

病理モデルにおける連続型と超離散型との対応関係

関口, 真基
東京都立荻窪高等学校

石渡, 恵美子
東京理科大学

<https://doi.org/10.15017/1807773>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (23), pp.127-132, 2015-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 23 (pp. 127 - 132)

病理モデルにおける連続型と超離散型 との対応関係

関口 真基 (SEKIGUCHI Masaki), 石渡 恵美子 (ISHIWATA
Emiko)

(Received 15 January 2015; accepted 19 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

病理モデルにおける連続型と超離散型との対応関係

東京都立荻窪高等学校 関口 真基 (SEKIGUCHI Masaki)
東京理科大学 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko)

概要 連続型病理モデルを超離散化することで得られる超離散型病理モデルの解の挙動が、もとの連続型モデルと同様に議論できることを示し、解の大域的性質が、連続型モデルと超離散型モデルで対応することを示す。

1 はじめに

自然や人間社会の現象を把握するために、様々な数理モデルが提案されている。多くの数理モデルは微分方程式で表され、固有値やリアプノフ関数などを用いて、その解の安定性を把握することがこれまで行われている。

本報告では、以下の SIR 病理モデルについて取り上げる：

$$\begin{cases} S'(t) = \Lambda - MS(t) - BS(t)I(t - \omega'), \\ I'(t) = BS(t)I(t - \omega') - MI(t) - \Gamma I(t), \\ R'(t) = \Gamma I(t) - MR(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ は、感染する可能性のある感受性保持者、感受性保持者を感染させる力をもつ感染者、感染から回復して感受性保持者や感染者とされない免疫保持者の時間 t における個体数を表す。個体数は感受性保持者として一定の割合 Λ で増加するものとし、一定の割合 M で個体数に比例して減少するものとする。感受性保持者と感染者との接触により感受性保持者が減少し感染者は増加するとし、感染力の強さを B で表す。感染者は一定の割合 Γ により免疫保持者となる。係数 Λ , M , B , Γ は正の実数である。また、感染者が感受性保持者に感染させる力をもつ段階に至るまでに時間差があることを考慮するために、時間遅れを表す非負の実数 ω' を用いる。

一般解を導出することが困難である非線形微分方程式に対しては、平衡点の安定性を解析する試みが多く行われており、大きくは線形化されたときの係数行列の固有値で判別する局所的安定性と、初期値に依存しない大域的安定性に分けられる。近年では、式 (1.1) のような時間遅れを含む数理モデルの大域的安定性の解明が進んでいるが、時間遅れを含まないモデルと比較すると、その解析は困難であることが知られている。特に式 (1.1) に対しては、時間遅れが十分大きいとき、内部平衡点が大域的安定性をもつ条件が未解決問題であった。

McCluskey [2] は式 (1.1) に対して境界平衡点と内部平衡点が大域的漸近安定性をもつ条件を示している。すなわち、式 (1.1) が境界平衡点のみをもつ条件 $\frac{B\Lambda}{M} < M + \Gamma$ を満たすならば、境界平衡点は大域的漸近安定である。一方、式 (1.1) が内部平衡点をもつ条件 $\frac{B\Lambda}{M} > M + \Gamma$ を満たすならば、内部平衡点は大域的漸近安定となる。これらの結果は、平衡点が大域的安定性をもつ条件を完全に明示しただけでなく、時間遅れを含まない場合と同等の結果をもたらした意味でも重要である。

2 離散型 SIR 病理モデル

式 (1.1) のような連続型モデルの解の挙動は、離散化によって得られる差分方程式（離散型モデル）を利用して把握することができる。このように数値計算を活用して現象を把握する手法は多くの分野で活用されているが、連続型ロジスティック方程式に陽的オイラー法を用いるとカオスが

発生するなど，単純な離散化ではもとの連続型モデルの性質を保持することが困難であることが知られている．また，一般的に離散型モデルの解の安定性は，連続型モデルに比べて限定的であることが知られている [1]．これに対し，Mickens [3] が提案している陽的項と陰的項を組み合わせる離散化は安定的な数値計算を実現することが報告されている．ただし，離散型モデルがもとの連続型モデルと同等の性質をもっているかどうかは，改めて解の安定性を調べなければ保証されない．このような問題に対して，[3] の離散化を応用して得られる離散型病理モデルの解の大域的安定性に著者の 1 人は [4] で言及しており，大域的安定性を明示するために連続型モデルにおける解析手法を応用している．また，連続型病理モデルと同等の性質を明示した結果は，様々な連続型病理モデルに応用されている [7]．さらに，式 (1.1) に対して，Enatsu ら [5] は次の離散型 SIR 病理モデルを導出し，その平衡点の大域的安定性を明示している．

$$\begin{cases} \frac{S_{n+1}-S_n}{h} = \Lambda - MS_{n+1} - BS_{n+1}I_{n-\omega}, \\ \frac{I_{n+1}-I_n}{h} = BS_{n+1}I_{n-\omega} - MI_{n+1} - \Gamma I_{n+1}, \\ \frac{R_{n+1}-R_n}{h} = \Gamma I_{n+1} - MR_{n+1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

[5] では，連続型モデル (1.1) に対して用いられているリアプノフ関数を離散型モデル (2.1) に応用することで，[2] で得られた平衡点の大域的漸近安定性と同等の結果を報告している．このように，離散化を工夫し，連続型 SIR 病理モデルでの手法を応用することで，連続型モデルの大域的安定性を保持する離散型 SIR 病理モデルが導出できることは明らかになっている．しかしながら，離散型 SIR 病理モデルの従属変数を離散化することで得られる超離散型 SIR 病理モデルが，もとの連続型病理モデルと同等の解の大域的性質をもっているかどうかは未解明である．

本報告ではまず，超離散型 SIR 病理モデルを提案する．連続型病理モデルを離散化する手法はいくつか知られているが，超離散化をするためには，病理モデルとして最も重要な解の正值性が保たれるように離散化を工夫しなければならない．一般的に超離散型モデルでは，保存量を利用することで解の性質を明らかにしようとするが，今回の超離散型 SIR 病理モデルに対しては，得られた漸化式を逐次計算することで解の漸近挙動を把握する．その結果，初期値に依存しない条件により解の極限挙動を判別することができ，具体的な挙動やそれを導く十分条件がもとの連続型 SIR 病理モデルと密接に対応することが得られる．

3 超離散型 SIR 病理モデル

本節では，連続型 SIR 病理モデル (1.1) に対応する超離散型 SIR 病理モデルを導出し，初期値に依存しない解挙動に関する結果について述べる．

3.1 超離散化

超離散化では以下の式 (3.1) を用いて，通常の実数演算で表された離散型モデルをマックス・プラス代数で表される超離散型モデルに変換することを考える [8]：

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log \left(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon} \right) = \max(a, b). \quad (3.1)$$

ここで， a と b は任意の実数である．例えば， $A+B$ (A と B は正の実数) という加法は $A = e^{a/\epsilon}$ ， $B = e^{b/\epsilon}$ とすると， $\max(a, b)$ となる．注意すべきことは，離散型モデルにおける変数や係数が正の実数であること，そして，減法が変換できないことである．そのため，連続型モデルを離散化して得られる離散型モデルのすべてが超離散化できるわけではない．

式 (1.1) のような連続型病理モデルを超離散化した例として、保存量の存在を明示した結果がある [9]。連続型病理モデルの離散化を工夫し、さらに超離散化することで超離散型病理モデルを導出し、連続型・離散型・超離散型モデルにおいてそれぞれ保存量が存在することを示している。しかしながら、離散型モデルの解が正值性をもつ条件や保存量が存在する条件が限定的であるため、連続型モデルと離散型モデルの対応関係に相当する結果は得られていない。

本報告ではまず、以下の超離散型 SIR 病理モデルを提案する：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max(\lambda, x_n) - \max(0, \mu, \beta + y_{n-\omega}), \\ y_{n+1} = \max(y_n, \beta + x_{n+1} + y_{n-\omega}) - \max(0, \mu, \gamma), \\ z_{n+1} = \max(z_n, \gamma + y_{n+1}) - \max(0, \mu). \end{cases} \quad (3.2)$$

ここで、定数 $\lambda, \mu, \beta, \gamma$ は実数とし、特に $\mu > 0$ とする。また、時間遅れを表す定数 ω は非負の整数とする。離散型モデル (2.1) において $S = e^{x/\epsilon}$, $I = e^{y/\epsilon}$, $R = e^{z/\epsilon}$, $h\Lambda = e^{\lambda/\epsilon}$, $hM = e^{\mu/\epsilon}$, $hB = e^{\beta/\epsilon}$, $h\Gamma = e^{\gamma/\epsilon}$ と変数変換を行い、式 (3.1) を利用することで式 (3.2) は得られる。式 (2.1) の初期値や係数は正の実数を仮定していたが、変数変換で用いる指数部は負の値も取り得るため、超離散型モデル (3.2) での初期値と係数は実数全体を考慮することが自然である。よって、式 (3.2) の初期値は以下のように仮定する：

$$-\infty < x_0 < \infty, \quad -\infty < y_0 < \infty, \quad -\infty < z_0 < \infty. \quad (3.3)$$

また、もし $\mu < 0$ とすると、式 (3.2) の第 1 式を差分方程式に戻す際に、

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{h} = \frac{\Lambda + S_n}{1 + BI_{n-\omega}}$$

となり、個体の減少を考慮しないモデルになってしまうため、 $\mu > 0$ の仮定も自然である。

3.2 解の極限挙動

具体的に、連続型・離散型モデルで着目されてきた、任意の初期値が与えられた場合の超離散型 SIR 病理モデル (3.2) の解の挙動を考える。今回は時間遅れを考慮しない $\omega = 0$ とした超離散型モデル (3.2) のみを扱う。任意の初期値 (3.3) が与えられると、

$$x_1 = \max(\lambda, x_0) - \max(\mu, \beta + y_0)$$

が成り立つ。このことから、 λ と x_0 , μ と $\beta + y_0$ の大小関係を比較する 4 つの場合分けが必要となる。 x_1 が決まると y_1 を決めるための場合分けが発生する。これらの場合分けを丁寧に行っていくことで解の極限挙動を把握することができる。

簡単な例として、 $x_0 < \lambda$ かつ $\beta + y_0 < \mu$ の場合を示す。このとき、 $x_1 = \lambda - \mu$ となる。もし、 $\beta + \lambda - \mu < \max(\mu, \gamma)$ ならば、

$$\begin{aligned} y_1 &= \max(y_0, \beta + \lambda - \mu + y_0) - \max(\mu, \gamma) \\ &= y_0 + \max(0, \beta + \lambda - \mu) - \max(\mu, \gamma), \\ x_2 &= \max(\lambda, x_1) - \max(\mu, \beta + y_1) \end{aligned}$$

となり、 $y_1 < y_0$ であるから $x_2 = \lambda - \mu$ となる。 $y_2 = y_0 + 2\{\max(0, \beta + \lambda - \mu) - \max(\mu, \gamma)\}$ となり、以降は x の値は定数 $\lambda - \mu$ を取り続け、 y は単調に減少し続けることがわかる。このとき、 y が単調に減少し続けるため、 z も y と同様に単調に減少し続ける。

一方, $\max(\mu, \gamma) < \beta + \lambda - \mu$ ならば,

$$\begin{aligned}
x_2 &= \lambda - \mu, \\
y_2 &= \max(y_1, \beta + \lambda - \mu + y_1) - \max(\mu, \gamma) \\
&= y_0 + 2\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}, \\
z_2 &= \max(z_0 - \mu, \gamma + y_0 - \mu + y_0 + \beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma), \\
&\quad \gamma + y_0 + 2\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}) - \mu \\
&= \max(z_0 - 2\mu, \gamma + y_0 - \mu + 2\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\})
\end{aligned}$$

となる. さらに, $\beta + y_0 + 2\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\} < \mu$ ならば,

$$\begin{aligned}
x_3 &= \lambda - \mu, \\
y_3 &= y_0 + 3\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}, \\
z_3 &= \max(z_0 - 3\mu, \gamma + y_0 - \mu + 3\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\})
\end{aligned}$$

となる. よって, $\beta + y_0 + k\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\} < \mu$ かつ $\mu < \beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}$ を満たす整数 k が存在し, 以下の漸化式が成り立つ.

$$\begin{cases}
x_{k+1} = \lambda - \mu, \\
y_{k+1} = y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}, \\
z_{k+1} = \max(z_0 - (k+1)\mu, \gamma + y_0 - \mu + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}).
\end{cases} \quad (3.4)$$

このとき,

$$\begin{aligned}
x_{k+2} &= \max(\lambda, \lambda - \mu) - \max(\mu, \beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}) \\
&= \lambda - \{\beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}\}, \\
y_{k+2} &= \max(y_{k+1}, \beta + \lambda - \{\beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}\}) + y_{k+1} - \max(\mu, \gamma) \\
&= \lambda - \max(\mu, \gamma)
\end{aligned}$$

となる. ここで, 以下の関係が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}
&\beta + \lambda - \{\beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}\} \\
&= \mu + \max(\mu, \gamma) - \{\beta + y_0 + k\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}\} \\
&> \max(\mu, \gamma).
\end{aligned}$$

このとき, z について

$$\begin{aligned}
z_{k+2} &= \max(z_0 - (k+1)\mu, \gamma + y_0 - \mu + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}, \\
&\quad \gamma + \lambda - \max(\mu, \gamma)) - \mu \\
&= \max(z_0 - (k+2)\mu, \gamma + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma))
\end{aligned}$$

となる. ここで, 以下の関係が成り立つことに注意する.

$$\begin{aligned}
&\gamma + y_0 - \mu + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\} - \{\gamma + \lambda - \max(\mu, \gamma)\} \\
&= \beta + y_0 - \mu + k\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\} - \mu \\
&< -\mu.
\end{aligned}$$

以降は次のように x, y, z が一定の値をとり続ける．特に，式 (3.4) の z の \max 内の第 1 項は単調に減少するが第 2 項は常に一定の値をとるので，時間が十分経過すれば z は一定の値をとる．

$$\begin{aligned}
x_{k+3} &= \max(\lambda, \lambda - \{\beta + y_0 + (k+1)\{\beta + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)\}\}) \\
&\quad - \max(\mu, \beta + \lambda - \max(\mu, \gamma)) \\
&= -\beta + \max(\mu, \gamma), \\
y_{k+3} &= \max(y_{k+2}, \max(\mu, \gamma) + y_{k+2}) - \max(\mu, \gamma) \\
&= y_{k+2} \\
&= \lambda - \max(\mu, \gamma), \\
z_{k+3} &= \max(z_0 - (k+3)\mu, \gamma + \lambda - \mu - \max(\mu, \gamma)).
\end{aligned}$$

このように丁寧に場合分けをすることで，任意の初期値に対して $\beta + \lambda - \mu$ と $\max(\mu, \gamma)$ の値の大小で解の極限挙動を判別することができる．

表 1 と表 2 は，連続型モデル (1.1)，離散型モデル (2.1) および超離散型モデル (3.2) における解の漸近挙動を判別する十分条件と解の極限を示している．どちらの場合も，連続型モデル (1.1) と同様に超離散型モデル (3.2) の解の極限挙動が判別できている．連続型モデル (1.1) の解挙動と離散型モデル (2.1) の解挙動が対応することは既に知られている [5]．超離散化で用いる変数変換と式 (3.1) により，十分条件や解の極限が自然に対応していることがわかる．表 2 における感染者 I と y の極限に注目すると，連続型・離散型の極限を表す数式に減法を用いているため，式 (3.1) を利用して超離散型モデル (3.2) の極限を予想することは困難である．超離散型モデルでは保存量に着目することが多く行われてきたが，もとの連続型モデルの解が一定の値に収束するような場合には，多少煩雑ではあるが，漸化式を逐次計算していく手法が有効である．

表 1: SIR 病理モデルの感染者が常在しない場合の条件と漸近挙動

	連続型 [2]	離散型 [5]	超離散型
十分条件	$\frac{B\Lambda}{M} < M + \Gamma$		$\beta + \lambda - \mu < \max(\mu, \gamma)$
漸近挙動	$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, I_n)$ $= \left(\frac{\Lambda}{M}, 0 \right)$		$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$ $= (\lambda - \mu, -\infty)$

表 2: SIR 病理モデルの感染者が常在する場合の条件と漸近挙動

	連続型 [2]	離散型 [5]	超離散型
十分条件	$M + \Gamma < \frac{B\Lambda}{M}$		$\max(\mu, \gamma) < \beta + \lambda - \mu$
漸近挙動	$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, I_n)$ $= \left(\frac{\Gamma + M}{B}, \frac{\Lambda}{M + \Gamma} - \frac{M}{B} \right)$		$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$ $= (-\beta + \max(\mu, \gamma), \lambda - \max(\mu, \gamma))$

3.3 超離散型 SIS 病理モデルの解の極限挙動

感染者が治癒をしても免疫を獲得できないなど，免疫保持者が存在しない SIS 病理モデルに対しても，離散化を工夫して超離散型モデルを導出すると解の漸近挙動を把握することができる．時間遅れを含まない場合において，離散化を工夫することで連続型 SIS 病理モデルと同等に大域的安定性を議論できる離散型 SIS 病理モデルが導出できることが報告されている [6]．

次のように離散化した離散型 SIS 病理モデルを超離散化することを考える：

$$\begin{cases} \frac{S_{n+1}-S_n}{h} = \Lambda - MS_{n+1} - BS_{n+1}I_n + FI_{n+1}, \\ \frac{I_{n+1}-I_n}{h} = BS_{n+1}I_n - (M + \Gamma + F)I_{n+1}. \end{cases}$$

SIS 病理モデルは感染者から一定の割合で感受性保持者になることを表しているため，連続型モデルを離散化するとき陰的項を増やす必要がある．その結果，SIR 病理モデルよりも超離散化の過程が複雑になる．離散型 SIR 病理モデル (2.1) を超離散化したように変数変換を行うと，超離散型 SIS 病理モデルは以下ようになる：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \max \{ \max(\mu, \delta, f) + \max(\lambda, x_n), f + y_n \}, \\ y_{n+1} = y_n + \max(0, \beta + x_{n+1}) - \max(\mu, \delta, f). \end{cases}$$

このとき， $\beta + \lambda - \mu < \max(\mu, \delta, f)$ ならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\lambda - \mu, -\infty)$ となる．一方， $\max(\mu, \delta, f) < \beta + \lambda - \mu$ ならば， $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (\max(\mu, \delta, f) - \beta, \lambda - \max(\mu, \delta))$ となる．超離散型 SIS 病理モデルの解の極限挙動も，連続型・離散型モデルと自然な形で対応している．

4 まとめ

本報告では，超離散型 SIR 病理モデルを提示し，時間遅れを含まない場合の解の挙動について，連続型 SIR 病理モデルにおける結果と対応することを示した．連続型・離散型モデルにおける結果から，超離散型モデルの解の漸近挙動を予想することはできるが， \max 演算を含むことで超離散型モデルではリアプノフ関数等の従来用いられてきた解析手法をそのまま応用することは難しいと思われる．今回のように逐次計算を用いると， \max 演算によって返される値が一意に定まるため，結果的に，超離散型モデルの解挙動は連続型・離散型モデルよりも把握しやすくなる．

時間遅れを含む $\omega \neq 0$ とした式 (3.2) でも， $\omega = 0$ の場合と同様に， $\beta + \lambda - \mu$ と $\max(\mu, \gamma)$ の値の大小で解の極限挙動を判別できることが，数値例では確認できている．しかし， $\omega = 0$ の場合と比べて，場合分けが飛躍的に煩雑となるため，任意の初期値に対して示すことは容易ではない．今後，この解明を続けたい．

参考文献

- [1] S. Jang and S.N. Elaydi, Difference equations from discretization of a continuous epidemic model with immigration of infectives, *MTBI Cornell University Technical Report* **92** (2004).
- [2] C. C. McCluskey, Complete global stability for an SIR epidemic model with delay - distributed or discrete time delays, *Nonlinear Anal. Real World Appl.* **11** (2010) 55-59.
- [3] R. E. Mickens, Discretizations of nonlinear differential equations using explicit nonstandard methods, *J. Comput. Appl. Math.* **110** (1999) 181-185.
- [4] M. Sekiguchi, Permanence of some discrete epidemic models, *Int. J. Biomath.* **2** (2009) 443-461.
- [5] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a class of discrete SIR epidemic models, *Math. Biosci. Eng.* **7** (2010) 347-361.
- [6] Y. Enatsu, Y. Nakata and Y. Muroya, Global stability for a discrete SIS epidemic model with immigration of infectives, *J. Differ. Equ. Appl.* **18** (2012) 1913-1924.
- [7] M. Sekiguchi and E. Ishiwata, Dynamics of a discretized SIR epidemic model with pulse vaccination and time delay, *J. Comput. Appl. Math.* **236** (2011) 997-1008.
- [8] 広田良吾, 高橋大輔, 「差分と超離散」, 共立出版 (2003).
- [9] R. Willox, B. Grammaticos, A. S. Carstea and A. Ramani, Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models, *Physica A* **328** (2003) 13-22.