新しい箱玉系のルールとその解析

辻本, 諭
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/1832802

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.13-18, 2017-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 03 (pp. 13 - 18)

新しい箱玉系のルールとその解析

辻本 諭（TSUJIMOTO Satoshi）

（Received 14 March 2017; Accepted 23 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

新しい箱玉系のルールとその解析

京都大学大学院情報学研究科　辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)

概　要　最近の研究の中で，高橋・薩摩の箱玉系の有限オートマトン表示に対する考察の中から，新しい箱玉系のルールがいくつか見出されている．本稿では，“箱飛ばしルール” と “空箱ルール” のそれぞれを導入する．特に，一つ飛ばしルールで与えられる箱玉系については，その線形化の手続きについて紹介する．

1　はじめに

高橋・薩摩による箱玉系とその運搬車ルールによる拡張 [1, 2] は，超離散可積分系の最も基本的なモデルの一つであり，可積分系の理論のみならず，組合せ論など様々な観点から研究されてきた．最近の研究においても，オートマタ群の観点を導入することで Lamplighter 群との関係などが議論されている [3]．さらに，箱玉系のオートマトンとしての性質に注目することで，ソリトン・オートマトンに必要とされる条件を明らかにすることで，高橋・薩摩の箱玉系以外のソリトン性を有するオートマトンが見つかっている．例えば，$\{0,1\}$ 文字列上のオートマトンの状態数を 3 に限ると，ソリトン性を有するオートマトンは，同値なものを除いて図 1 から図 3 のみであることが明らかになってきた [4]．高橋・薩摩の箱玉系の運搬車拡張が有限オートマトンによって記述できることは知られており，これに対応するのが図 1 の運搬車容量 2 の箱玉系 BBS(2) である．以

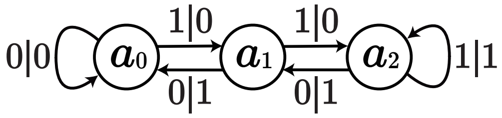

図 1: BBS(2) の状態遷移図

降，運搬車容量 k の箱玉系を BBS(k)，運搬車容量に制限の無い高橋・薩摩の箱玉系を BBS(∞) で表すことにする．また．残りの図 2 および図 3 に対応する箱玉系のルールをそれぞれ BBS-S(2) と BBS-V(2) と呼び，次節以降でその詳細について説明を加える．

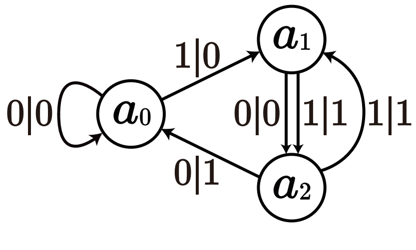

図 2: BBS-S(2) の状態遷移図

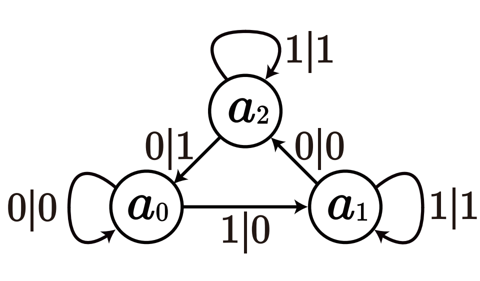

図 3: BBS-V(2) の状態遷移図

2　箱玉系のオートマトン表示

有限オートマトンの一つであるミーリ・オートマトン (mealy automaton) を用いて，運搬車容量 k の箱玉系 BBS(k) のオートマトン表示を与える．

定義 2.1. オートマトン $\mathscr{A}$ は以下の 4 つ組 (Q,S,ϕ,ψ) によって定められる．

- 有限の状態集合 $Q=\{a_0,a_1,\ldots,a_{\ell-1}\}$
- 入力および出力文字集合 $S=\{0,1,\ldots,d-1\}$
- 状態遷移関数 $\phi:Q\times S\to Q$
- 出力関数 $\psi:Q\times S\to S$

特に，$|Q|=\ell,|S|=d$ の時，$\mathscr{A}$ を (ℓ,d) 型オートマトンと呼ぶ．また，オートマトン $\mathscr{A}$ は，状態遷移図と呼ばれるラベル付け有向グラフを用いて表すことができる．このラベル付け有向グラフは，各状態を頂点に対応させ，状態 $q,r\in Q$ と入力文字 $i\in S$ との間で $\phi(q,i)=r$ が成り立つとき，状態 q から状態 r を向き付けられた辺で結び，この有向辺に入出力対応 $i\mid\psi(q,i)$ をラベル付けすることで得られる．

ここで定義したオートマトンに初期状態を付加することで，文字列への標準的な作用を定めることができる．文字集合 S から生成される文字列の集合 X_S を

$$X_S=\{(s_0,s_1,s_2,\ldots)\mid s_i\in S\}.$$

で定義する．このとき，初期状態として $q\in Q$ を選ぶことにより，任意の $\bar{s}=(s_0,s_1,s_2,\ldots)\in X_S$ に対して，X_S 上の写像

$$\mathscr{A}_q:X_S\to X_S$$

を

$$s_i'=\psi(q_i,s_i),\quad q_{i+1}=\phi(q_i,s_i)\ \ (q_0=q)$$

によって，$\mathscr{A}_q(\bar{s})=(s_0',s_1',\ldots)$ と定めることができる．これにより，初期状態の列 $\bar{q}^j=(q^0,\ldots,q^j)\in Q^{j+1}$ から，時間発展を

$$\mathscr{A}_{\bar{q}^j}=\mathscr{A}_{q^j}\circ\cdots\circ\mathscr{A}_{q^0}:X_S\to X_S.$$

によって定めることができる．以降，文字列 $(s_0,s_1,s_2,\ldots)$ を $s_0s_1s_2\cdots$ と簡潔に表記する．

定義 2.2. 次の 3 つの性質を満足するオートマトン $\mathscr{A}=(Q,S,\phi,\psi)$ を LBP オートマトンと呼ぶ．

1. 粒子性 (particle preserving). 時間発展で文字 1 の個数が不変．
2. 全単射性 (bijective). $(\psi,\varphi):Q\times S\to S\times Q$ が全単射．
3. 局所相互作用 (local interaction). $0\in S,a_0\in Q$ とし，S 上の任意の有限の長さの文字列 u,v が十分な長さの 0 列で離れているとする．このとき，$\mathscr{A}_{a_0}$ の作用で，u,v は相互に影響を与えない．つまり，文字列 u の長さ length(u) および文字列の 1 シフト $\sigma:X_s\to X_s;s_0s_1s_2\cdots\mapsto s_1s_2\cdots$ を用いれば，
$$\sigma^{\mathrm{length}(u)+r}(\mathscr{A}_q(u0^rv0^{\mathbb{N}}))=\mathscr{A}_{a_0}(v0^{\mathbb{N}})$$
を満足する $r\in\mathbb{N}$ が存在する．

以上より，運搬車容量 k の箱玉系 BBS(k) は，状態遷移図 4 で定まるオートマトンによって与えられ [3]，$(k+1,2)$ 型 LBP オートマトンとなることが確かめられる．

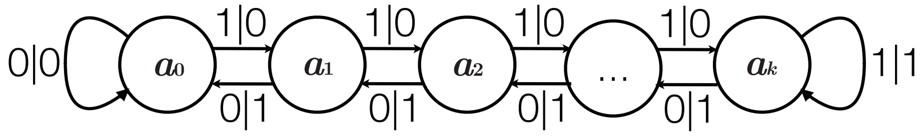

図 4: BBS(k) を表す状態遷移図

初期状態を a_0 とした時の時間発展例を次にあげる．

$$\mathscr{A}_{a_0}(00111001011000000000\cdots) = 00000110100111000000\cdots$$
$$\mathscr{A}_{a_0}^2(00111001011000000000\cdots) = 00000001011000111000\cdots$$
$$\mathscr{A}_{a_0}^3(00111001011000000000\cdots) = 00000000100110000111\cdots$$

3 (3,2) 型 LBP オートマトンとその一般化ルール

最近の研究で，運搬車容量 2 の箱玉系をその中に含む (3,2) 型 LBP オートマトンは，同型を除いて図 1 から図 3 の 3 つしかないことが明らかになっている [4].

- BBS(2) : 運搬車容量 2 の箱玉系 (図 1).
- BBS-S(2) : 一つ飛ばしルールを導入した運搬車容量 1 の箱玉系 (図 2).
- BBS-V(2) : 2 番目空箱ルールを導入した運搬車容量 1 の箱玉系 (図 3).

以下，BBS-S(2) と BBS-V(2) のそれぞれの自然な一般化ルールを導入する．

BBS-S($m+1$)：m 箱飛ばしルール

容量 1 の運搬車を考える．時刻 t において，運搬車は左端から出発し，以下のルールに従い左から右に移動させる．運搬車に玉を載せておらず，運搬車の右側に玉が入っている箱がなくなった時点で，時刻 t を $t+1$ として，運搬車を左端に移動させ，以下の手続きを繰り返す．

1. 空の運搬車は，玉の入っている箱が見つかるまで，右に 1 つずつ移動する．玉の入っている箱に到達すると，空の運搬車は玉を運搬車に運び入れ，以下の手続き 2 に従う．
2. 玉を載せている運搬車は，移動先の箱に空きが見つかるまで，右に $m+1$ 箱ずつ移動する．移動先が空箱の場合には玉を箱におろし，空の運搬車に対する手続き 1 に戻る．

BBS-V(k)：k 番目空箱ルール

BBS-S($m+1$)：m 箱飛ばしルールにおいて，玉を載せている運搬車が従う手続き 2 を

2. 玉を載せている運搬車は，玉を載せた箱の右から数えて k 番目の空箱まで移動させる．移動後，空き箱に玉をおろし，空の運搬車に対する手続き 1 に戻る．

とする．

ここで，BBS-V(k) の局所ルールを与えるオートマトンについては，由良による先行研究 [5] があり，超離散 Hungry Lotka-Volterra 方程式との対応関係が明らかになっていることを注意しておく．

4　箱玉系 BBS-S(2) の線形化

高橋・薩摩の箱玉系も含め，運搬車容量 k の箱玉系 BBS(k) は，KKR bijection の下で線形化され，初期値問題を解くことができることが知られている [6, 7, 8]．BBS-S(2) および BBS-V(2) に対しても同様の手続きが可能であり，ここでは BBS-S(2) の線形化の手続きについて紹介する．

はじめに，$S=\{0,1\}, X=\{s_0s_1s_2\cdots\in S^{\mathbb{N}}\mid \sum_{j=0}^{\infty}s_j<\infty\}, Y=\{(t_1,t_2,\ldots)\mid t_j\in\mathbb{N}, t_1\le t_2\le\cdots<\infty\}$ とする．このとき，手続き $U:X\to Y\times Y$ を導入する．

手続き U

1. $\bar{s}\in X$ に対して，左端から順に文字列の置換

$$\begin{cases} 11\mapsto a \\ 10\mapsto b \end{cases}$$

を繰り返し適用する．これにより，文字集合 $\{0,a,b\}$ 上の文字列が得られる．例えば，

$$001110011000\cdots\mapsto 00ab0a000\cdots$$
$$11000111110110110010100\cdots\mapsto a000aaba0a00bb0\cdots$$

となる．

2. 1. の手続きで得られた $\{0,a,b\}$ 上の文字列を $\bar{s}'$ とする．ここで，変数 α_j によって，左端と左から j 番目の a の間にある 0 と b の文字数を表す．また，変数 β_j によって，左端と左から j 番目の b の間にある 0 の文字数を表す．これらの変数を用いて，数列 $\overline{\alpha},\overline{\beta}$ を

$$\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots),\quad \overline{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$$

によって定める．このとき，$\overline{\alpha}$ および $\overline{\beta}$ は構成法から明らかに単調増大な整数列である．例えば，$\bar{s}'=a000aaba0a00bb0\cdots$ から

$$\overline{\alpha}=(0,3,3,4,5),\quad \overline{\beta}=(3,6,6)$$

が得られる．

この手続きの逆は，半無限零列 $000\cdots$ に対して，$\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots)$ および $\overline{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$ の全ての要素に応じて，

- α_j：左から α_j+1 番目の 0 の左に文字列 11 を挿入
- β_j：左から β_j+j 番目の 0 の左に文字 1 を挿入

を適用することで得られる．この手続き U とその逆は一意的であり，$X\cong Y\times Y$ の一対一対応を与えている．

ここで導入した手続き $U:X\to Y\times Y$ を用いることで，X 上の BBS-S(2) による時間発展は，$Y\times Y$ 上の時間発展として表すことができ，さらにその時間発展が線形化されるという顕著な性質をもつ．平行移動を表す Y 上の演算子 $T:Y\to Y;(t_1,t_2,t_3,\ldots)\mapsto(t_1+1,t_2+1,t_3+1,\ldots)$ を導入し，$(T^k,T^j):Y\times Y\to Y\times Y;(\overline{a},\overline{b})\mapsto(T^k(\overline{a}),T^j(\overline{b}))$ とする．このとき，

$$U\circ\mathscr{A}_{a_0}=(T,T^2)\circ U$$

が成り立ち，BBS-S(2) による X 上の時間発展は $Y \times Y$ において線形化される．例として，初期文字列 $\overline{s} = 1000010101100011110001101100000000000000000000\cdots$ の時間発展 $\overline{s}^{(n)} = \mathscr{A}_{a_0}^{n}(\overline{s}), n = 0,1,2,3,\ldots$ を以下にあげる．速度 2 で動いている単独の 1 が，複数個の連続した 1 を追い越している様子を観察することができる．

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{s}^{(0)} & = & 10000101011000111100000000000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(1)} & = & 00100000101110001111000000000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(2)} & = & 00001000011101001111000000000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(3)} & = & 00000010001101010111100000000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(4)} & = & 00000000100110010111110000000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(5)} & = & 00000000001011000111110100000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(6)} & = & 00000000000011100011110101000000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(7)} & = & 00000000000001101001111001010000000000000\cdots \\
\overline{s}^{(8)} & = & 00000000000000110010111100010100000000000\cdots \\
\overline{s}^{(9)} & = & 00000000000000011000111110000101000000000\cdots \\
\overline{s}^{(10)} & = & 00000000000000001100011110100001010000000\cdots
\end{array}
$$

ここで各 $\overline{s}^{(n)}$ に対して，$U(\overline{s}^{(n)}) = (\overline{\alpha}^{(n)}, \overline{\beta}^{(n)})$ を計算すると，

$$
\begin{array}{rcl}
(\overline{\alpha}^{(0)}, \overline{\beta}^{(0)}) & = & ((6,9,9),(0,3,3)) \\
(\overline{\alpha}^{(1)}, \overline{\beta}^{(1)}) & = & ((7,10,10),(2,5,5)) \\
(\overline{\alpha}^{(2)}, \overline{\beta}^{(2)}) & = & ((8,11,11),(4,7,7)) \\
 & \vdots & \\
(\overline{\alpha}^{(10)}, \overline{\beta}^{(10)}) & = & ((16,19,19),(20,23,23))
\end{array}
$$

が得られ，$Y \times Y$ 上で $(\overline{\alpha}^{(n)}, \overline{\beta}^{(n)}) = ((n+6, n+9, n+9), (2n, 2n+3, 2n+3))$ と線形化されることが確かめられる．

5 最後に

本稿では，運搬車容量制限付き箱玉系といくつかの性質を共有する箱玉系として，m 箱飛ばしルールと k 番目空箱ルールを導入した．特に，$m = 1$ の一つ飛ばしルールの箱玉系については，その線形化の手続きを与えた．現在までの研究の中で，本稿で取り上げたオートマトン以外についても同様の議論が可能なことがわかってきており，対応する離散可積分系との関係も含めその全体像を明らかにしていきたい．

参考文献

[1] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990), 3514–3519.

[2] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *Box and ball system with a carrier and ultradiscrete modified KdV equation*, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997), 733–739.

[3] T. Kato, S. Tsujimoto, A. Zuk, *Spectral analysis of transition operators, Automata groups and translation in BBS*, Comm. Math. Phys. **350** (2017), 205–229, arXiv:1406.5557 [math.SP]

[4] 辻本 諭, *On soliton automata*, 京都大学 RIMS 研究集会「可積分系数理の現状と展望」(2016.9.7, 於: 京都大学益川ホール)

[5] 由良 文孝, シーケンシャルオートマトンと可積分系, 数理解析研究所講究録 **1473** (2006), 21–40.

[6] 国場敦夫, 尾角正人, 高木太一郎, 山田泰彦, 箱玉系の頂点作用素と分配関数, 数理解析研究所講究録 **1302** (2003), 91-107.

[7] T. TAKAGI, *Inverse scattering method for a soliton cellular automaton*, Nucl. Phys. **B707** (2005), 577-601.

[8] A. KUNIBA, M. OKADO, R. SAKAMOTO, T. TAKAGI AND Y. YAMADA, *Crystal interpretation of Kerov-Kirillov-Reshetikhin bijection*, Nucl. Phys. **B740** (2006), 299-327.