

パウルヴェIII型方程式のある特殊解系列の超離散極限

磯島, 伸
法政大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/1807500>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (17), pp.101-108, 2015-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 17 (pp. 101 - 108)

パウルヴェIII型方程式のある特殊解系 列の超離散極限

磯島 伸 (ISOJIMA Shin)

(Received 15 January 2015; accepted 16 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

パnulヴェ III 型方程式のある特殊解系列の超離散極限

法政大学理工学部 磯島伸 (ISOJIMA Shin)

概要 本稿では, [1] に基づいて, 差分 Bessel 関数を成分とする行列式を用いて表される, 差分 Painlevé III 型方程式の特殊解の系列の超離散類似を与える.

1 符号付き超離散化

超離散化 [2] は, 与えられた減算を含まない差分方程式に対して, 従属変数の置き換え $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ と超離散極限 $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(*)$ を施す操作である. 極限においては, 任意の実数 X, Y について成り立つ公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) = \max(X, Y) \quad (1)$$

が重要である. この操作により, 元の差分方程式から \max 演算, 和, 差で表される区分線形方程式が得られる. 例として

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{x_{n-1}} \quad (2)$$

を超離散化すると, $1 = e^{0/\varepsilon}$ に注意して次のようになる:

$$(2) \Leftrightarrow X_{n+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \left\{ \log(e^{0/\varepsilon} + e^{X_n/\varepsilon}) - \log e^{X_{n-1}/\varepsilon} \right\} \\ \rightarrow X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1}.$$

とくに, 初期値 X_0, X_1 を整数とすると, すべての n について X_n も整数値をとることがわかる. この意味で, 従属変数が離散値を取る差分方程式, すなわちセルオートマトンが超離散化によって得られる.

超離散化を行うためには, 解が正値で減算を含まない方程式でなければならない. 解の正値性は $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ から要請され, 方程式が減算を含む場合は (1) の和を差に置き換えた極限の意味のある評価が困難である. この制約を解消するために, 符号付き超離散化が提案された [3]. 具体的には, 差分方程式の従属変数 x_n に対し, 符号変数 $\xi_n \in \{+1, -1\}$ と振幅変数 $X_n \in \mathbb{R}$ を $\xi_n = x_n/|x_n|$, $e^{X_n/\varepsilon} = |x_n|$ により導入する. また, 関数 $s: \{1, -1\} \rightarrow \{0, 1\}$ を $s(1) = 1, s(-1) = 0$ で定義する. これらの変数を用いて, $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ の代わりに

$$x_n = \xi_n e^{X_n/\varepsilon} = \{s(\xi_n) - s(-\xi_n)\} e^{X_n/\varepsilon} = \begin{cases} e^{X_n/\varepsilon} & (x_n > 0) \\ -e^{X_n/\varepsilon} & (x_n < 0) \end{cases} \quad (3)$$

という置き換えを施す. その後に, 全ての項が正値になるように移項して方程式を整え, 両辺に $\varepsilon \log$ を施して極限 $\varepsilon \rightarrow +0$ を取る. その極限は, 関数 $S: \{1, -1\} \rightarrow \{0, -\infty\}$ を $S(1) = 0, S(-1) = -\infty$ で定義し, 公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(s(\xi) e^{X/\varepsilon} + e^{Y/\varepsilon}) = \max(S(\xi) + X, Y) \quad (4)$$

により, $S(\xi_n)$ と X_n たちの間の和, 差および \max 演算で表される. ただし $-\infty$ は \max 演算の中からその項を消し去る記号とする. 例えば (2) の符号付き超離散化は次のようになる:

$$(2) \Leftrightarrow x_{n+1} x_{n-1} = 1 + x_n \\ \Leftrightarrow s(\xi_{n+1} \xi_{n-1}) e^{(X_{n+1} + X_{n-1})/\varepsilon} + s(-\xi_n) e^{X_n/\varepsilon} = s(-\xi_{n+1} \xi_{n-1}) e^{(X_{n+1} + X_{n-1})/\varepsilon} + e^{0/\varepsilon} + s(\xi_n) e^{X_n/\varepsilon} \\ \Leftrightarrow \max[S(\xi_{n+1} \xi_{n-1}) + X_{n+1} + X_{n-1}, S(-\xi_n) + X_n] = \max[S(-\xi_{n+1} \xi_{n-1}) + X_{n+1} + X_{n-1}, 0, S(\xi_n) + X_n].$$

ここで、符号 ξ, η に対して成り立つ恒等式 $\xi\eta = s(\xi\eta) - s(-\xi\eta)$ を用いている。例えば $\xi_n = -1, \xi_{n-1} = 1, X_n > X_{n-1} > 0$ が与えられたとき、 (ξ_{n+1}, X_{n+1}) を求めてみる。方程式は

$$\max[S(\xi_{n+1}) + X_{n+1} + X_{n-1}, X_n] = \max[S(-\xi_{n+1}) + X_{n+1} + X_{n-1}, 0]$$

となる。 $\xi_{n+1} = 1$ とすると $\max[X_{n+1} + X_{n-1}, X_n] = 0$ に帰着され、この X_{n+1} についての方程式は解を持たない。一方、 $\xi_{n+1} = -1$ とすると $X_n = \max[X_{n+1} + X_{n-1}, 0]$ に帰着され、この方程式は一意的な解 $X_{n+1} = X_n - X_{n-1}$ を持つ。よってこの場合は $(\xi_{n+1}, X_{n+1}) = (-1, X_n - X_{n-1})$ と求められる。符号付き超離散化については [4] も参照されたい。

2 Painlevé III 型方程式

Painlevé III 型方程式 (P_{III}) は

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{u} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{1}{x} (au^2 + d) + cu^3 + \frac{b}{u} \quad (5)$$

で与えられる。ここで a, b, c, d はパラメータである。これらのパラメータが $a = 2(N - \nu)$, $b = -1$, $c = 1$, $d = 2(\nu + N + 1)$ を満たすとき、(5) は Bessel の微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2} \right) v = 0 \quad (6)$$

の解で表される特殊解の系列を持つことが知られている。すなわち、(6) の任意の解を v_ν 、演算子 $D = x \frac{d}{dx}$ として、いわゆる τ 関数

$$\tau_N^\nu = |D^{i+j-2} v_\nu|_{1 \leq i, j \leq N} \quad (7)$$

を定義し、関数 u_N を変数変換

$$u_N = \left(\log \frac{\tau_N^{\nu+1}}{\tau_{N+1}^\nu} \right)_x + \frac{\nu + N}{x} \quad (8)$$

で定めると、 u_N はパラメータを特殊化した (5) の解となる。

P_{III} の差分化の 1 つとして、次のものが提出されている [5] :

$$w(n+1)w(n-1) = \frac{\alpha w(n)^2 + \beta \lambda^n w(n) + \gamma \lambda^{2n}}{w(n)^2 + \delta w(n) + \alpha}. \quad (9)$$

ここで $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ はパラメータである。連続極限は $u(n) = \lambda^{-n/2} w(n)$, $n\epsilon = z$, $\alpha = -1/c\epsilon^2$, $\beta = -d/c$, $\gamma = -b/c$, $\delta = a/c$, $\lambda = 1 + 2\epsilon$ と置き換え、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取った後で $x = e^z$ と変換すると (5) に帰着される。特殊解の構造は以下の通りである。Bessel 方程式の差分化の 1 つである

$$J_\nu(n+1) - (q^\nu + q^{-\nu})J_\nu(n) + \{1 + (1-q)^2 q^{2n-2}\}J_\nu(n-1) = 0 \quad (10)$$

を考える。ここで q は $0 < q < 1$ を満たすパラメータである。連続極限は、 $\epsilon < 0$ をパラメータとし、 $q = 1 + \epsilon$, $n\epsilon = z$ と置き換えて極限 $\epsilon \rightarrow -0$ を取り、 $x = e^z$ と変数変換すると (6) に帰着される。その解 $J_\nu(n)$ により、第 (i, j) 成分が $J_\nu(n + 2i + j - 3)$ で与えられる N 次行列式

$$\tau_N^\nu(n) = |J_\nu(n + 2i + j - 3)|_{1 \leq i, j \leq N} \quad (11)$$

を考え、変数変換

$$w_N(n) = \frac{\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n)}{\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1)} - q^{\nu+N} \quad (12)$$

で関数 $w_N(n)$ を構成する。これはパラメータを

$$\alpha = -q^{4N}, \beta = (q^{\nu+N} - q^{-\nu-N-2})q^{8N}(1-q)^2, \gamma = q^{2(6N-1)}(1-q)^4, \delta = (q^{\nu-N} - q^{-\nu+N})q^{2N}, \lambda = q^2 \quad (13)$$

と特殊化した (9) の解になる。なお離散 τ 関数 (11) は、双線形方程式

$$\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1) - q^{-\nu-N}\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n) = -(1-q)q^{n+2N}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+1), \quad (14)$$

$$\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+1) - q^{\nu-N+1}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n+1)\tau_N^\nu(n) = (1-q)q^{n+2N}\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+1), \quad (15)$$

$$\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+3) - q^{-\nu-N}\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n+2) = -(1-q)q^n\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+3), \quad (16)$$

$$\tau_{N+1}^{\nu+1}(n)\tau_N^\nu(n+3) - q^{\nu-N+1}\tau_{N+1}^{\nu+1}(n+1)\tau_N^\nu(n+2) = (1-q)q^n\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+3) \quad (17)$$

を満たす。これらの式から

$$\begin{aligned} \tau_{N+1}^\nu(n+2)\tau_N^{\nu+1}(n+1) - q^{2N}(q^{\nu-N} + q^{-\nu+N})\tau_{N+1}^\nu(n+1)\tau_N^{\nu+1}(n+2) \\ + q^{4N}\{1 + (1-q)^2q^{2n}\}\tau_{N+1}^\nu(n)\tau_N^{\nu+1}(n+3) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

を導くことができ、 $N=0$ として $\tau_0^{\nu+1}(n) \equiv 1$ と置くと (10) に帰着される。

3 Bessel 関数型特殊解の評価

差分 Bessel 関数

$$J_\nu(n) = (1-q)^\nu(q^n)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(1-q)^{2j}}{(q^2; q^2)_j(q^2; q^2)_{\nu+j}} (q^n)^{2j}, \quad (19)$$

$$(a; q)_k = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ (1-a)(1-aq)\dots(1-aq^{k-1}) & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} \quad (20)$$

は (10) を満たし、連続極限でよく知られた Bessel 関数に帰着する。なお (19) は Jackson の q -Bessel 関数 $J_\nu^{(1)}(x; q)$ (例えば [6]) と本質的に同じものである。級数表示 (19) は $n \leq 0$ に対しては評価が困難である。そこで (19) に q -Euler 変換 (付録参照) を施した表示

$$J_\nu(n) = \frac{(1-q)^\nu q^{\nu n}}{(-1-q)^2 q^{2n}; q^2}_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{2k(k+\nu)}(1-q)^{2k}}{(q^2; q^2)_k(q^2; q^2)_{k+\nu}} (q^n)^{2k} \quad (21)$$

も考える。差分 Bessel 関数の $q \rightarrow 0$ のときの評価式は、記号

$$\begin{aligned} \psi_\nu(n) &:= n(n+\nu-1), & \varphi_\nu(n) &:= \frac{n(n-2)}{2} - \frac{\nu^2}{2}, \\ p_1(n) &:= \frac{3\{1+(-1)^{n+1}\}}{4} = \begin{cases} 0 & (n: \text{even}) \\ \frac{3}{2} & (n: \text{odd}), \end{cases} & p_2(n) &:= \frac{3+(-1)^{n+1}}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n: \text{even}) \\ 1 & (n: \text{odd}) \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

と二項係数 $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ を用いて、

$$J_\nu(n) = \begin{cases} q^{n\nu}(1+O(q)) & (n \geq 1) \\ q^{\psi_\nu(n)}\left(\frac{1}{2} + O(q)\right) & (0 \geq n \geq -\nu) \\ (-1)^{\binom{n+\nu+1}{2}} q^{\varphi_\nu(n)+p_1(n)}(p_2(n)+O(q)) & (n \leq -\nu-1) \end{cases} \quad (23)$$

で与えられる.

本稿では, 差分 Bessel 関数を (11) に代入したものを Bessel 関数型特殊解と呼び, その符号付き超離散類似を与える. 一般に, 与えられた差分方程式の解の 1-パラメータ族 $x_n(\varepsilon)$ が, $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき

$$x_n(\varepsilon) = (-1)^{\xi_n} e^{\frac{X_n}{\varepsilon}} (c_n + O(\varepsilon)), \quad c_n > 0 \quad (24)$$

の形に評価されれば, 符号 $(-1)^{\xi_n}$ と振幅 X_n の組が, 対応する符号付き超離散系の解となる. このことから, 超離散類似の計算は, (11) を q のべき級数と考えたときの最低次の項 ($0 < q < 1$ に注意) を求めることに帰着される.

先に結果を提示しておこう. パラメータ q は $0 < q < 1$ を満たすことに注意して $q = e^{Q/\varepsilon}$, $Q < 0$ と置き換える. 変数 $\tau_N^\nu(n)$ は, 符号を $y_{N,n}^\nu$, 振幅を $Y_{N,n}^\nu$ として置き換える ($\tau_N^\nu(n) = y_{N,n}^\nu e^{Y_{N,n}^\nu/\varepsilon}$). 記号

$$A_{N,n} := 2n + 3N - 3, \quad B_\nu(k) := \varphi_\nu(k) + p_1(k + \nu), \quad M = \min(\text{floor}(|n|/2) + 1, N) \quad (25)$$

を導入する. ここで $\text{floor}(x)$ は $x > 0$ の整数部分を取りだす関数とする. これらの記号と (22) を用いて, 結果は以下ようになる.

(A) $n \geq 1$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \left\{ \frac{\nu N}{2} A_{N,n} + 2 \binom{N}{2} (n + N - 2) \right\}. \quad (26)$$

(B) $0 \geq n \geq \max(2 - 2N, -\nu - N) + 1$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \left\{ \frac{\nu N}{2} A_{N,n} + 2 \binom{N-M}{2} (n + N + M - 2) + \frac{1}{2} \binom{M+1}{3} + 2M \binom{n + N + \frac{M-3}{2}}{2} \right\}. \quad (27)$$

(C-a) $\nu \geq N - 1$ かつ $2 - 2N \geq n \geq 1 - \nu - N$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \left\{ \frac{N}{4} A_{N,n} (A_{N,n} + 2\nu - 2) + \frac{1}{2} \binom{N+1}{3} \right\}. \quad (28)$$

(C-b) $\nu \leq N - 2$ かつ $-\nu - N \geq n \geq 3 - 2N$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}} \prod_{k=n+N-1}^{-\nu-1} (-1)^{\binom{k+\nu+1}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \left\{ \frac{\nu N}{2} A_{N,n} + 2 \binom{N-M}{2} (n + N + M - 2) + \sum_{k=-\nu}^{n+N+M-2} k(k-1) + \sum_{k=n+N-1}^{-\nu-1} (B_\nu(k) - \nu k) \right\}. \quad (29)$$

(D) $\min(2 - 2N, -\nu - N) \geq n \geq 2 - 2N - \nu$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}} \prod_{k=n+N-1}^{-\nu-1} (-1)^{\binom{k+\nu+1}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \left\{ \sum_{k=n+N-1}^{-\nu-1} B_\nu(k) + \sum_{k=-\nu}^{n+2N-2} \psi_\nu(k) \right\}. \quad (30)$$

(E) $n \leq 1 - 2N - \nu$ のとき

$$y_{N,n}^\nu = (-1)^{\binom{N}{2}} \prod_{k=n+N-1}^{n+2N-2} (-1)^{\binom{k+\nu+1}{2}}, \quad Y_{N,n}^\nu = Q \sum_{k=n+N-1}^{n+2N-2} B_\nu(k). \quad (31)$$

上の関数は (14)–(17) の符号付き超離散類似 (付録参照) を満たす. 以下ではその導出の概略を述べる.

まず (A) の場合を示す. (11) に現れる $J_\nu(n)$ の引数 n はすべて正であるから, 級数表示 (19) を代入する. 行列式の多重線形性を用いて

$$\tau_N^\nu(n) = (1-q)^{\nu N} \left\{ \prod_{k=1}^N q^{(n+3k-3)\nu} \right\} \sum_{j_1, \dots, j_N} P_N^\nu(\mathbf{j}) \left\{ \prod_{k=1}^N q^{2(n+2k-2)j_k} \right\} \begin{vmatrix} 1 & q^{2j_1} & \dots & q^{2(N-1)j_1} \\ 1 & q^{2j_2} & \dots & q^{2(N-1)j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q^{2j_N} & \dots & q^{2(N-1)j_N} \end{vmatrix} \quad (32)$$

を得る, ただし

$$\sum_{j_1, \dots, j_N} := \sum_{j_1=0}^{\infty} \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_N=0}^{\infty}, \quad P_N^\nu(\mathbf{j}) := \prod_{k=1}^N \frac{(-1)^{j_k} (1-q)^{2j_k}}{(q^2; q^2)_{j_k + \nu} (q^2; q^2)_{j_k}} = \left\{ \prod_{k=1}^N (-1)^{j_k} \right\} (1 + O(q))$$

である. 総和部分の最低次の項を見つけよう. (32) に現れる行列式が Vandermonde の行列式であることから, $j_k = j_l$ ($k \neq l$) なる項は 0 になる. さらに, j_k たちの入れ替えに対し, (32) において因子 $\prod_{k=1}^N q^{2(n+2k-2)j_k}$ 以外の q の次数は不変であることから, $\sum_{k=1}^N 2(n+2k-2)j_k$ をより小さくするような大小関係 $0 \leq j_N < \dots < j_1$ を満たす組み合わせを考えれば十分である. このとき行列式部分の寄与は対角成分の積 $\prod_{k=1}^N q^{2(k-1)j_k}$ である. 結局, $\sum_{k=1}^N 2(n+3k-3)j_k$ を最小にする $0 \leq j_N < \dots < j_1$ なる整数の組 (j_1, j_2, \dots, j_N) を求めればよいが, それは $j_k = N - k$ で与えられ, $P_N^\nu(\mathbf{j})$ からの符号 $\prod_{i=1}^N (-1)^{N-i} = (-1)^{\binom{N}{2}}$ の寄与も考慮して, 総和部分の最低次の項が求まる. さらに, 因子 $\prod_{k=1}^N q^{(n+3k-3)\nu}$ も考慮して

$$\tau_N^\nu(n) \sim (-1)^{\binom{N}{2}} \prod_{k=1}^N q^{(n+3k-3)(2N-2k+\nu)} = (-1)^{\binom{N}{2}} e^{\{\frac{\nu N}{2}(2n+3N-3)+N(N-1)(n+N-2)\}Q/\varepsilon} \quad (33)$$

がわかる. この評価式は (24) の形であり, (26) が得られる.

次に, (C-a), (D), (E) のときは, (11) の逆対角成分の引数がすべて負になる. まず次の事実に注意する.

$J_\nu(n)$ の最低次の項の次数を $g_\nu(n)$ で表す ($|J_\nu(n)| \sim q^{g_\nu(n)}$). このとき, $n \in \mathbb{Z}$, $k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$\tilde{g} := g_\nu(n) + g_\nu(n+2k+l) - g_\nu(n+2k) - g_\nu(n+l) \begin{cases} = 0 & (n \geq 0) \\ > 0 & (n \leq -1) \end{cases} \quad (34)$$

が成り立つ. 証明は実現しうる 46 通りの場合の直接計算による. ■

この事実により, $n \leq -1$ に対して $q \rightarrow 0$ のとき $|J_\nu(n)J_\nu(n+2k+l)| < |J_\nu(n+2k)J_\nu(n+l)|$ が成り立つ. これを繰り返し用いれば, $-n \gg 1$ のときには (11) の項のうち逆対角成分の積が支配的になることがわかる. さらに詳しく, 全ての逆対角成分の引数が非正であれば逆対角成分の積が支配的になることを示せる. 後は, (C-a), (D), (E) それぞれで各逆対角成分の評価式が異なることに注意してその積を計算すればよい.

(B), (C-b) の場合は, (11) に引数が正である $J_\nu(n)$ のみからなる行と, そうではない行が混在する. 証明の方針は, 行列の基本変形と余因子展開を繰り返して引数が正である $J_\nu(n)$ のみからなっていた行を削っていき, 残った小行列式を評価する, というものである. 計算の詳細は省略する.

4 解の定性的挙動

前節で Bessel 関数型特殊解の超離散化が得られた. これを元にして, 「符号付き超離散 Painlevé III 型方程式 (udP_{III})」の特殊解を構成できる. 既に用いた置き換え $q = e^{Q/\varepsilon}$ および $\tau_N^\nu(n) = y_{N,n}^\nu e^{Y_{N,n}^\nu/\varepsilon}$ に加えて

$w_N(n) = \omega_n e^{W_n/\varepsilon}$ を導入し, 変数変換式 (12) を符号付き超離散化すると

$$\mathbf{Y} := Y_{N+1}^\nu(n+1) + Y_N^{\nu+1}(n) - Y_{N+1}^\nu(n) - Y_N^{\nu+1}(n+1) \quad (35)$$

$$\mathbf{y} := y_{N+1}^\nu(n+1)y_N^{\nu+1}(n)y_{N+1}^\nu(n)y_N^{\nu+1}(n+1) \quad (36)$$

$$\max[S(\omega_n) + W_n, S(-\mathbf{y}) + \mathbf{Y}, (\nu + N)Q] = \max[S(-\omega_n) + W_n, S(\mathbf{y}) + \mathbf{Y}] \quad (37)$$

を得る. これを ω_n, W_n について解くと, $\mathbf{Y} = (\nu + N)Q$ かつ $\mathbf{y} = 1$ のときは不定解

$$W_n \leq (\nu + N)Q, \quad \omega_n = \pm 1 (\text{任意}) \quad (38)$$

となり, それ以外のときは一意的な解

$$W_n = \max[\mathbf{Y}, (\nu + N)Q] \quad (39)$$

$$\omega_n = \begin{cases} \mathbf{y} & (\mathbf{Y} > (\nu + N)Q) \\ -1 & (\mathbf{Y} < (\nu + N)Q \text{ または, } \mathbf{Y} = (\nu + N)Q \text{ かつ } \mathbf{y} = -1) \end{cases} \quad (40)$$

を得る. 例として $N = 1, \nu = 1$ のとき, (ω_n, W_n) をいくつかの n について計算すると次のようになる.

n	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	$-2 \leq n$
(ω_n, W_n)	$(-1, -5Q)$	$(1, -7Q)$	$(-1, -3Q)$	$(1, -5Q)$	$(-1, -Q)$	$(1, -3Q)$	$(1, 0)$	不定

不定となる $n \geq -2$ に対しては, 一意的な解を udP_{III} に代入して順次 $(\omega_{-2}, W_{-2}), (\omega_{-1}, W_{-1}), \dots$ を計算していく. W_n は (38) を満足することに注意して, $(\omega_n, W_n) = (1, 2(n+3)Q)$ と選ぶことにする. こうして得られた関数が, パラメータを特殊化した udP_{III} (付録参照) の解になっていることは代入して確認できる. この解の挙動を観察するため, 変数 $\omega_n e^{W_n}$ を考える. これは置き換え $w_N(n) = \omega_n e^{W_n/\varepsilon}$ において $\varepsilon = 1$ としたもので, 差分方程式の解に近い挙動を示すと考えられる. 図 1 はそのグラフである. また, 連続極限の変数変換を考慮すると, P_{III} の解を $u(x)$ として $e^{-x}u(e^{-x})$ が $\omega_n e^{W_n}$ に相当することがわかる. 図 2 は (6) の解として Bessel 関数を代入した P_{III} の特殊解 (8) のグラフ ($N = 1, \nu = 1$) である. 両者の定性的な挙動はよく似ていることが読み取れる.

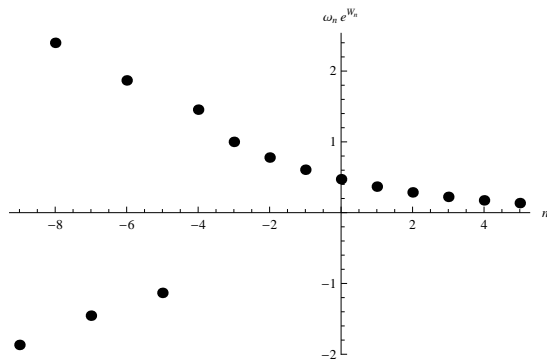


図 1 udP_{III} の Bessel 関数型特殊解のグラフ ($Q = -1/8$)

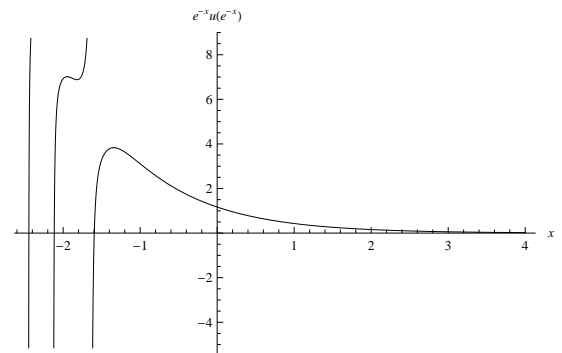


図 2 P_{III} の Bessel 関数型特殊解のグラフ

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26790082 の助成を受けたものです.

付録

q -Euler 変換

次のべき級数の変換を q -Euler 変換という ([6] 3.1 節) .

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j d_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hat{D}^k c_0)}{[k]!} x^k \hat{B}^k f(x) \quad (qE)$$

ここで

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{j=0}^{\infty} d_j x^j, \quad \hat{B}f(x) := \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad \hat{B}^k f(x) = (\hat{B} \circ \dots \circ \hat{B})f(x) \\ [k] &:= \frac{1-q^k}{1-q}, \quad [k]! := \begin{cases} 1 & (k=0) \\ [k][k-1] \dots [1] & (k \in \mathbb{Z}_{>0}) \end{cases} \\ \hat{E}c_j &:= c_{j+1} \quad (j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}), \quad \hat{D}^k := (\hat{E}-1)(\hat{E}-q) \dots (\hat{E}-q^{k-1}) \end{aligned}$$

である. これは交代級数の加速法である Euler 変換の類似である. いま, 変数 t のべき級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(q; q)_{j+\nu} (q; q)_j} t^j$$

に対して係数を $c_j = 1/(q; q)_{j+\nu}$, $d_j = (-1)^j/(q; q)_j$ と分割して q -Euler 変換を適用し, 適当な変数とパラメータの変換を行うことで (19) と (21) の書き換えを示すことができる.

差分双線形方程式の超離散類似

置き換え $q = e^{Q/\varepsilon}$ および $\tau_N^\nu(n) = y_{N,n}^\nu e^{Y_{N,n}^\nu/\varepsilon}$ を用いて (14)–(17) を符号付き超離散化すると, 以下の式がそれぞれ得られる. ただし, 符号 ξ, η に対して成り立つ恒等式 $\xi\eta = s(\xi\eta) - s(-\xi\eta)$ を用いている.

$$\begin{aligned} & \max[S(y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+1}^{\nu+1}, S(-y_{N+1,n+1}^\nu y_{N,n}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n+1}^\nu + Y_{N,n}^{\nu+1} - (\nu + N)Q, \\ & \quad S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu + (n + 2N)Q, \\ & \quad S(-y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu + (n + 2N + 1)Q] \\ = & \max[S(-y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+1}^{\nu+1}, S(y_{N+1,n+1}^\nu y_{N,n}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n+1}^\nu + Y_{N,n}^{\nu+1} - (\nu + N)Q, \\ & \quad S(-y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu + (n + 2N)Q, \\ & \quad S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu + (n + 2N + 1)Q] \quad (14\text{-ud}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max[S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu, S(-y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n}^\nu + (\nu - N + 1)Q, \\ & \quad S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^{\nu+1} + (n + 2N)Q, \\ & \quad S(y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+1}^{\nu+1} + (n + 2N + 1)Q] \\ = & \max[S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^\nu, S(y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n}^\nu + (\nu - N + 1)Q, \\ & \quad S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+1}^{\nu+1} + (n + 2N)Q, \\ & \quad S(-y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+1}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+1}^{\nu+1} + (n + 2N + 1)Q] \quad (15\text{-ud}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max[S(y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+3}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+3}^{\nu+1}, S(-y_{N+1,n+1}^\nu y_{N,n+2}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n+1}^\nu + Y_{N,n+2}^{\nu+1} - (\nu + N)Q, \\
& \quad S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + nQ, S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + (n + 1)Q] \\
= & \max[S(-y_{N+1,n}^\nu y_{N,n+3}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n}^\nu + Y_{N,n+3}^{\nu+1}, S(y_{N+1,n+1}^\nu y_{N,n+2}^{\nu+1}) + Y_{N+1,n+1}^\nu + Y_{N,n+2}^{\nu+1} - (\nu + N)Q, \\
& \quad S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + nQ, S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + (n + 1)Q] \\
& \hspace{15em} (16\text{-ud})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max[S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu, \\
& \quad S(-y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n+2}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n+2}^\nu + (\nu - N + 1)Q, \\
& \quad S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + nQ, S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + (n + 1)Q] \\
= & \max[S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu, \\
& \quad S(y_{N+1,n+1}^{\nu+1} y_{N,n+2}^\nu) + Y_{N+1,n+1}^{\nu+1} + Y_{N,n+2}^\nu + (\nu - N + 1)Q, \\
& \quad S(y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + nQ, S(-y_{N+1,n}^{\nu+1} y_{N,n+3}^\nu) + Y_{N+1,n}^{\nu+1} + Y_{N,n+3}^\nu + (n + 1)Q] \\
& \hspace{15em} (17\text{-ud})
\end{aligned}$$

符号付き超離散 Painlevé III 型方程式

パラメータを (13) により特殊化した場合の (9) を, $q = e^{Q/\varepsilon}$, $w_n = \omega_n e^{W_n/\varepsilon}$ と置き換えて (解は ν および N 依存性を持つが簡単のため略す) 超離散化すると, 次の方程式を得る.

$$\begin{aligned}
& \max[S(\omega_{n+1}\omega_n\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_n + W_{n-1} + (\nu + N)Q, \\
& \quad S(-\omega_{n+1}\omega_n\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_n + W_{n-1} + (-\nu + 3N)Q, \\
& \quad S(\omega_{n+1}\omega_{n-1}) + W_{n+1} + 2W_n + W_{n-1}, S(-\omega_{n+1}\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_{n-1} + 4NQ, \\
& \quad S(\omega_n) + W_n + (7N - \nu - 2 + 2n)Q, S(-\omega_n) + W_n + (9N + \nu + 2n)Q, 2W_n + 4NQ] \\
= & \max[S(-\omega_{n+1}\omega_n\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_n + W_{n-1} + (\nu + N)Q, \\
& \quad S(\omega_{n+1}\omega_n\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_n + W_{n-1} + (-\nu + 3N)Q, \\
& \quad S(-\omega_{n+1}\omega_{n-1}) + W_{n+1} + 2W_n + W_{n-1}, S(\omega_{n+1}\omega_{n-1}) + W_{n+1} + W_{n-1} + 4NQ, \\
& \quad S(-\omega_n) + W_n + (7N - \nu - 2 + 2n)Q, S(\omega_n) + W_n + (9N + \nu + 2n)Q, 2(6N - 1 + 2n)Q] \\
& \hspace{15em} (\text{udP}_{\text{III}})
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] S. Isojima, arXiv:1409.1684.
- [2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3247.
- [3] N. Mimura, S. Isojima, M. Murata, J. Satsuma, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009) 315206.
- [4] 磯島伸, 薩摩順吉, 日本応用数学会論文誌, **23** (2013) 325.
- [5] K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 4162.
- [6] H. Exton, *q*-Hypergeometric functions and applications, John Wiley & Sons, New York, 1983.