九州大学学術情報リポジトリ Kyushu University Institutional Repository

A^(1)_1 型クラスター代数の変異と離散戸田格子

野邊,厚 千葉大学教育学部

https://doi.org/10.15017/1832804

出版情報:応用力学研究所研究集会報告. 28A0-S6 (1), pp.25-30, 2017-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン: 権利関係:

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6 「非線形波動研究の深化と展開」(研究代表者 辻本 論)

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

<u>Article No. 05</u> (pp. 25 - 30)

$A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異と 離散戸田格子

野邊厚(NOBE Atsushi)

(Received 12 January 2017; Accepted 1 March 2017)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

$A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異と離散戸田格子

千葉大学教育学部 野邊 厚 (NOBE Atsushi) *

概要

QRT 写像とよばれる楕円曲線の加法構造を用いて, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異と $A_1^{(1)}$ 型離散戸田格子の時間発展との直接的対応関係を明らかにする.また,この対応関係を通して, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異の幾何学的解釈を与える.

1 はじめに

1967年に戸田盛和により発見された戸田格子 [11] は、指数型ポテンシャルをもつバネ質点系の運動方程式であり、超楕円函数解や N ソリトン解をもつ可積分な非線形微分差分方程式として知られる。戸田格子の格子形状としては、ソリトン解をもつ無限格子の他に、半無限格子、有限格子など様々なものが研究されており、可積分性をもつ格子形状と Lie 代数の対応関係が得られている [1,10]。とくに、周期性をもつ有限格子(周期格子)は $A_N^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数と対応し、Lax 形式のスペクトルパラメータを通して超楕円曲線と結びつく。この事実から、Riemann テータ函数を用いてその初期値問題の解を書き下すことができる。このような性質は戸田格子の時間離散化においても同様に成り立ち、周期格子の離散時間発展(周期離散戸田格子)が $A_N^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数と対応し、超楕円曲線上の点の加法を用いて実現される。また、その初期値問題の解を書き下すこともできる。

一方,クラスター代数とは,2002年に Fomin-Zelevinsky により発見された代数系であり [2],以下のように定義される。はじめに,初期種子とよばれる変数(クラスター変数)と行列(交換行列)の組を用意する。この初期種子に変異とよばれる操作(成分の有理変換)を繰り返し適用して得られる種子全体を考える。この種子全体に含まれるクラスター変数の生成する多項式環をクラスター代数とよぶ。クラスター代数の生成元は初期クラスターの Laurent 多項式であることが Fomin-Zelevinsky によって示されており,そのような性質を Laurent 性とよぶ。さらに,このような Laurent 多項式の係数はすべて正であること(正値性)が知られている [7, 3]。最近,周期離散戸田格子の双線形形式も同様に Laurent 性をもつことが神吉らにより示され [6],さらにはその正値性が予想されている。また,大久保により,離散戸田格子の時間発展と等価な交換行列の変異も発見されている [9]。このように,周期離散戸田格子とクラスター代数には密接な関係があることが知られている。本稿においては,QRT 写像 [13] とよばれる楕円曲線の加法構造を用いて, $A_1^{(1)}$ 型離散戸田格子の時間発展と $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異との直接的対応関係を構築する。さらに,このような対応関係を通して, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異の幾何学的解釈を与える。定理の証明など詳細については [8] を参照されたい。

^{*〒 263-8522} 千葉市稲毛区弥生町 1 丁目 3 3 番, E-mail: nobe@faculty.chiba-u.jp

2 周期離散戸田格子と QRT 写像

周期離散戸田格子とよばれる力学系はいくつか知られているが、本稿では広田らによって発見された次のモデル [4] を考える:

$$\chi_{N}: \mathbb{C}^{2N+2} \to \mathbb{C}^{2N+2}; (I_{0}^{t}, \dots, I_{N}^{t}, V_{0}^{t}, \dots, V_{N}^{t}) \mapsto (I_{0}^{t+1}, \dots, I_{N}^{t+1}, V_{0}^{t+1}, \dots, V_{N}^{t+1}),$$

$$\begin{cases} I_{j}^{t+1} + V_{j-1}^{t+1} = I_{j}^{t} + V_{j}^{t}, \\ I_{j}^{t+1} V_{j}^{t+1} = I_{j+1}^{t} V_{j}^{t}, \\ I_{j+N+1}^{t} = I_{j}^{t}, \\ V_{j+N+1}^{t} = V_{j}^{t} \end{cases}$$
 for $j = 0, 1, \dots, N$ and $t \ge 0$

スペクトルパラメータ λ を導入し、Lax 行列 L^t, M^t をそれぞれ次のように定める:

$$L^{t} = \begin{pmatrix} I_{1}^{t} + V_{0}^{t} & 1 & & (-1)^{N} I_{0}^{t} V_{0}^{t} / \lambda \\ I_{1}^{t} V_{1}^{t} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & I_{N}^{t} + V_{N-1}^{t} & 1 \\ (-1)^{N} \lambda & & I_{N}^{t} V_{N}^{t} & & I_{0}^{t} + V_{N}^{t} \end{pmatrix}, \ M^{t} = \begin{pmatrix} I_{1}^{t} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & I_{N}^{t} & 1 \\ (-1)^{N} \lambda & & & I_{0}^{t} \end{pmatrix}$$

このとき、 χ_N の Lax 形式は次のように与えられる:

$$L^{t+1}M^t = M^tL^t$$

Lax 行列 L^t の特性多項式を用いて、スペクトル曲線 γ_N が $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 上で定義される:

$$\gamma_N = (\det(\zeta I + L^t) = 0) \cup \{P_\infty, P_\infty'\}$$

ただし,I は N+1 次単位行列であり, P_∞,P_∞' は無限遠点である.一般に, γ_N は (ζ,λ) 平面に おける種数 N の超楕円曲線であり,周期離散戸田格子の時間発展 χ_N は γ_N の Jacobi 多様体において線形化される [5].

とくに N=1 の場合,スペクトル曲線 γ_1 は楕円曲線であり, χ_1 は楕円曲線の加法となる.そのため, χ_1 は次の QRT 写像 $\varphi: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}); (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y})$ に双有理同値である [8]:

$$\bar{x} = \frac{-(bx+1)y^2}{b(bx+1)y^2 - (a-b)x}, \qquad \bar{y} = \frac{a\bar{x}^2 + \bar{x}}{(b\bar{x}+1)y}$$
(1)

ここで,a,b は初期値によって定まる保存量($a=I_0^0I_1^0-V_0^0V_1^0$, $b=-V_0^0V_1^0$)である.QRT 写像 φ とは楕円曲線の加法の定める力学系の一般的形式であり [13, 12],次のような双有理写像で具体的に与えられる:

$$\varphi: (x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y}) = \left(\frac{f_1 - f_2 x}{f_2 - f_3 x}, \frac{g_1 - g_2 y}{g_2 - g_3 y}\right)$$

ここで、 $\mathbf{f} := {}^t(f_1, f_2, f_3)$ 、 $\mathbf{g} := {}^t(g_1, g_2, g_3)$ は 3 次正方行列 $A = (\alpha_{ij})_{0 \le i, j \le 2}$ およびベクトル $\mathbf{y} := {}^t(y^2, y, 1)$ 、 $\bar{\mathbf{x}} := {}^t(\bar{x}^2, \bar{x}, 1)$ を用いて

$$f = Ay \times By, \qquad g = {}^t A\bar{x} \times {}^t B\bar{x}$$

と定めるものとする.

とくに、行列A,Bを次のようにとれば(1)が導かれる.

$$A_{\mathrm{TL}}(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_{\mathrm{TL}}(b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき、スペクトル曲線 γ_1 は次のような $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の 3 次曲線に写る:

$$(x^{2}, x, 1) (A_{TL} + \lambda B_{TL}) \begin{pmatrix} y^{2} \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = bxy^{2} + y^{2} + b\lambda x^{2}y + \lambda xy + ax^{2} + x = 0$$
 (2)

$3 \quad A_1^{(1)}$ 型クラスター代数と QRT 写像

 $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数を定義しよう。はじめに、 $(\mathbb{P},\cdot,\oplus)$ を y_1,y_2 によって生成されるトロピカル半体とする: $\mathbb{P}=\mathrm{Trop}(y_1,y_2)$ 。 \mathbb{P} は乗法・に関して可換群をなす。加法 \oplus は次のように定める:

$$y_1^{m_1}y_2^{m_2} \oplus y_1^{n_1}y_2^{n_2} = y_1^{\min(m_1,n_1)}y_2^{\min(m_2,n_2)}$$

また、 $\mathcal{F} = \mathbb{QP}(x_1, x_2)$ を x_1, x_2 が群環 \mathbb{QP} 上生成する有理函数体とする。 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ をクラスター、 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ を係数とよぶ。また、整数成分をもつ反対称行列

$$\mathcal{B} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

を交換行列とよび、これらの組 (x,y,\mathcal{B}) を種子とよぶ。 $k \in \{1,2\}$ に対し、k 方向の種子の変異 $\mu_k(x,y,\mathcal{B}) = (x',y',\mathcal{B}')$ を次で定める:

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ or } j = k, \\ b_{ij} + [-b_{ik}]_{+} b_{kj} + b_{ik} [b_{kj}]_{+} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$y'_{j} = \begin{cases} y_{k}^{-1} & j = k, \\ y_{j} y_{k}^{[b_{kj}]_{+}} (y_{k} \oplus 1)^{-b_{kj}} & j \neq k, \end{cases}$$

$$x'_{j} = \begin{cases} \frac{y_{k} \prod x_{i}^{[b_{ik}]_{+}} + \prod x_{i}^{[-b_{ik}]_{+}}}{(y_{k} \oplus 1) x_{k}} & j = k, \\ x_{j} & j \neq k \end{cases}$$

ただし, $[*]_{+} = \max[*, 0]$ for $* \in \mathbb{Z}$ とする.

変異 μ_k は対合なので、非自明な変異の列は次のものに限られる。

$$\cdots \xrightarrow{\mu_2} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\mu_1} (\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \mathcal{B}') \xrightarrow{\mu_2} (\boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'', \mathcal{B}'') \xrightarrow{\mu_1} \cdots$$
 (3)

この変異列により得られるクラスターの全体を \mathcal{X} とおき, \mathcal{X} の生成する \mathcal{F} の部分代数 $\mathcal{A} = \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$ をトロピカル係数をもつクラスター代数という.

交換行列 $\mathcal B$ の Cartan 行列 $C(\mathcal B)$ は次のように $A_1^{(1)}$ 型である:

$$C(\mathcal{B}) = (2\delta_{ij} - |b_{ij}|)_{1 \le i,j \le 2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

さらに,非自明な変異列 (3) に現れる交換行列の Cartan 行列はすべて $A_1^{(1)}$ 型であるため,このクラスター代数を $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数とよぶ.

(一般の) クラスター代数は初期クラスターxの Laurent 多項式であることが示されている [2]. また,反対称行列を交換行列とするクラスター代数は正値性をもつことも分かっている [7].

定理 1. $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数 A は初期クラスター x の Laurent 多項式であり、初期係数 y については通常の多項式である:

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{ZP}\left[x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, y_1, y_2\right]$$

また, 各多項式の係数はすべて正である.

いま、 $y_1^{(m)} := y_1^{(m)}$ のように表す。このとき、交換行列 \mathcal{B} の変異は周期 2 をもつ: $\mathcal{B}' = -\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$. 一方、係数およびクラスターは無限周期をもつ。係数 $\mathbf{y}^{(m)}$ を初期係数 y_1, y_2 を用いて表すと次のようになる:

$$y_1^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{y_1^{2n-1}y_2^{2n-2}} & (m=2n), \\ y_1^{2n-1}y_2^{2n-2} & (m=2n+1), \end{cases} \qquad y_2^{(m)} = \begin{cases} y_1^{2n-2}y_2^{2n-3} & (m=2n), \\ \frac{1}{y_1^{2n}y_2^{2n-1}} & (m=2n+1) \end{cases}$$

また,2n+2回変異したクラスター $x^{(2n+2)}$ を2n回の変異 $x^{(2n)}$ で表すと次のようになる:

$$x_1^{(2n+2)} = \frac{\left(x_2^{(2n)}\right)^2 + y_1^{2n-1}y_2^{2n-2}}{x_1^{(2n)}}, \qquad x_2^{(2n+2)} = \frac{\left(x_1^{(2n+2)}\right)^2 + y_1^{2n}y_2^{2n-1}}{x_2^{(2n)}} \tag{4}$$

ここで、新しい変数 z^n, w^n を導入する:

$$z^{n} := \frac{x_{1}^{(2n)}}{(y_{1}y_{2})^{n}}, \qquad w^{n} := \frac{x_{2}^{(2n)}}{(y_{1}y_{2})^{n}} \quad (n \ge 1), \quad z^{0} := \frac{x_{1}}{y_{1}(y_{2})^{2}}, \quad w^{0} := \frac{x_{2}}{y_{2}}$$

(4) より、これらは次の関係式をみたす:

$$z^{n+1} = \frac{y_1 y_2^2 (w^n)^2 + 1}{y_1^2 y_3^3 z^n}, \qquad w^{n+1} = \frac{y_1^2 y_2^3 (z^{n+1})^2 + 1}{y_1 y_2^2 w^n}$$

このとき、写像 $(z^n,w^n)\mapsto (z^{n+1},w^{n+1})$ は QRT 写像に他ならない。実際、次の行列の組を与えればよい。

$$A_{\mathrm{CA}}(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_1^2 y_2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ y_1 y_2^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B_{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また、QRT 写像の不変曲線は次のような2次曲線になる:

$$y_1 y_2^2 w^2 + \lambda z w + y_1^2 y_2^3 z^2 + 1 = 0 (5)$$

したがって,楕円曲線の加法構造は退化しており, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異の幾何学的描像は明らかではない.

$oldsymbol{4}$ 周期離散戸田格子と $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の対応

N=1 の周期離散戸田格子と $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数はそれぞれ QRT 写像として実現できることが分かった。この事実から次の定理がしたがう。

定理 2 ([8] Theorem 3). 次の行列の組で与えられる QRT 写像をそれぞれ φ_{TL} , φ_{CA} とおく:

$$\begin{cases}
A_{\text{TL}}(a,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{\text{TL}}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\
A_{\text{CA}}(a^2\xi, 1/a\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a/\xi \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\xi & 0 & 1 \end{pmatrix}, B_{\text{CA}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

このとき、 $\varphi_{\mathrm{CA}}^n(\xi,\eta) = \left(\xi^{(n)},\eta^{(n)}\right)$ とすると、次が成り立つ:

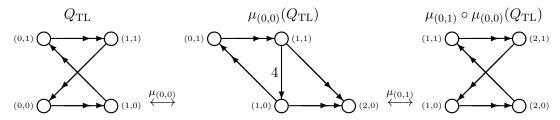
$$\xi \varphi_{\mathrm{TL}}^{2n}(\xi, \eta) = \xi^{(n)} \varphi_{\mathrm{CA}}^{n}(\xi, \eta) = \left(\left(\xi^{(n)} \right)^{2}, \xi^{(n)} \eta^{(n)} \right) \quad \text{for } n \ge 0$$

この定理より、周期離散戸田格子 χ_1 を用いて $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異を表すことが可能になる。すなわち、楕円曲線 (2) 上の点の加法の 2 次曲線 (5) 上の点の運動への退化極限 $(b\to 0)$ として $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異を理解できる。

5 まとめ

 $A_N^{(1)}$ 型アフィン Lie 代数に対応する離散戸田格子(周期離散戸田格子)の時間発展は超楕円曲線の加法に他ならず,とくに N=1 の場合,楕円曲線の加法となる。QRT 写像は楕円曲線の加法の定める力学系の一般的形式であるため, $A_1^{(1)}$ 型離散戸田格子は QRT 写像として実現できる。一方, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異も QRT 写像として同様に実現可能であるため,QRT 写像を通して周期離散戸田格子と $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の対応関係を構築できる。 $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異に対応する QRT 写像の不変曲線は 2 次曲線へ退化しており,楕円曲線の加法としての構造は見えなくなっているが,この離散戸田格子との対応関係を通して, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の変異の幾何学的解釈が得られる。

大久保により得られた離散戸田格子とクイバーとの対応関係において, $A_1^{(1)}$ 型の場合には次のようなクイバー Q_{TL} の変異が離散戸田格子の時間発展に対応する:



ただし,交換行列とクイバーの 1 対 1 対応を通して,クイバーの変異を定める [2,9]. また,矢の隣の数字 4 は矢の本数を表す.一方, $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数に付随するクイバー $Q_{\rm CA}$ の変異は次のようになる:

$$Q_{\mathrm{CA}}$$
 $\mu_{1}(Q_{\mathrm{CA}})$
 $\mu_{1}(Q_{\mathrm{CA}})$

初期クイバーを Q_{TL} とする長さ 2 の変異列 $\mu_{(0,1)}\circ\mu_{(0,0)}$ (すなわち,左端の Q_{TL} から右端の $\mu_{(0,1)}\circ\mu_{(0,0)}(Q_{TL})$ への変異)を考えると,そこに現れるランク 2 の部分クイバーはすべて Q_{CA} である.これは,定理 2 において,離散戸田格子の二階の時間発展と $A_1^{(1)}$ 型クラスター代数の 1 回の変異が関係づけられることと対応している.このようにクイバーの変異から見ても,定理 2 のような主張が成り立つことは自然である.さらに,クイバー $\mu_{(0,0)}(Q_{TL})$ にはランク 2 の部分クイバーとして $A_2^{(2)}$ 型が現れるが,この事実と $A_1^{(1)}$ 型離散戸田格子の時間発展との関係についてはよく分かっておらず,今後の課題である.

謝辞 本研究は科学研究費補助金(基盤研究(C)課題番号26400107)の助成を受けている.

参考文献

- [1] O. I. Bogoyavlensky, Comm. Math. Phys. 51 (1976)
- [2] S. Fomin and A. Zelevinsky, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002)
- [3] M. Gross, P. Hacking, S. Keel and M. Kontsevich, arXiv:1411.1394v2 (2014)
- [4] R. Hirota, S. Tsujimoto and T. Imai, Future Directions of Nonlinear Dynamics in Physical and Biological Systems, ed P.L. Christiansen, J.G. Eilbeck and R.D. Parmentier, Plenum (1993)
- [5] S. Iwao, J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008)
- [6] M. Kanki, J. Mada and T. Tokihiro, J. Math. Phys. **56** (2015)
- [7] K. Lee and R. Schiffler, arXiv:1306.2415 (2013)
- [8] A. Nobe, J. Phys. A: Math. Theor. 49 (2016)
- [9] N. Okubo, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **B41** (2013)
- [10] Y.B. Suris, The Problem of Integrable Discretization: Hamiltonian Approach, Birkhaüser (2003)
- [11] M. Toda, J. Phys. Soc. Japan 22 (1967)
- [12] T. Tsuda, J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004)
- [13] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, *Physica D* **34** (1989)