平面分割に関連するパフィアンについて

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

森居, 数広
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/1832810

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.67-72, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 11 (pp. 67 - 72)

平面分割に関連する パフィアンについて

上岡 修平（KAMIOKA Shuhei），森居 数広（MORII Kazuhiro）

（Received 15 January 2017; Accepted 14 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

平面分割に関連するパフィアンについて

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平 (KAMIOKA Shuhei)
京都大学大学院情報学研究科　森居数広 (MORII Kazuhiro)

概要　対称な平面分割に対して, トレースを含む分配関数を提示し, そのパフィアン表示を与える. この分配関数は対称な平面分割に対する既知の母関数の一般化であり, それら母関数と同様の積表示を持つと予想される.

1　平面分割の母関数

有限の大きさの非負整数の配列 $\pi = (\pi_{i,j})$ で各行, 各列について単調非増加なものを平面分割 (plane partition) という. 例えば

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

は 3×4 型の平面分割である. MacMahon は整数分割の 2 次元拡張として平面分割を導入し, 次の積型の母関数を得た [9]: 任意の整数 $a, b, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}(a,b,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \prod_{k=1}^{c} \frac{1 - q^{i+j+k-1}}{1 - q^{i+j+k-2}} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \frac{1 - q^{c+i+j-1}}{1 - q^{i+j-1}}. \tag{2}$$

ただし $\mathrm{PP}(a,b,c)$ は $a \times b$ 型の平面分割 $\pi = (\pi_{i,j})_{i=1,\dots,a;j=1,\dots,b}$ で成分が高々 c ($\Leftrightarrow \pi_{1,1} \leq c$) のものの全体である. また $|\pi| = \sum_{i,j} \pi_{i,j}$ (全成分の和) であり, これを平面分割 π の大きさという.

平面分割は, 主対角に関して対称 ($\Leftrightarrow \forall i, j,\ \pi_{i,j} = \pi_{j,i}$) のとき対称 (symmetric) であるという. 例えば

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

は 4×4 型の対称な平面分割である. MacMahon は対称な平面分割に関して次の母関数を予想した [9]: 任意の整数 $a, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathrm{SPP}(a,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \frac{1 - q^{c+2i-1}}{1 - q^{2i-1}} \prod_{1 \leq i < j \leq a} \frac{1 - q^{2(c+i+j-1)}}{1 - q^{2(i+j-1)}} \tag{4}$$

ただし $\mathrm{SPP}(a,c)$ は $a \times a$ 型の対称な平面分割 $\pi = (\pi_{i,j})_{i,j=1,\dots,a}$ で成分が高々 c のものの全体である. 母関数 (4) は後に Andrews [1] および Macdonald [8] により独立に証明されている.

平面分割の解析において, トレース $\mathsf{tr}(\pi) = \sum_i \pi_{i,i}$ は平面分割の大きさ $|\pi|$ と並んで重要な統計量である. Stanley は平面分割のトレースを導入し, トレースを含む次の母関数を発見した [10]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}(a,b,\infty)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} (1 - yq^{i+j-1})^{-1}. \tag{5}$$

ただし $\mathrm{PP}(a,b,\infty)=\cup_{c=0}^{\infty}\mathrm{PP}(a,b,c)$ である．対称な平面分割に対しても類似の母関数は存在する (Gansner [3]):

$$\sum_{\pi\in\mathrm{SPP}(a,\infty)} y^{\mathsf{tr}(\pi)}q^{|\pi|}=\prod_{i=1}^{a}(1-yq^{2i-1})^{-1}\prod_{1\le i<j\le a}(1-y^2q^{2(i+j-1)})^{-1}. \tag{6}$$

ただし $\mathrm{SPP}(a,\infty)=\cup_{c=0}^{\infty}\mathrm{SPP}(a,c)$ である．

平面分割の大きさのみに関する母関数 (2), (4) は, 成分の大きさに上限 c を課しているので有限和である．一方, トレースを含む母関数 (5), (6) は, 成分の大きさに制限がないため無限和 (形式的べき級数) である．本稿の著者のひとりは最近, 可積分系のひとつである離散二次元戸田分子を用いて, (対称性を仮定しない) 通常の平面分割に関して次の分配関数を導出した [7]:

$$\sum_{\pi\in\mathrm{PP}(a,b,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)}q^{|\pi|}\omega(\pi)=\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c}\frac{1-yq^{i+j+k-1}}{1-yq^{i+j+k-2}}=\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\frac{1-yq^{c+i+j-1}}{1-yq^{i+j-1}}, \tag{7a}$$

$$\omega(\pi)=\prod_{i=1}^{\min\{a,b\}}\prod_{k=1}^{\pi_{i,i}}\frac{1-q^{c+i-k}}{1-yq^{c+i-k}}. \tag{7b}$$

分配関数 (7) は $y=1$ のとき大きさのみに関する母関数 (2) に, $c\to\infty$ のときトレースを含む母関数 (5) にそれぞれ帰着する．適切な重み関数 ω を挿入することにより, 積構造を保ったまま母関数 (2), (5) を同時に一般化することに成功している．

対称な平面分割に対しては, (7) のような, 成分の大きさに上限があり, トレースを含み, かつ積表示を持つような母関数, 分配関数は知られていない．本研究の目標は, 対称な平面分割に対して (7) と類似の積表示を持つ分配関数を見つけることである．欲しいのは $y=1$ のとき大きさのみに関する母関数 (4) に, $c\to\infty$ のときトレースを含む母関数 (6) にそれぞれ帰着するようなものである．

2　非交叉径路とパフィアン

本節では, パフィアンの組合せ論的解釈のひとつである Ishikawa–Wakayama の補題 [6] について復習する．グラフ理論の用語については [2] などを, パフィアンの定義や性質については [4] などをそれぞれ参照して欲しい．

D を閉路を持たない有向グラフとする．ただし D の節点に対して全順序が定義されていると仮定する．D の節点集合と枝集合をそれぞれ $V(D)$, $E(D)$ と書く．$\mathbb{K}$ を任意の体とする．重み関数 $w:E(D)\to\mathbb{K}$ により D の各枝は重み付けられているとする．任意の D 上の径路 (path) P に対して, P の重み $w(P)$ を

$$w(P)=\prod_{e\in E(P)}w(e) \tag{8}$$

(P の通る枝の重みの積) により定める．さらに任意の 2 節点 $u,v\in V(D)$ に対して, u–v 径路 (u から v に至る径路) の重み和を $h(u,v)$ と書く:

$$h(u,v)=\sum_{P:u\text{–}v}w(P). \tag{9}$$

D の節点の m 個組 $\boldsymbol{u}=(u_1,\dots,u_m)$ と, 有限の D の節点集合 I に対して

$$Q_I(\boldsymbol{u})=\sum_{(P_1,\dots,P_m)}\prod_{i=1}^{m}w(P_i) \tag{10}$$

とおく．ただし右辺の和は D 上の径路の m 個組 $(P_1, \dots, P_m)$ で, 次の条件を満たすものすべてにわたってとる:

(i) 任意の i に対して P_i の始点は u_i で, 終点は I に属する.

(ii) $P_1, \dots, P_m$ はどの 2 つも D 上の節点で交わらない.

次の補題で用いる記法を説明する．整数 $N \geq 0$ に対して $[N] = \{1, \dots, N\}$. $\binom{[N]}{m}$ は $[N]$ の m 部分集合の全体:

$$\binom{[N]}{m} = \{\{i_1, \dots, i_m\} \subset [N]\}.$$

N 次歪対称行列 $A = (a_{i,j})_{i,j \in [N]}$ と添字集合 $I \subset [N]$ に対して $A(I) = (a_{i,j})_{i,j \in I}$.

補題 1 (Ishikawa–Wakayama [6])**.** $m \geq 0$ を偶整数, $N \geq 0$ を整数とする．$\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ を D の節点の m 個組, $V = \{v_1 < \cdots < v_N\}$ を D の節点の N 集合とする．$\boldsymbol{u}$ は次を満たすと仮定する: 任意の $i, j = 1, \dots, m$ と任意の $v, v' \in V(D)$ に対して, $i < j$ かつ $v > v'$ ならば, 任意の u_i–v 径路と任意の u_j–v' 径路は D 上の節点で交わる．$A = (a_{k,\ell})_{k,\ell \in [N]}$ を N 次歪対称行列とする．このとき次が成り立つ:

$$\sum_{I \in \binom{[N]}{m}} \mathrm{Pf}(A(I)) Q_I(\boldsymbol{u}) = \mathrm{Pf}(Q). \tag{11}$$

ただし $Q = (q_{i,j})_{i,j=1,\dots,m}$ は m 次歪対称行列であり

$$q_{i,j} = \sum_{1 \leq k < \ell \leq N} a_{k,\ell} \begin{vmatrix} h(u_i, v_k) & h(u_i, v_\ell) \\ h(u_j, v_k) & h(u_j, v_\ell) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

補題 1 はパフィアンに関する Ishikawa–Wakayama の minor summation formula [5] の組合せ論的解釈である．また

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

のとき非交叉径路とパフィアンに関する Stembridge の補題 [11] に帰着する.

3 対称平面分割の分配関数

図 1 のような格子状の有向グラフ D を考える．ただし各交点は節点であり, 隣り合う交点間の線分は縦ならば上向き, 横ならば右向きの枝である．(従って D 上の径路は左下から右上の向きに進む.) また各線分に付けられたラベル (1 または q のべき) はそこにある枝の重みである.

対称な平面分割 $\pi \in \mathrm{SPP}(a, c)$ は, 有向グラフ D 上の径路の c 個組 $(P_0, P_1, \dots, P_{c-1})$ で次の条件を満たすものと一対一に対応する (図 2):

(i) P_i の始点は $(a + i, 0)$ で, 終点は主対角線 $\{(k, k);\ k = 0, 1, \dots\}$ 上にある.

(ii) $P_0, P_1, \dots, P_{c-1}$ はどの 2 つも D 上の節点で交わらない.

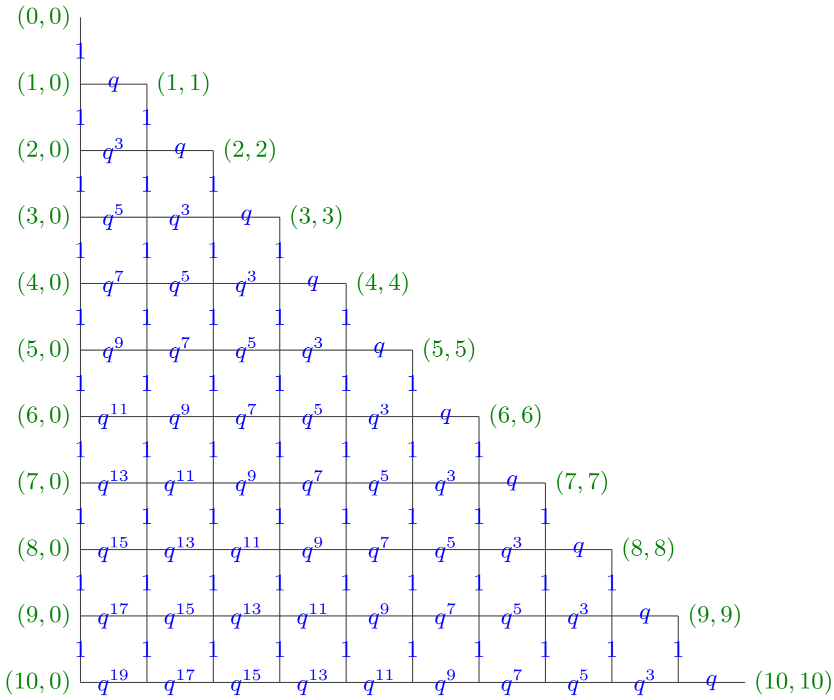

図 1　有向グラフ D.

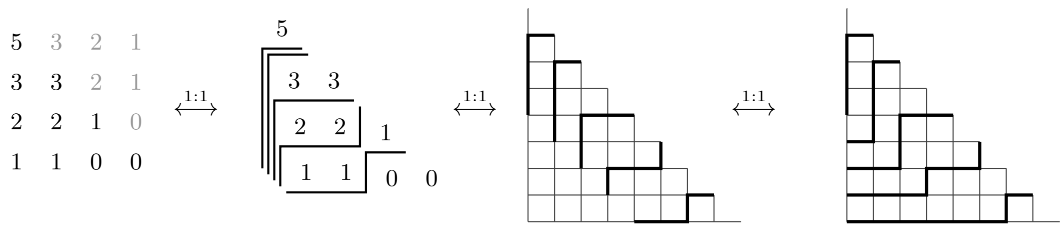

図 2　対称な平面分割と非交叉径路の組の一対一対応.

これより対称な平面分割 (に対応する非交叉径路の組) に対して補題 1 を適用することができる．今

$$\alpha_k = y^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1+(-q)^i}{1+y(-q)^i}, \qquad \beta_\ell = y^\ell \prod_{i=1}^{\ell} \frac{1-(-q)^i}{1-y(-q)^i} \tag{14}$$

とおく.

定理 2. 任意の整数 $a, c \geq 0$ に対して

$$\sum_{\pi \in \mathrm{SPP}(a,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \omega'(\pi) = \kappa^{-1} \mathrm{Pf}(Q), \tag{15a}$$

$$\omega'(\pi) = \prod_{i=1}^{a} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1+(-1)^i q^{c+i-k}}{1+(-1)^i y q^{c+i-k}}. \tag{15b}$$

ただし

$$\kappa = q^{\frac{c(c-1)(6a+2c-1)}{6}} \times \begin{cases} \alpha_0\beta_1\alpha_2\beta_3\cdots\alpha_{c-2}\beta_{c-1} & \text{if } c \text{ is even;} \\ \alpha_0\beta_1\alpha_2\beta_3\cdots\beta_{c-2}\alpha_{c-1} & \text{if odd.} \end{cases} \tag{16}$$

また c が偶数のときは $Q = (q_{i,j})_{i,j=0,1,\dots,c-1}$ は c 次歪対称行列であり

$$q_{i,j} = \sum_{0\le k<\ell<a+c} \alpha_k\beta_\ell q^{k^2+\ell^2} \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} a+i \\ k \end{bmatrix}_{q^2} & \begin{bmatrix} a+i \\ \ell \end{bmatrix}_{q^2} \\ \begin{bmatrix} a+j \\ k \end{bmatrix}_{q^2} & \begin{bmatrix} a+j \\ \ell \end{bmatrix}_{q^2} \end{vmatrix}, \qquad i,j = 0,1,\dots,c-1. \tag{17}$$

c が奇数のときは $Q = (q_{i,j})_{i,j=0,1,\dots,c}$ は $c+1$ 次歪対称行列であり, (17) に加えて

$$q_{i,c} = -q_{c,i} = \sum_{k=0}^{a+c-1} \alpha_k q^{k^2} \begin{bmatrix} a+i \\ k \end{bmatrix}_{q^2}, \qquad i = 0,1,\dots,c-1; \tag{18a}$$

$$q_{c,c} = 0. \tag{18b}$$

ただし $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q$ は q 二項係数 (Gauss 多項式) であり

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_q = \prod_{k=1}^{b} \frac{1-q^{a-k+1}}{1-q^k}. \tag{19}$$

Sketch of proof. c が偶数の場合を示す. 図 1 の有向グラフ D に対して補題 1 を適用する. $m = c$, $N = a + c$ および $u_i = (a+i, 0)$, $v_k = (k,k)$ とする. また歪対称行列 $A = (a_{k,\ell})_{k,\ell=0,1,\dots,N-1}$ を次で定める: $k < \ell$ に対して $a_{k,\ell} = \alpha_k\beta_\ell$. このとき任意の $I = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_m\} \subset \{0,1,\dots,N-1\}$ に対して

$$\mathrm{Pf}(A(I)) = \alpha_{k_1}\beta_{k_2}\alpha_{k_3}\beta_{k_4}\cdots\alpha_{k_{m-1}}\beta_{k_m}. \tag{20}$$

上述の一対一対応を用いると, 補題 1 にある (11) の左辺は, 対称な平面分割の言葉で次のように書ける:

$$\sum_{I\in\binom{\{0,1,\dots,N-1\}}{m}} \mathrm{Pf}(A(I))Q_I(\boldsymbol{u}) = \kappa \sum_{\pi\in\mathrm{SPP}(a,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|}\omega'(\pi). \tag{21}$$

一方 (11) の右辺は

$$h(u_i, v_k) = q^{k^2} \begin{bmatrix} a+i \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \tag{22}$$

により決まる. 以上より定理の主張を得る. c が奇数の場合も, phantom vertex の方法 [11] を用いることにより同様に証明可能である. □

分配関数 (15) の右辺にあるパフィアンの値を具体的な a, c に対して計算することにより, 次の予想式を得た.

予想 3. 任意の整数 $a, c \ge 0$ に対して

$$\sum_{\pi\in\mathrm{SPP}(a,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|}\omega'(\pi) = \prod_{i=1}^{a} \frac{1-yq^{c+2i-1}}{1-yq^{2i-1}} \prod_{1\le i<j\le a} \frac{1-y^2q^{2(c+i+j-1)}}{1-y^2q^{2(i+j-1)}}. \tag{23}$$

ただし ω' は (15b) で定義されたものである.

分配関数の予想式 (23) は対称な平面分割に対するものであり, 成分の大きさに上限 c があり, トレースを含み, かつ右辺のような積表示を持っている．さらに $y=1$ のとき大きさに関する母関数 (4) に, $c \to \infty$ のときトレースを含む母関数 (6) にそれぞれ帰着する．通常の平面分割に対する分配関数 (7) の場合と同様に, 適切な重み関数 ω' を挿入することにより, 積構造を保ったまま母関数 (4), (6) を同時に一般化している．予想式 (23) の証明は今後の課題である．

参考文献

[1] G. E. Andrews, *Plane partitions. I. The MacMahon conjecture*, Studies in Foundations and Combinatorics, Adv. in Math. Suppl. Stud., 1, Academic Press, New York–London, 1978, pp. 131–150.

[2] R. Diestel, *Graph theory*, fourth ed., Graduate Texts in Mathematics, 173, Springer, Heidelberg, 2010.

[3] E. R. Gansner, *The Hillman-Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.

[4] R. Hirota, *The direct method in soliton theory*, Cambridge Tracts in Mathematics, 155, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[5] M. Ishikawa and M. Wakayama, *Minor summation formula of pfaffians*, Linear and Multilinear Algebra **39** (1995), 285–305.

[6] ______, *Applications of minor summation formula. III. Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 113–155.

[7] S. Kamioka, *A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials*, Proceedings of FPSAC 2016 (Vancouver, Canada), 2016, pp. 671–682.

[8] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[9] P. A. MacMahon, *Combinatory analysis, volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[10] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

[11] J. R. Stembridge, *Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions*, Adv. Math. **83** (1990), 96–131.