, y_n について与えられる方程式

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_{11}x_n + a_{12}y_n \\ y_{n+1} = a_{21}x_n + a_{22}y_n \end{cases} \tag{1.1}$$

は 1 階連立線形差分方程式と呼ばれる．本報告では係数 a_{ij} と初期値 x_1, y_1 が非負の定数である方程式について考えることにする．このとき，(1.1) について変換

$$x_n = e^{u_n/\varepsilon}, \quad y_n = e^{v_n/\varepsilon}, \quad a_{ij} = e^{b_{ij}/\varepsilon} \tag{1.2}$$

と，極限に関する公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{\alpha/\varepsilon} + e^{\beta/\varepsilon}) = \max(\alpha, \beta) \tag{1.3}$$

より従属変数 u_n, v_n と定数 b_{ij} によって構成される Max-Plus 代数を用いた方程式

$$\begin{cases} u_{n+1} = \max(b_{11} + u_n, b_{12} + v_n) \\ v_{n+1} = \max(b_{21} + u_n, b_{22} + v_n) \end{cases} \qquad (b_{ij} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}) \tag{1.4}$$

を得ることができ，これを 1 階連立線形超離散方程式と呼ぶ．本報告では (1.1) と (1.4) のそれぞれについて一般解を導出し，超離散化による対応関係を調べる．

2　連立線形差分方程式の一般解

1 階連立線形差分方程式 (1.1) についての一般解を求める．導出方法については，[1] で紹介されているため概略のみを与える．まず，(1.1) は行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

と表記することができ，

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と置くと $X_{n+1}=AX_n$ となり，帰納的に代入を繰り返すことで $X_{n+1}=A^nX_1$ を得る．すなわち，(1.1) の一般解は A^n と初期値 X_1 を用いて与えられる．A^n は対角化を用いた手法で求まり

$$A^n = \frac{1}{p_1-p_2}\begin{pmatrix} (a_{11}-p_2)p_1^n+(p_1-a_{11})p_2^n & a_{12}(p_1^n-p_2^n) \\ a_{21}(p_1^n-p_2^n) & (a_{22}-p_2)p_1^n+(p_1-a_{22})p_2^n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

となる．ここで p_1, p_2 は係数行列の固有方程式

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0 \tag{2.3}$$

の解を表し，特に条件の $a_{ij}\geq 0$ より p_1, p_2 は異なる 2 つの実数解になることが保証されている．(2.2) の結果より一般解を得る．

3 連立線形超離散方程式の一般解

3.1 Max-Plus 代数における行列の演算の導入

ここでは 1 階連立線形超離散方程式 (1.4) の一般解を求める．導出方法については [2, 3] を参考にした．まず，2 つの実数 a, b についての演算 $(\max,+)$ を演算子 $(\oplus,\otimes)$ によって

$$a\oplus b = \max(a,b) \tag{3.1}$$

$$a\otimes b = a+b \tag{3.2}$$

と定義する．演算子 $(\oplus,\otimes)$ は結合則と分配則を満たす．さらに m 次正方行列 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ について，行列の演算 $(\oplus,\otimes)$ を次で定義する．

$$[A\oplus B]_{ij} = \max(a_{ij},b_{ij}) \tag{3.3}$$

$$[A\otimes B]_{ij} = \max_{k=1}^{m}(a_{ik}+b_{kj}) \tag{3.4}$$

ここで $[A]_{ij}$ は行列 A の (i,j) 成分を表している．演算子 $(\oplus,\otimes)$ を導入することで，(1.4) は

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

と表記できる．ここで

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

と置くと差分方程式と同様に $U_{n+1}=B\otimes U_n$ となる．行列に関する $\otimes$ も結合則を満たすので

$$B\otimes U_n = B\otimes(B\otimes U_{n-1}) = (B\otimes B)\otimes U_{n-1}$$

とできる．このことから帰納的に代入を繰り返すことで $U_{n+1}=B\otimes B\otimes\cdots\otimes B\otimes U_1$ を得られる．ここで $\otimes$ を用いた n 個の行列 B の積を $B^{\otimes n}$ と表すことにすると，$U_{n+1}=B^{\otimes n}\otimes U_1$ を得ることができる．連立線形超離散方程式 (1.4) についても一般解は $B^{\otimes n}$ と初期値 U_1 を用いて与えられる．

3.2　Max-Plus 代数における係数行列の n 乗

ここでは $B^{\otimes n}$ について考える．$B^{\otimes n}$ の (i,j) 成分は定義に従うと次で与えられる．

$$[B^{\otimes n}]_{ij} = \max_{\substack{k_m \in \{1,2\} \\ m=1,2,\cdots,n-1}} (b_{ik_1} + b_{k_1k_2} + \cdots + b_{k_{n-2}k_{n-1}} + b_{k_{n-1}j}) \tag{3.6}$$

これより $[B^{\otimes n}]_{ij}$ は 2^{n-1} 個の項の最大値によって与えられるが，このままでは複雑である．そこで (2.2) と対応させるために B を隣接行列とした有向グラフの理論を導入する．まず，2 つの頂点 1,2 に対して，それぞれ頂点 i から頂点 j へ向かう辺の重みを b_{ij} に対応させる (図 1)．このとき，(3.6) で与えた $[B^{\otimes n}]_{ij}$ は n 回の移動で頂点 i から頂点 j へ向かう経路のうち，最大の重みとみなせる．頂点 i から出発して $k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}$ を経由し j へ向かう経路を π，その経路上の重みを $w(\pi)$，移動した回数を $l(\pi)$ とし次のように定義する．

$$\begin{aligned}
\pi &= (i, k_1, k_2, \cdots, k_{n-1}, j) \\
w(\pi) &= b_{ik_1} + b_{k_1k_2} + \cdots + b_{k_{n-2}k_{n-1}} + b_{k_{n-1}j} \\
l(\pi) &= n
\end{aligned}$$

このような経路 π のうち，始点と終点が同じ値になるものを閉路と呼び，σ と表す．さらに閉路 σ について重みを移動した回数で割った値を $\mu(\sigma)$ とし，あらゆる閉路についての μ の最大値を $\Lambda(B)$ とする:

$$\begin{aligned}
\mu(\sigma) &= \frac{w(\sigma)}{l(\sigma)} \\
\Lambda(B) &= \max_{\sigma} \mu(\sigma).
\end{aligned}$$

ここで $\max_\sigma$ はあらゆる閉路 σ から定まる $\mu(\sigma)$ の最大値を表す．2 次正方行列のとき $\Lambda(B)$ は閉路 $\sigma_1 = (1,1), \sigma_2 = (1,2,1), \sigma_3 = (2,2)$ の 3 通りのいずれかによって与えられることが知られている [2]．このことから $\Lambda(B)$ は $\max(b_{11}, \frac{b_{12}+b_{21}}{2}, b_{22})$ で与えられる．

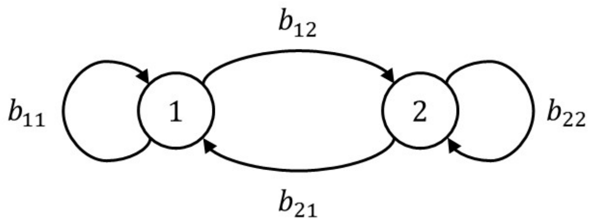

図 1: B を隣接行列とした有向グラフ

正方行列 C について $\Lambda(C) = 0$ となるとき，この行列 C を零定値行列と呼ぶ．このとき次の命題が成り立つことは明らかである．

命題 3.1　正方行列 B について，行列 B_Λ を $B_\Lambda = B \otimes (-\Lambda(B))$ とする．このとき $\Lambda(B_\Lambda) = 0$ を満たす．すなわち，行列 B_Λ は零定値行列である．

ここで行列 B と実数値 $\Lambda(B)$ についての計算は $[B_\Lambda]_{ij} = [B]_{ij} \otimes (-\Lambda(B))$ とする．このことから任意の正方行列 B_Λ について，$B = B_\Lambda \otimes \Lambda(B)$ が成り立つ．つまり，$B^{\otimes n}$ は零定値行列 B_Λ を用いて

$$B^{\otimes n} = (B_\Lambda \otimes \Lambda(B))^{\otimes n} = B_\Lambda^{\otimes n} \otimes n\Lambda(B)$$

と表すことができる．零定値行列 B_Λ の n 乗は以下の補題と定理から求められる．

補題 3.1 *零定値行列 C について構成できるすべての閉路 σ の重み $w(\sigma)$ は正の値をとらず，少なくとも 1 つの $w(\sigma_c)=0$ となる零閉路を有する．*

上記の補題が成り立つことは零定値行列の定義より明らかである．

定理 3.1 *2 次の零定値行列 C が零閉路として $\sigma_c=(i,i)\quad(i\in\{1,2\})$ を少なくとも 1 つ有しているとき $C^{\otimes n}$ は次で与えられる．*

$$C^{\otimes n}=\begin{pmatrix}\max(c_{12}+c_{21},nc_{11}) & c_{12}\\ c_{21} & \max(c_{12}+c_{21},nc_{22})\end{pmatrix}\tag{3.7}$$

Proof. $i\neq j$ とする．このとき $[C^{\otimes n}]_{ij}=\max(c_{ii}\otimes[C^{\otimes n-1}]_{ij},c_{ij}\otimes[C^{\otimes n-1}]_{jj})$ と展開することができる．ここで仮定 $\sigma_c=(i,i)$ より $c_{ii}=0$ であることから

$$[C^{\otimes n}]_{ij}=\max([C^{\otimes n-1}]_{ij},c_{ij}\otimes[C^{\otimes n-1}]_{jj})$$

となり，展開を繰り返すと $[C^{\otimes n}]_{ij}=\max(c_{ij},c_{ij}\otimes\max_{\otimes l\in\{1,\cdots,n-1\}}[C^{\otimes l}]_{jj})$ が得られる．ここで補題 3.1 より $\max_{\otimes l\in\{1,\cdots,n-1\}}[C^{\otimes l}]_{jj}\leq 0$ となるので $[C^{\otimes n}]_{ij}=c_{ij}$ と導くことができる．$[C^{\otimes n}]_{jj}$ については，$[C^{\otimes n}]_{jj}=\max(c_{ji}\otimes[C^{\otimes n-1}]_{ij},c_{jj}\otimes[C^{\otimes n-1}]_{jj})=\max(c_{ji}\otimes c_{ij},c_{jj}\otimes c_{jj}\otimes\cdots\otimes c_{jj})$ と展開を進めることができる．このことから，$[C^{\otimes n}]_{jj}=\max(c_{ji}+c_{ij},nc_{jj})$ を得られる．$[C^{\otimes n}]_{ii}$ については，仮定より $c_{ii}=0$ であることから $[C^{\otimes n}]_{ii}=0$ となることは自明である．特に $\max(c_{ij}+c_{ji},nc_{ii})=0$ が成り立つので，題意は示された． □

定理 3.2 *2 次の零定値行列 C が零閉路として $\sigma_c=(i,j,i)$ のみを有しているとき $C^{\otimes n}$ は次で与えられる．*

$$C^{\otimes n}=\begin{cases}\begin{pmatrix}0 & c_{12}+\max(c_{11},c_{22})\\ c_{21}+\max(c_{11},c_{22}) & 0\end{pmatrix} & (n=2k)\\[2ex] \begin{pmatrix}\max(c_{11},c_{22}) & c_{12}\\ c_{21} & \max(c_{11},c_{22})\end{pmatrix} & (n=2k+1)\end{cases}\tag{3.8}$$

Proof. $n=2k$ のとき，$[C^{\otimes 2k}]_{ij}=\max([C^{\otimes 2}]_{ii}\otimes[C^{\otimes 2k-2}]_{ij},[C^{\otimes 2}]_{ij}\otimes[C^{\otimes 2k-2}]_{jj})$ と展開することができる．仮定より $[C^{\otimes 2}]_{ii}=[C^{\otimes 2}]_{jj}=0$ となるため展開を繰り返すと，$[C^{\otimes 2k}]_{ij}=\max([C^{\otimes 2}]_{ij},[C^{\otimes 2}]_{ij}\otimes\max_{l\in\{1,\cdots,k-1\}}[C^{\otimes 2l}]_{jj})=[C^{\otimes 2}]_{ij}=\max(c_{ii}+c_{ij},c_{ij}+c_{jj})$ を得る．以上より題意は示された． □

定理 3.1,3.2 の結果を関係式 $B^{\otimes n}=B_{\Lambda}^{\otimes n}\otimes n\Lambda(B)$ の零定値行列 B_{Λ} に代入し，$[B_{\Lambda}]_{ij}=b_{ij}\otimes(-\Lambda(B))$ と変換することで $B^{\otimes n}$ を得ることができる．これより $B^{\otimes n}$ は次のように与えられる．

(i) 係数行列 B の $\Lambda(B)$ を閉路 $\sigma'=(i,i)\quad(i\in\{1,2\})$ が少なくとも 1 つ与えている．すなわち，$\Lambda(B)=b_{ii}$ が成り立っているとき

$$B^{\otimes n}=\begin{pmatrix}\max(b_{12}+b_{21}+(n-2)\Lambda(B),nb_{11}) & b_{12}+(n-1)\Lambda(B)\\ b_{21}+(n-1)\Lambda(B) & \max(b_{12}+b_{21}+(n-2)\Lambda(B),nb_{22})\end{pmatrix}\tag{3.9}$$

(ii) 係数行列 B の $\Lambda(B)$ を閉路 $\sigma'=(i,j,i)\quad(i\neq j)$ のみが与えている．すなわち，$\Lambda(B)=\frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}$ かつ $\Lambda(B)>\max(b_{ii},b_{jj})$ が成り立っているとき

$$B^{\otimes n}=\begin{cases}\begin{pmatrix}n\Lambda(B) & b_{12}+\max(b_{11},b_{22})+(n-2)\Lambda(B)\\ b_{21}+\max(b_{11},b_{22})+(n-2)\Lambda(B) & n\Lambda(B)\end{pmatrix} & (n=2k)\\[2ex] \begin{pmatrix}\max(b_{11},b_{22})+(n-1)\Lambda(B) & b_{12}+(n-1)\Lambda(B)\\ b_{21}+(n-1)\Lambda(B) & \max(b_{11},b_{22})+(n-1)\Lambda(B)\end{pmatrix} & (n=2k+1)\end{cases}\tag{3.10}$$

(3.9), (3.10) の結果を $U_{n+1}=B^{\otimes n}\otimes U_1$ に代入することで (1.4) の一般解を得る．

4　一般解の差分・超離散対応

この章では 2 章で求めた (2.2) に超離散化を施し，3 章で求めた (3.9), (3.10) になることを示す．ただし，(2.2) の結果については減法がいくつか含まれているので加法のみで表せるように変形を行う．まず，S_n を

$$S_n = \frac{p_1^{n+1} - p_2^{n+1}}{p_1 - p_2} = p_1^n + p_1^{n-1}p_2 + \cdots + p_1p_2^{n-1} + p_2^n$$

と定義すると，(2.2) は S_n を用いて

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}S_{n-1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})S_{n-2} & a_{12}S_{n-1} \\ a_{21}S_{n-1} & a_{22}S_{n-1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})S_{n-2} \end{pmatrix}$$

と表せる．固有方程式 (2.3) についての解と係数の関係を用いることで，S_n は次の漸化式

$$S_{n+2} = (a_{11} + a_{22})S_{n+1} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})S_n \tag{4.1}$$

を満たすことが示される．(4.1) が成り立つことから A^n の対角成分 $[A^n]_{ii} \quad (i \in \{1,2\})$ は，$i \neq j$ としたとき次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
[A^n]_{ii} &= a_{ii}S_{n-1} - (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})S_{n-2} \\
&= a_{ii}\{(a_{ii} + a_{jj})S_{n-2} - (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})S_{n-3}\} - (a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji})S_{n-2} \\
&= a_{ii}^2 S_{n-2} - a_{ii}^2 a_{jj}S_{n-3} + a_{ii}a_{ij}a_{ji}S_{n-3} + a_{ij}a_{ji}S_{n-2} \\
&\ \vdots \\
&= a_{ii}^{n-2}S_2 - a_{ii}^{n-2}a_{jj}S_1 + a_{ii}^{n-3}a_{ij}a_{ji}S_1 + a_{ii}^{n-4}a_{ij}a_{ji}S_2 + \cdots + a_{ii}a_{ij}a_{ji}S_{n-3} + a_{ij}a_{ji}S_{n-2} \\
&= a_{ii}^{n-2}S_2 - a_{ii}^{n-2}a_{jj}S_1 + a_{ij}a_{ji}\sum_{k=1}^{n-2} a_{ii}^{n-2-k}S_k
\end{aligned}$$

ここで $S_1 = p_1 + p_2 = a_{ii} + a_{jj}$, $S_2 = p_1^2 + p_1p_2 + p_2^2 = a_{ii}^2 + a_{ii}a_{jj} + a_{jj}^2 + a_{ij}a_{ji}$ より，$S_0 = 1$ と定義することで $[A^n]_{ii} = a_{ii}^n + a_{ij}a_{ji}\sum_{k=0}^{n-2} a_{ii}^{n-2-k}S_k$ とできる．従って A^n は

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n + a_{12}a_{21}\sum_{k=0}^{n-2} a_{11}^{n-2-k}S_k & a_{12}S_{n-1} \\ a_{21}S_{n-1} & a_{22}^n + a_{21}a_{12}\sum_{k=0}^{n-2} a_{22}^{n-2-k}S_k \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

という S_n と a_{ij} を用いた減法を含まない表記に変形できる．さらに S_n について次の命題を得る．

命題 4.1 S_n は非負の整数 k, l, m から定まる係数 $C(k, 2l, m)$ を用いて次のように表すことができる．

$$S_n = \sum_{k+2l+m=n} C(k, 2l, m) a_{11}^k (a_{12}a_{21})^l a_{22}^m \tag{4.3}$$

ここで $\sum_{k+2l+m=n}$ は $k + 2l + m = n$ を満たすすべての組み合わせの和を表す．

Proof. n についての帰納法で示す．まず $n = 1$ のとき $S_1 = a_{11} + a_{22}$ より $C(1,0,0) = C(0,0,1) = 1$ とすることで成り立つ．$n = 2$ のとき $S_2 = a_{11}^2 + a_{11}a_{22} + a_{22}^2 + a_{12}a_{21}$ より $C(2,0,0) = C(1,0,1) = C(0,2,0) = C(0,0,2) = 1$ とすることで成り立つ．$n+1$ まで成り立っていると仮定し，$n+2$ につい

て考えると漸化式 (4.1) より

$$\begin{aligned}
S_{n+2} &= (a_{11}+a_{22})S_{n+1}-(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})S_n \\
&= (a_{11}+a_{22})\sum_{k+2l+m=n+1} C(k,2l,m)a_{11}^k(a_{12}a_{21})^l a_{22}^m \\
&\quad -(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\sum_{k+2l+m=n} C(k,2l,m)a_{11}^k(a_{12}a_{21})^l a_{22}^m \\
&= \sum_{k+2l+m=n+1} C(k,2l,m)a_{11}^{k+1}(a_{12}a_{21})^l a_{22}^m + \sum_{k+2l+m=n+1} C(k,2l,m)a_{11}^k(a_{12}a_{21})^l a_{22}^{m+1} \\
&\quad -\sum_{k+2l+m=n} C(k,2l,m)a_{11}^{k+1}(a_{12}a_{21})^l a_{22}^{m+1} + \sum_{k+2l+m=n} C(k,2l,m)a_{11}^k(a_{12}a_{21})^{l+1} a_{22}^m
\end{aligned}$$

となる．右辺について a_{ij} の次数の和がすべて $n+2$ になっていることから (4.3) のように表記できることが示せた． □

さらに漸化式 (4.1) より S_n は a_{ij} の多項式で表されるため，k,l,m の少なくとも 1 つが負になる場合には $C(k,2l,m)=0$ と置いても (4.3) の結果に影響しない．この拡張を踏まえたうえで次の命題を示す．

命題 4.2 *(4.3)* で定められた $C(k,2l,m)$ は次を満たす．

$$C(k,2l,m)\geq 0$$
$$C(k,2l,m)\geq C(k-1,2l,m)$$

Proof. n についての帰納法で示す．$n=1,2$ のとき $C(1,0,0)=C(0,0,1)=1, C(2,0,0)=C(1,0,1)=C(0,2,0)=C(0,0,2)=1$ より成り立つ．$k+2l+m\leq n+1$ を満たす任意の k,l,m で成り立つと仮定する．先の命題 4.1 の証明で与えた関係式より，$k+2l+m=n+2$ を満たす k,l,m について

$$C(k,2l,m)=C(k-1,2l,m)+C(k,2l,m-1)-C(k-1,2l,m-1)+C(k,2(l-1),m) \tag{4.4}$$

が成り立つ．仮定より $C(k,2l,m-1)-C(k-1,2l,m-1)$ と $C(k-1,2l,m)\geq 0, C(k,2(l-1),m)\geq 0$ が成り立つので (4.4) の右辺は非負である．従って左辺について $C(k,2l,m)\geq 0$ を得る．また，(4.4) を

$$C(k,2l,m)-C(k-1,2l,m)=C(k,2l,m-1)-C(k-1,2l,m-1)+C(k,2(l-1),m)$$

と変形できることから $C(k,2l,m)-C(k-1,2l,m)\geq 0$ を得る．以上より題意は示された． □

命題 4.3 関係式 *(4.3)* に変換 $S_n=e^{T_n/\varepsilon}, a_{ij}=e^{b_{ij}/\varepsilon}$ を用いた超離散化を行うと次を得る．

$$T_n=\begin{cases} n\Lambda(B) & (n=2k) \\ \max(b_{11},b_{22})+(n-1)\Lambda(B) & (n=2k+1)\end{cases} \tag{4.5}$$

Proof. $n=2k$ としたとき S_{2k} は次のようになる．

$$\begin{aligned}
S_{2k} &= C(2k,0,0)a_{11}^{2k}+C(2k-1,0,1)a_{11}^{2k-1}a_{22}+C(2k-2,2,0)a_{11}^{2k-2}(a_{12}a_{21})+\cdots \\
&\quad +C(1,0,2k-1)a_{11}a_{22}^{2k-1}+C(0,2k,0)(a_{12}a_{21})^k+C(0,0,2k)a_{22}^{2k}
\end{aligned}$$

よって両辺を超離散化することで

$$\begin{aligned}
T_{2k} &= \max(2kb_{11},(2k-1)b_{11}+b_{22},(2k-2)b_{11}+b_{12}+b_{21},\cdots, \\
&\quad b_{11}+(2k-1)b_{22},k(b_{12}+b_{21}),2kb_{22})
\end{aligned}$$

となる．ここで $t_1+2t_2+t_3=2k$ を満たす非負の整数 t_1,t_2,t_3 について $t_1b_{11}+t_2(b_{12}+b_{21})+t_3b_{22}\leq \max(2kb_{11},k(b_{12}+b_{21}),2kb_{22})$ という関係式が成り立つので $T_{2k}=\max(2kb_{11},k(b_{12}+b_{21}),2kb_{22})=2k\Lambda(B)$ を得る．同様に $n=2k+1$ についても示すことができる． □

これらの結果を用いて実際に A^n の各成分を超離散化する．まず，(4.2) より対角成分 $[A^n]_{ii}$ は

$$\begin{aligned}
& a_{ii}^n+a_{ii}^{n-2}a_{ij}a_{ji}+a_{ii}^{n-3}a_{ij}a_{ji}S_1+\cdots+a_{ij}a_{ji}S_{n-2} \\
= \;& e^{nb_{ii}/\varepsilon}+e^{(n-2)b_{ii}+b_{ij}+b_{ji}/\varepsilon}+e^{(n-3)b_{ii}+b_{ij}+b_{ji}+T_1/\varepsilon}+\cdots+e^{b_{ij}+b_{ji}+T_{n-2}/\varepsilon} \\
\to \;& \max(nb_{ii},(n-2)b_{ii}+b_{ij}+b_{ji},(n-3)b_{ii}+b_{ij}+b_{ji}+T_1,\cdots,b_{ij}+b_{ji}+T_{n-2}) \\
= \;& \max(nb_{ii},b_{ij}+b_{ji}+\max((n-2)b_{ii},(n-3)b_{ii}+T_1,\cdots,T_{n-2})) \\
= \;& \max(nb_{ii},b_{ij}+b_{ji}+T_{n-2})
\end{aligned}$$

と超離散化ができる．ここで (4.5) より $T_n\geq nb_{ii}$ が成り立つことを用いた．次に非対角成分 $[A^n]_{ij}$ は $a_{ij}S_{n-1}\to b_{ij}+T_{n-1}$ となる．以上から，(2.2) を超離散化した結果は

$$\begin{pmatrix} \max(nb_{11},b_{12}+b_{21}+T_{n-2}) & b_{12}+T_{n-1} \\ b_{21}+T_{n-1} & \max(nb_{22},b_{12}+b_{21}+T_{n-2}) \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

となる．ここで $\Lambda(B)=b_{ii},b_{jj}$ のときは T_n は n の偶奇によらず $T_n=n\Lambda(B)$ となるため (3.9) の結果と完全に一致する．次に $\Lambda(B)=\frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}$ のとき，(4.6) に (4.5) の結果をそれぞれ代入することで

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \max(nb_{11},n\Lambda(B)) & b_{12}+\max(b_{11},b_{22})+(n-2)\Lambda(B) \\ b_{21}+\max(b_{11},b_{22})+(n-2)\Lambda(B) & \max(nb_{22},n\Lambda(B)) \end{pmatrix} & (n=2k) \\ \begin{pmatrix} \max(nb_{11},\max(b_{11},b_{22})+(n-1)\Lambda(B)) & b_{12}+(n-1)\Lambda(B) \\ b_{21}+(n-1)\Lambda(B) & \max(nb_{22},\max(b_{11},b_{22})+(n-1)\Lambda(B)) \end{pmatrix} & (n=2k+1) \end{cases}$$

とでき，仮定より $\frac{b_{ij}+b_{ji}}{2}\geq\max(b_{ii},b_{jj})$ なる大小関係が成り立つことから (3.10) と一致する．これらの結果から (2.2) について超離散化を施し，3 章で求めた (3.9),(3.10) になることが示せた．

5 まとめと今後の課題

2 つの変数を用いた連立線形差分・超離散方程式について一般解を求め，それらの一般解が超離散化によって対応関係を有していることを示した．2 次の場合については場合分けを行うことで Max-Plus 代数での係数行列 B の n 乗を得られたが，3 次以上の行列の n 乗を具体的に求めるには，膨大な場合分けを行う必要がでてくる．また，差分系での 3 次以上の行列の固有値については 3 次以上の代数方程式を解く必要があり，かつ複素数が現れる．現在の研究で 3 次正方行列の n 乗については固有値を用いない総和に変形できることが見つかっているため，この結果を超離散化したときに Max-Plus 代数の 3 次正方行列の n 乗に対応するかを見つけることが今後の課題である．

参考文献

[1] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).

[2] P.Butkovič, “Max-linear Systems”, Springer (1997).

[3] F.Baccelli, G.Cohen, G.J.Olsder, J.Quadrat, “Synchronization and Linearity”, Wiley (2002).