

Jeu de taquin slideと超離散KP方程式

片山, 陽介
立教大学大学院理学研究科

笥, 三郎
立教大学理学部

<https://doi.org/10.15017/1807774>

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (24), pp.133-138, 2015-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン :
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 24 (pp. 133 - 138)

Jeu de taquin slide と超離散KP方 程式

片山 陽介 (KATAYAMA Yosuke), 笈 三郎 (KAKEI
Saburo)

(Received 15 January 2015; accepted 10 March 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

Jeu de taquin slide と超離散 KP 方程式

立教大学大学院理学研究科 片山 陽介 (KATAYAMA, Yosuke)

立教大学理学部 笈 三郎 (KAKEI, Saburo)

概要

三上・太田は組合せ論における jeu de taquin slide の操作を差分方程式で表し、超離散 KP 方程式との関係を議論した。本研究では三上・太田の結果に若干の変更を加え、逆操作にも適用可能な方程式を提案する。

1 はじめに

Young 図形とは、単位長さの正方形の箱を左端に揃えて、上から下に箱の個数が (広義) 単調減少となるように隙間なく並べてできる図形のことを言う。また Young 図形に数字を入れたものを Young 盤という [1, 9, 10]。Schützenberger は、この Young 盤の箱のある規則に従って縦や横に移動させる jeu de taquin slide という組み合わせ論的な操作を導入した [8]。三上・太田は jeu de taquin の操作を記述する差分方程式を導出し、その方程式と超離散 KP 方程式との関係を議論した [4]。

Jeu de taquin slide は可逆な操作であり、逆操作を行うことが可能である。しかし、三上・太田の差分方程式はそのままでは逆操作を行うことができない。そこで以下では、三上・太田が発見した差分方程式に若干の変更を加え、逆操作にも適用可能な方程式を提案する。まずは Young 図形についての基本的な定義をいくつか紹介し、jeu de taquin slide の操作方法について説明する [1, 9]。

定義 1. n 次の Young 図形

箱を上と左に詰めて並べた図形を Young 図形という (図 1 の λ や μ)。Young 図形の箱の個数が n 個であるとき、 n 次の Young 図形という。

定義 2. Skew Young 図形 λ/μ

Young 図形 λ から、それよりも小さな Young 図形 μ を取り除いた図形 λ/μ を skew Young 図形という (図 2)。このとき、取り除かれた μ を empty box という。特に、 μ_i は i 行目の empty box の個数を表す。

定義 3. Young 盤

Young 図形に数字を入れたものを Young 盤といい、Young 盤の中に各行、各列において狭義単調増加となるように数字を入れたものを標準盤という (図 3)。以下では標準盤のみを扱う。

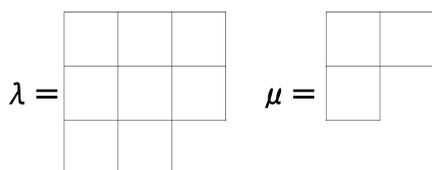


図 1 Young 図形の例

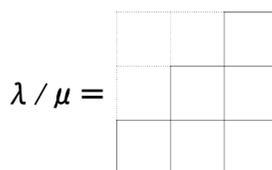


図 2 Skew Young 図形の例

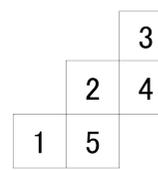


図 3 標準盤の例

次に jeu de taquin slide の操作方法について説明する。まず slide を開始する箱 b を決める。 b は empty box の中で右と下に数字の入っている箱があるものに限る。その b について下の箱 (α) と右の箱 (β) を比較し、 $\alpha < \beta$ なら α と入れ替え、 $\alpha > \beta$ なら β と入れ替える (つまり、数字が小さい方と b を入れ替える操作となる: 図 4)。この操作を右と下に箱がなくなるまで続ける。ただし、片方に箱がなければある方と入れ替える。右と下に箱がなくなる状態まで slide を行ったら、最後に empty box b を取り除く。以上の操作を図 3 の skew

Young 盤に適用すると, 図 5 のようになる.

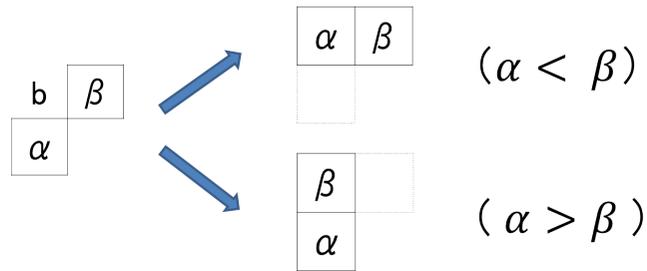


図 4 Slide による箱の動き

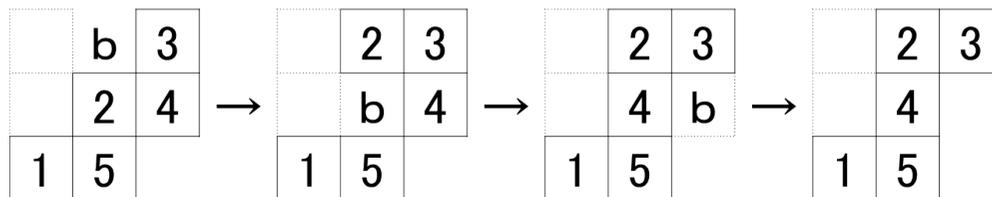


図 5 Slide の例

ある skew Young 盤が与えられたとき, すべての empty box に対して slide を行うと, skew ではない Young 盤ができる. この Young 盤は slide を行う順に依らず一意的に定まることが知られている [1].

2 Jeu de taquin slide を記述する差分方程式

ここでは先に紹介した組合せ論における jeu de taquin slide の操作が差分方程式で表されることを紹介する. そのためにまず与えられた skew 標準盤に対して, 整数を成分とする行列の成分 $(f_{i,j})$, $(f'_{i,j})$ を以下のように定める. *1

- $f_{i,j}$: slide 前における, i 行目までにある j 以下の箱の個数
- $f'_{i,j}$: slide 後における, i 行目までにある j 以下の箱の個数

ただし, $1 \leq i$ かつ $1 \leq j$ であり, $f_{0,j} = f'_{0,j} = f_{i,0} = f'_{i,0} = 0$ を満たすものとする. 例えば, 図 5 の例に対する $(f_{i,j})$, $(f'_{i,j})$ は, 図 6 のようになる.

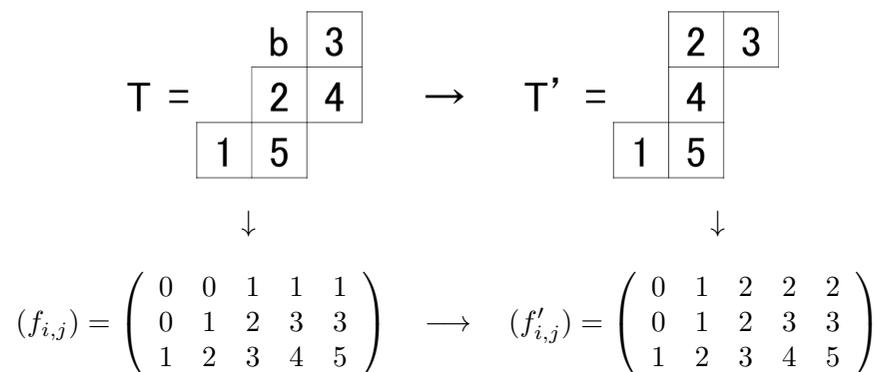


図 6 整数行列 $(f_{i,j})$, $(f'_{i,j})$ の例

*1 三上・太田は $f_{i,j}$ を $i-1$ 行目までにある j 以下の箱の個数, $f'_{i,j}$ を $i-2$ 行目までにある j 以下の箱の個数と定義した. ここでは後の便宜のため上のように定義する.

こうして、整数行列 $(f_{i,j})$ と分割 μ の組 $((f_{i,j}), \mu)$ と、skew 標準盤 T とが 1 対 1 に対応する。この対応を用いて Young 盤を整数行列で表記することで、jeu de taquin slide を差分方程式で表すことができる。

命題 1 (三上・太田方程式 [4]). T を λ/μ 型の skew 標準盤とし、jeu de taquin slide を開始する箱を b とする。 $\mu' = \mu \setminus \{b\}$ とするとき、次の等式が成立する:

$$f_{i,j-1} + f'_{i,j} = \max(f_{i,j} + f'_{i,j-1}, f_{i+1,j} + f'_{i-1,j-1} + \mu'_{i+1} - \mu'_i). \quad (1)$$

ここまでは順方向の slide に関して記述してきたが、jeu de taquin slide には逆操作にあたる“逆 slide”という操作もある。これはある empty box に対して左の箱と上の箱の数字を比較し、大きい方と入れ替える操作である。この逆 slide という操作に (1) が適用できるのかを考えてみよう。すなわち、 $(f'_{i,j}), \mu'$ から $(f_{i,j}), \mu$ を定める、という問題を考える。すぐ分かるように、 $(f'_{i,j}), \mu'$ から $(f_{i,j})$ を定めることはできるが、 $(f'_{i,j}), \mu'$ からどのように μ を定めればよいか、方程式 (1) からは明らかではない。そこで以下では三上・太田方程式に若干の変更を加え、逆 slide にも適用可能な方程式を導出する。

まず、skew 標準盤に対応付ける整数行列の定義を少し変更する。すなわち、与えられた skew 標準盤に対して、整数行列 $(g_{i,j}), (g'_{i,j})$ を以下のように定める (ただし、empty box の中には数字 0 が入っているものとする):

- $g_{i,j}$: slide 前における、 i 行目までにある 0 を含む j 以下の箱の個数、
- $g'_{i,j}$: slide 後における、 i 行目までにある 0 を含む j 以下の箱の個数。

ただし、 $1 \leq i$ かつ $0 \leq j$ であり、 $g_{0,j} = g'_{0,j} = 0$ を満たすものとする。例えば、図 5 の例に対する $(g_{i,j}), (g'_{i,j})$ は、図 7 のようになる。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} & & \mathbf{b} \\ & & \mathbf{3} \\ & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \end{array} & \rightarrow & \begin{array}{ccc} & & \mathbf{2} \\ & & \mathbf{3} \\ & \mathbf{4} & \\ \mathbf{1} & \mathbf{5} & \end{array} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (g_{i,j}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} & \rightarrow & (g'_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

図 7 整数行列 $(g_{i,j}), (g'_{i,j})$ の例

以上のように行列の定義を少し変更すると、jeu de taquin を表す方程式は以下のようにになる。

命題 2. 上で定義した $(g_{i,j}), (g'_{i,j})$ は、次の方程式を満たす:

$$g_{i,j-1} + g'_{i,j} = \max(g_{i,j} + g'_{i,j-1}, g_{i+1,j} + g'_{i-1,j-1}). \quad (2)$$

(1) と (2) の方程式を比較すると非常に似ているように見えるが、以下に示すように (1) と (2) は異なる方程式である。 $f_{i,j}$ と $g_{i,j}$ の定め方から、

$$g_{i,j} = f_{i,j} + \sum_{k=1}^i \mu_k \quad (3)$$

が成り立つ。(3) を (1) に代入すると、

$$\begin{aligned} & g_{i,j-1} - \sum_{k=1}^i \mu_k + g'_{i,j} - \sum_{k=1}^i \mu'_k \\ &= \max \left(g_{i,j} - \sum_{k=1}^i \mu_k + g'_{i,j-1} - \sum_{k=1}^i \mu'_k, g_{i+1,j} - \sum_{k=1}^{i+1} \mu_k + g'_{i-1,j-1} - \sum_{k=1}^{i-1} \mu'_k + \mu'_{i+1} - \mu'_i \right) \end{aligned} \quad (4)$$

となり、これを整理すると、

$$g_{i,j-1} + g'_{i,j} = \max(g_{i,j} + g'_{i,j-1}, g_{i+1,j} + g'_{i-1,j-1} - \mu_{i+1} + \mu'_{i+1}) \quad (5)$$

が得られるが、(2) とは一致しない。

また (3) を (2) に代入すると、

$$\begin{aligned} & f_{i,j-1} + \sum_{k=1}^i \mu_k + f'_{i,j} + \sum_{k=1}^i \mu'_k \\ &= \max\left(f_{i,j} + \sum_{k=1}^i \mu_k + f'_{i,j-1} + \sum_{k=1}^i \mu'_k, f_{i+1,j} + \sum_{k=1}^{i+1} \mu_k + f'_{i-1,j-1} + \sum_{k=1}^{i-1} \mu'_k\right) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、これを整理すると、

$$f_{i,j-1} + f'_{i,j} = \max(f_{i,j} + f'_{i,j-1}, f_{i+1,j} + f'_{i-1,j-1} + \mu_{i+1} - \mu'_i) \quad (7)$$

が得られるが、やはり (1) とは一致しない。これらの結果から (1) と (2) とは等価ではないことがわかる。

(2) の証明に向けて、新たに記号 $\lambda_i^{(j)}, \lambda_i^{(j)'}$ を以下のように定義する。

- $\lambda_i^{(j)}$: slide 前における、 i 行目にある 0 を含む j 以下の箱の個数
- $\lambda_i^{(j)'}$: slide 後における、 i 行目にある 0 を含む j 以下の箱の個数

このとき、 $\lambda^{(j)} = \{\lambda_1^{(j)}, \lambda_2^{(j)}, \dots\}$ として作られる分割は、(0 を含む) j 以下の数字の箱からなる Young 図形と対応する。こうして Young 図形の増大列 $\lambda^{(0)} \subset \lambda^{(1)} \subset \lambda^{(2)} \subset \dots \subset \lambda^{(N)}$ が得られる ($\lambda^{(0)} = \mu, \lambda^{(N)} = \lambda$)。

標準盤の定義より、 $\lambda_{i+1}^{(j)} \leq \lambda_i^{(j)}$ であり、移動前後で $\lambda_i^{(j)' } \leq \lambda_i^{(j)}$ が成り立つことは明らかであろう。さらに (2) の証明に用いる補題を 1 つ紹介する。

補題 1. $\lambda_i^{(j)' } \geq \lambda_{i+1}^{(j)}$ ($\forall i, j$)

補題 1 の証明. 示したい式は次と等価である：

$$\lambda_i^{(j)} - \lambda_{i+1}^{(j)} \geq \lambda_i^{(j)' } - \lambda_i^{(j)' } \quad (8)$$

ここで (8) の右辺 $\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(j)' }$ の値は 0 または 1 であり、 $\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(j)' } = 0$ のとき、 $\lambda^{(j)}$ が標準盤であることから、示したい式 $\lambda_i^{(j)} - \lambda_{i+1}^{(j)} \geq 0$ は自明に成立する。そこで、 $\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(j)' } = 1$ のとき、 $\lambda_i^{(j)} \neq \lambda_{i+1}^{(j)}$ を言えば良い。

ここで背理法を用いることにして、 $\lambda_i^{(j)} - \lambda_i^{(j)' } = 1$ かつ $\lambda_i^{(j)} = \lambda_{i+1}^{(j)}$ を仮定する。このとき、slide の前後で第 i 行が 1 だけ減少するので他の行の長さは変化せず、特に $\lambda_{i+1}^{(j)} = \lambda_{i+1}^{(j)' }$ である。すると、

$$\lambda_{i+1}^{(j)} = \lambda_{i+1}^{(j)' } \leq \lambda_i^{(j)' } = \lambda_i^{(j)} - 1 = \lambda_{i+1}^{(j)} - 1 \quad (9)$$

となり、矛盾が生じる。 □

ここで命題 2.2 の証明に戻る。

命題 2.2 の証明. (2) の両辺から $g_{i,j} + g'_{i,j-1}$ を引くと

$$(g'_{i,j} - g'_{i,j-1}) - (g_{i,j} - g_{i,j-1}) = \max(0, (g_{i+1,j} - g_{i,j}) - (g'_{i,j-1} - g'_{i-1,j-1})) \quad (10)$$

となる。関係式 $g_{i,j} = \sum_{k=1}^i \lambda_k^{(j)}$ が成り立つことに注意して、 $\lambda_i^{(j)}$ を用いて表すと

$$(g'_{i,j} - g'_{i,j-1}) - (g_{i,j} - g_{i,j-1}) = \max(0, \lambda_{i+1}^{(j)} - \lambda_i^{(j-1)' }) \quad (11)$$

となる. このように変形することで, (11) の左辺は以下のように組合せ論的な意味づけができる:

$$(11) \text{ の左辺} = (\text{slide 後の } i \text{ 行目までの } j \text{ の数}) - (\text{slide 前の } i \text{ 行目までの } j \text{ の数}) \\ = \begin{cases} 1 & (j \text{ が } i+1 \text{ 行目から } i \text{ 行目に移動}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (12)$$

(11) の右辺 = $\max(0, \lambda_{i+1}^{(j)} - \lambda_i^{(j-1)'})$ が (12) と一致することを調べれば良いが, 以下の 3 つの場合を調べれば十分である:

- (i) j が移動後に i 行目がないとき.
- (ii) j が移動後に i 行目、移動前に $i+1$ 行目にあるとき.
- (iii) j が移動前後で i 行目にあるとき.

これらは補題 1 からすぐに導かれる. □

3 超離散 KP 方程式との関係

この節では, 方程式 (2) と超離散 KP 方程式との関係を扱う. まず広田・三輪方程式 (あるいは離散 KP 方程式) と呼ばれる以下の差分方程式を考える:

$$\begin{aligned} & a_1(a_2 - a_3)\tau(l+1, m, n)\tau(l, m+1, n+1) \\ & + a_2(a_3 - a_1)\tau(l, m+1, n)\tau(l+1, m, n+1) \\ & + a_3(a_1 - a_2)\tau(l, m, n+1)\tau(l+1, m+1, n) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

方程式 (13) において $\tau(l, m, n) = \lambda^{mn} \mu^{ml} \nu^{lm} \tilde{\tau}(l, m, n)$ とおけば, ゲージ変換のパラメータ λ, μ, ν を適当な値を選ぶことで方程式の係数を調整できることが知られている [3]. ここでは, $\lambda = a_1(a_2 - a_3)$, $\mu = -a_2(a_3 - a_1)$, $\nu = a_3(a_1 - a_2)$ として, 以下の方程式を扱うことにする:

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}(l+1, m, n)\tilde{\tau}(l, m+1, n+1) \\ & - \tilde{\tau}(l, m+1, n)\tilde{\tau}(l+1, m, n+1) \\ & + \tilde{\tau}(l, m, n+1)\tilde{\tau}(l+1, m+1, n) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで, $\tilde{\tau}(l, m, n) = f(m, n-1)$, $\tilde{\tau}(l+1, m, n) = f'(m, n-1)$ と書き換えると,

$$\begin{aligned} & f(m+1, n)f'(m, n-1) \\ & - f(m+1, n-1)f'(m, n) \\ & + f(m, n)f'(m+1, n-1) = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

となる. さらに $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}$ によって (i, j) 座標を定め, $f_{i,j} = f(m, n)$ と変数変換すると,

$$f_{i+1,j}f'_{i-1,j-1} - f_{i,j-1}f'_{i,j} + f_{i,j}f'_{i,j-1} = 0 \quad (16)$$

となる. 標準的な手続きに従って $f_{i,j} = \exp(F_{i,j}/\epsilon)$ とし, 極限 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log$ をとると, 以下のように超離散化される [2, 11]:

$$F_{i,j-1} + F'_{i,j} = \max(F_{i,j} + F'_{i,j-1}, F_{i+1,j} + F'_{i-1,j-1}). \quad (17)$$

この意味で, ここでは (17) を超離散 KP 方程式と呼ぶことにする. 超離散 KP 方程式 (17) が, jeu de taquin slide を記述する方程式 (2) と一致していることは明らかであろう.

Skew 標準盤を 1 つ用意すれば, そこに jeu de taquin slide を施すことで方程式 (2) の解を構成できるが, そうして得られた解を“逆超離散化”して広田・三輪方程式 (13) の解を得ることには, 今のところ成功していない.

4 おわりに

本稿では, empty box である μ というパラメータを行列の成分 $g_{i,j}$ の中に組み込むことで, 三上・太田の方程式を, 逆 slide にも適用可能なより簡潔な形に書き換えた. 超離散 KP 方程式との関係を見る上でも, 今回の方程式のほうが直接つながる形をしている. しかし, その対応関係を利用して可積分系的な構造 (例えば解の行列式構造) 等を議論することには, 残念ながら成功していない. また, 我々の方程式が成り立つのは標準盤に限られるため, 同じ数字を 2 つ以上持つ半標準盤における jeu de taquin を記述する方程式を見つけることは, 今後の課題の 1 つに挙げられる.

組合せ論と超離散系との関係は, 近年, 多くの研究がなされてきた分野である. 野海・山田は論文 [5] において, Young 図形に対する別の組合せ論的操作である RSK 対応と, 超離散可積分系との関係を示した. RSK 対応と jeu de taquin とは密接な関係を持つので [1], 野海・山田の結果と今回の結果とが, 何らかの形で結びつくことが期待できる. また, 組合せ論的, 表現論的には, jeu de taquin の様々な拡張が考えられている (例えば文献 [6, 7] では shifted 盤に対するものが導入されている). それらを記述する差分方程式を探すことも, 興味深い課題である.

参考文献

- [1] W. Fulton, *Young tableaux; with applications to representation theory and geometry*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [2] 広田良吾・高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.
- [3] 筧 三郎, 離散可積分系入門, 離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル 2012, MI Lecture Notes, Vol. 40, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, 2012.
- [4] 三上優, Skew Young 盤の jeu de taquin slide と超離散 KP 方程式の関係, 神戸大学大学院修士論文 (平成 18 年 3 月, 指導教員 太田泰広).
- [5] M. Noumi and Y. Yamada, Tropical Robinson-Schensted-Knuth correspondence and birational Weyl group actions, In *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, T. Shoji, M. Kashiwara, N. Kawanaka, G. Lusztig, and K. Shinoda (Eds.), *Adv. Stud. Pure Math.* **40**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004, pp. 371–442.
- [6] B.E. Sagan, Shifted tableaux, Schur Q -Functions, and a conjecture of R. Stanley, *J. Combin. Theory Ser. A* **27** (1979), 10–18.
- [7] B.E. Sagan, The ubiquitous Young tableau, In *Invariant theory and tableaux*, D. Stanton (Ed.), Springer-Verlag, New York (1990), 262–298.
- [8] M.P. Schützenberger, La correspondance de Robinson, In *Combinatoire et représentation du groupe symétrique*, Lecture Notes in Math. **579**, Springer-Verlag (1977), 59–135.
- [9] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 2, Cambridge Univ. Press, 2001.
- [10] 寺田至, ヤング図形のはなし, 日本評論社, 2002.
- [11] 時弘哲治, 箱玉系の数理, 朝倉書店, 2010.