

平面離散曲線の例について

井ノ口, 順一
山形大学理学部

加藤, 慎也
山形大学医学部

<https://doi.org/10.15017/1807772>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (21), pp.121-126, 2015-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 21 (pp. 121 - 126)

平面離散曲線の例について

井ノ口 順一 (INOUCHI Jun-ichi), 加藤 慎也 (KATO Shinya)

(Received 13 January 2015; accepted 23 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

平面離散曲線の例について

山形大学理学部 井ノ口順一 (INOUCHI Jun-ichi)
山形大学医学部 加藤慎也 (KATO Shinya)

概 要

離散可積分系理論の発展に鼓舞されて, 微分幾何学的対象の離散化が研究されるようになった. これまでの研究では離散可積分系で統制される離散曲線や離散曲面が扱われてきたが, 離散曲線そのものをどのように扱っていくべきかについての研究はまだ少ない. 一つの試みとして内擺線 (ハイポサイクロイド) の離散化 ([6]) について報告する.

1 離散曲線

定義 $I' \subset \mathbb{R}$ を区間とする. 写像 $\gamma: I = I' \cap \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N: n \mapsto \gamma_n$ を $\mathbb{R}^N$ 内の**離散曲線**という.

定義 離散曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ の γ_n における**辺接ベクトル**を前進差分 $\Delta\gamma_n := \gamma_{n+1} - \gamma_n$ で定義する. また**弧長** $L(\gamma)$ を

$$L(\gamma) := \sum_{k \in I} \|\Delta\gamma_k\|$$

で定義する.

定義 任意の隣接する3点のうち, どの2点も重なっていないとき, 離散曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ は**非特異**であるという.

この定義は, 非特異離散曲線に対して, 辺接ベクトルが0にはならないことを意味している.

定義 $\|\Delta\gamma_n\| = 1$ をみたす離散曲線 γ を**弧長径数的離散曲線**と呼ぶ.

- 滑らかな場合とは違い, 与えられた曲線の径数を取り換えて, 弧長径数的離散曲線にすることは一般にはできない.
- この定義は, 滑らかな場合の自然な類似であるが, 条件を $\|\Delta\gamma_n\| \neq 0$ に緩めておくことがよいことが多い (広義の弧長径数的離散曲線とよぶ). 実際, 離散曲線の差分 mKdV 方程式に従う等周変形では広義の弧長径数的離散曲線を用いている.
- 非特異離散曲線および弧長径数的離散曲線はともに広義の弧長径数的離散曲線である.

広義の弧長径数的離散曲線 $\gamma_n: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2$ を与えておく. 各 n に対し離散時間発展

$$\cdots \leftarrow \gamma_n^{-2} \leftarrow \gamma_n^{-1} \leftarrow \gamma_n^0 := \gamma_n \rightarrow \gamma_n^1 \rightarrow \gamma_n^2 \rightarrow \cdots$$

が**等周的**であるとする. すなわち $\gamma: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2; (n, m) \mapsto \gamma_n^m$ は

- 等周的離散時間発展 $\|\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m\| = a_n$
- 等距離的離散時間発展 $\|\gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m\| = b_m$

をみたすとしよう. このとき $W_n^m = \angle(\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m, \gamma_n^{m+1} - \gamma_n^m)$ とおけば差分 mKdV 方程式 (広田 [1]):

$$\frac{W_{n+1}^{m+1} - W_n^m}{2} = \tan^{-1} \left(\frac{b_{m+1} + a_n}{b_{m+1} - a_n} \tan \frac{W_n^{m+1}}{2} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{b_m + a_{n+1}}{b_m - a_{n+1}} \tan \frac{W_{n+1}^m}{2} \right)$$

によって両立条件 $(T_{n+1})^{m+1} = (T^{m+1})_{n+1}$ の成立が保証される. ただし T_n^m は辺接ベクトルを長さ 1 に正規化したベクトル $T_n^m = (\gamma_{n+1}^m - \gamma_n^m)/a_n$ である ([7]).

離散曲線論については Hoffmann の講義録 [2], 松浦の解説 [8, 9, 10] を参照されたい. 差分 mKdV 方程式に従う離散曲線の等周変形については [7] および [3, 4, 5] を参照.

2 サイクロイドの離散化

半径 r の円が x 軸上を滑ることなく転がるとき, 円上の定点が描く軌跡を**擺線 (サイクロイド)** とよぶ. 擺線は

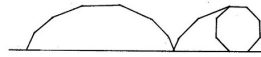
$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta)$$

と径数表示される.

x 軸上で一辺の長さが 1 の正 n 角形を転がし, 正 n 角形の辺が x 軸に重なるごとに正 n 角形の定点の位置に印をつける. これによって得られる離散曲線は複素数表示では

$$\gamma_k = \sum_{\ell=0}^k \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{i\ell(2\pi)}{n} \right) \right\}$$

で与えられる. これは Tim Hoffmann [2] による離散サイクロイドである.



$\exp(-ik(2\pi)/n) = 1$ のとき, $\Delta\gamma_{k-1} = 0$ となるので, その点は (連続なときの) サイクロイドの尖点に対応する.

3 ハイポサイクロイドの離散化

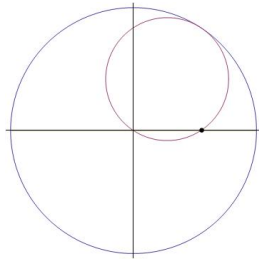
3.1 ハイポサイクロイド

内擺線 (ハイポサイクロイド) とは, ある円の中をその円より半径が小さい円が内接しながら滑ることなく転がるとき, 内接する円のある点の描く軌跡のことである. $\mathbb{R}^2$ の原点を中心とする半径 a の円 (大きい円) と半径 b の円 (小さい円) の場合, 原点と 2 つの円が接している点を結んだ線分のなす角を θ とすると, ハイポサイクロイドは

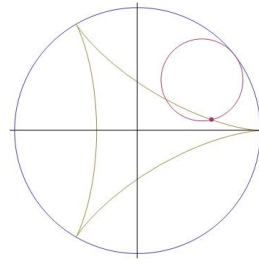
$$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta, \quad y = (a-b)\sin\theta - b\sin\frac{a-b}{b}\theta$$

と径数表示される.

- $a = 2b$ の場合: $x = a\cos\theta, y = 0$ であるから θ が 0 から 2π まで変わる間に, この点は大きい円の直径の上を往復する.

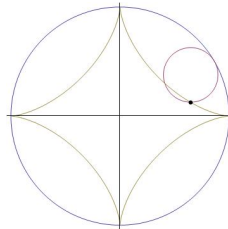


$$a = 2b$$



$$a = 3b$$

- $a = 3b$ の場合 : $x = b(2\cos\theta + \cos 2\theta)$, $y = b(2\sin\theta - \sin 2\theta)$ である. これを尖点が3つのハイポサイクロイドという.
- $a = 4b$ の場合 : $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ より, θ を消去すると $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ が得られる. この曲線は**アステロイド** (星芒形) と呼ばれる.



アステロイド ($a = 4b$)

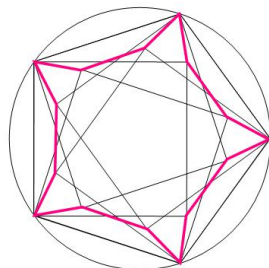
3.2 離散ハイポサイクロイド

ハイポサイクロイドは, ある円の中をその円より半径が小さい円が内接しながら滑ることなく転がるとき, 内接する円のある点の描く軌跡のことであった. ハイポサイクロイドを離散化するために, 円の中で多角形を平行移動せず回転させて, 1つの頂点の描く軌跡を考える. 本稿では, 正方形を回転させた場合を報告する.

まず, 様々な大きさの正方形を考え, 正方形が円の中をちょうど一周するものだけを考える. ちょうど一周しないものは稠密になってしまうものが出てくるため, 考察からはずすこととする. 円の中をちょうど一周させると円の中に正多角形が一つできる. その正多角形と正方形の関係からどのような離散ハイポサイクロイドが出てくるかを述べる.

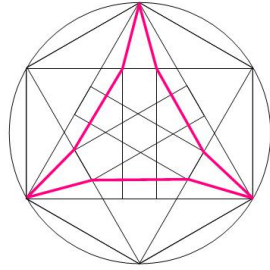
5角形-正方形

この場合, 動点が元の位置に戻るまで4周し, 自己交叉をもたず, 綺麗な形を描く. 1周だけではすべてを描くことはできない.



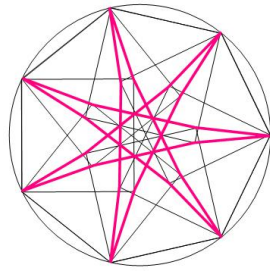
6 角形-正方形

この場合では, 動点が元に戻るまで2周し, 自己交叉をもたず, 尖点が3つのハイポサイクロイドの離散化された形を描く. 1周だけではすべてを描くことはできない.



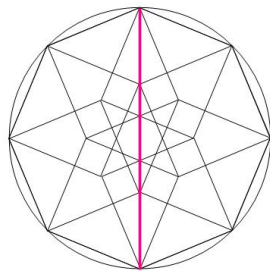
7 角形-正方形

この場合では, 動点が元に戻るまで5周し, 自己交叉をもつ. 1周だけではすべてを描くことはできない.



8 角形-正方形

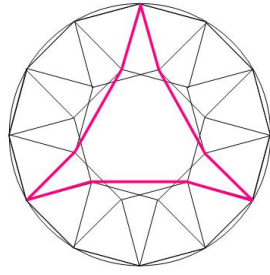
この場合では円の直径上を往復して元に戻るため, 直線を描く.



9,10,11 角形は, 7 角形同様, 元に戻るのに数周し, 自己交叉をもち, 1周だけではすべてを描くことはできない.

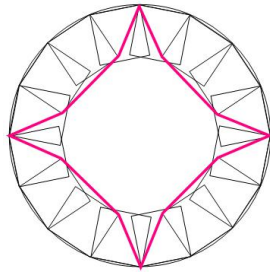
12 角形-正方形

この場合では動点が1周で元に戻り, 尖点が3つのハイポサイクロイドの離散化された形を描く.



16 角形–正方形

この場合でも動点が1周で元に戻り, アステロイドの離散化された形を描く.



3角形を転がす場合も同様の観察で, 6角形–3角形の場合は直線, 9角形–3角形の場合は尖点が3つのハイポサイクロイドの離散化された形, 12角形–3角形の場合はアステロイドの離散化された形を描く.

外側の多角形を m 角形, 内側の多角形を n 角形 ($m > n$) とすると

$$\text{lcm}(m, n) = \begin{cases} m & (m:n=2:1) \\ m & (m:n=a:1, a>2) \\ \text{その他} \end{cases}$$

と分けることができる.

上から順に type1, type2, type3 とする. type1 と type2 の違いは, 正方形が1周して動点が元に戻り, 直線を描くか尖点を持った形を描くかである. また type3 は動点が元に戻るまでに正方形が数周してしまうものすべてを含む. 滑らかな曲線でのハイポサイクロイドの特別な場合は $a=2b$ が type1, $a=3b$, $a=4b$ が type2 に対応していることがわかる.

今後の課題

- 本稿で得られた離散ハイポサイクロイドの径数表示を与えること. より具体的には max 演算子・plus 演算子を用いて離散ハイポサイクロイドの表示式を与えることは可能か.
- いろいろな種類の曲線を離散化すること. たとえば外擺線 (epicycloid), 余擺線 (trochoid), 外余擺線 (epitrochoid), 内余擺線 (hypotrochoid) など.
- 離散化した曲線の変形を通じて, 既存の離散可積分系との関係を発見すること. あるいは新たな離散可積分系を見いだすこと.
- 離散曲線の超離散化を考察すること.

謝辞 多くの誤りをご指摘いただいた査読者に感謝を申し上げます.

参考文献

- [1] R. Hirota, Discretization of the potential modified KdV equation, J. Phys. Soc. Japan **67** (1998), no. 7, 2234–2236.
- [2] T. Hoffmann, Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces, 九州大学 COE レクチャーノート, Vol. 18, 2009.
- [3] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Motion and Bäcklund transformations of discrete plane curves, Kyushu Journal of Mathematics **66** (2012), no. 2, 303–324.
- [4] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Explicit solutions to semi-discrete modified KdV equation and motion of discrete plane curves, Journal of Physics A **45** (2012), no. 4, Article Number 045206.
- [5] J. Inoguchi, K. Kajiwara, N. Matsuura and Y. Ohta, Discrete mKdV and discrete Sine-Gordon flows on discrete space curves, Journal of Physics A **47** (2014), no. 23, Article Number 235202.
- [6] 加藤慎也, 平面離散曲線の研究, 山形大学大学院理工学研究科数理科学専攻, 修士論文, 2014年3月.
- [7] N. Matsuura, Discrete KdV and discrete modified KdV equations arising from motions of planar discrete curves, International Mathematics Research Notices **2012**, no. 8, 1681–1698.
(doi:10.1093/imrn/rnr080).
- [8] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 **22AO-S8** (2011), 62–74.
(<http://hdl.handle.net/2324/23394>)
- [9] 松浦望, 曲線の差分幾何, 京都大学数理解析研究所講究録別冊 **B30** (2012), 53–75.
- [10] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 日本応用数理学会論文誌 **23** (2013), no. 1, 55–107.