セルオートマトンの逆超離散化における重ね合わせ原理とその応用

吉井, 理比古
東京大学大学院情報理工学系研究科

星野, 隆行
東京大学大学院情報理工学系研究科

満渕, 邦彦
東京大学大学院情報理工学系研究科

https://doi.org/10.15017/1807496

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26AO-S2 (13), pp.73-79, 2015-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」（研究代表者　増田　哲）

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 13 (pp. 73 - 79)

セルオートマトンの逆超離散化における重ね合わせ原理とその応用

吉井 理比古（YOSHII Masahiko），星野 隆行（HOSHINO Takayuki），満渕 邦彦（MABUCHI Kunihiko）

（Received 14 January 2015; accepted 2 March 2015）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

セルオートマトンの逆超離散化における重ね合わせ原理とその応用

東京大学情報理工学系研究科 吉井理比古（YOSHII Masahiko）
星野隆行（HOSHINO Takayuki）
満渕邦彦（MABUCHI Kunihiko）

概要

逆超離散化とはセルオートマトンと類似した時間発展パターンを解として持つ偏微分方程を導出する手法で，(i)セルオートマトンのルールからトロピカル式の導出，(ii)トロピカル式から差分方程式の導出，(iii）差分方程式から偏微分方程式の導出,の３工程がある．しかし現状では，逆超離散化の成功例はエレメンタリーセルオートマトンや特殊な二次元セルオートマトンに限られ，一般的な手法がまだ確立されていない．本研究では，逆超離散化の拡張を目指し，工程(ii)において重ね合わせ原理の適用可能性について検討し，拡張トロピカル多項式がその十分条件を満たすことを証明した．また，テイラー展開による近似とその差分化により従来必要とされていた補助関数なしの偏微分方程式を導出できる可能性を示した．提案手法をフラクタルパターンであるシャーピンスキーのガスケットを再現できるセルオートマトン rule18 に適応例示した.

１．　はじめに

伝統的に自然現象の数学モデルは偏微分方程式(PDE)で記述されることが多い．それは偏微分方程式の解析法がすでにある程度に確立されているからである．例えば，チューリング[1] によって導入された反応拡散(RD)方程式は，複雑なパターンを形成するための有用な数理モデルとして研究されてきた．しかし RD 式の解析は，平衡点の近傍に制限されており，式の非線形性が考慮されていないという欠点がある．一方，違うアプローチとしてセルオートマトン(CA)と呼ばれる格子状のセルと単純な時間発展規則による離散的なモデル[2]によって空間パターンを形成するという手法がある．しかし CA の解析は，その離散的な構造と物理的な意味の不足により困難とされてきた．ウルフラムの９番目の問題　”What is the correspondence between cellular automata and continuous system”[3] にあるように CA と偏微分方程式の関係については長きにわたり研究が行われてきた.

近年，ソリトンに代表される可積分な偏微分方程式において，解の性質を保存したまま解析的に CA に移行する手法として 超離散化(UD) が提案された[4]．またその逆の手続き，つまりセルオートマトンと類似した時間発展パターンを解として持つ偏微分方程を導出する逆超離散化(IUD)という手法も提案された[5].　本研究では逆超離散化の拡張を目指し, 工程(ii)において重ね合わせの原理が成立するのかを検討し，拡張トロピカル多項式がその十分条件を満たすことを証明した．また，テイラー展開による近似により、従来必要とされていた補助関数なしの差分方程式を導出できる可能性を示した.

2.　逆超離散化の重ね合わせに関する定理

2.1 定義

はじめに、本稿で用いるトロピカル代数および超離散化（逆超離散化）を定義する.

定義 1． $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}=\mathbb{T}$ *に以下の演算*

$$x\oplus y=\max(x,y)$$
$$x\otimes y=x+y$$

を入れると $-\infty$ *を零元，0 を単位元とする可換な冪等半環となる.* $(\mathbb{T},\oplus,\otimes)$ *はトロピカル半環，または便宜上トロピカル代数とよぶ.また，* $x\otimes y^{-1}=x\oslash y=x-y$ *と定義される.*

定義 2．次の極限を超離散極限とよぶ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\log\left(e^{\frac{x}{\varepsilon}}+e^{\frac{y}{\varepsilon}}\right)=x\oplus y$$

定義 3．差分式 $u_i^{t+1}=\tilde{f}(u)$ *に変数変換* $u=(u_i^t)_{i\in I}=(e^{\frac{U_i^t}{\varepsilon}})_{i\in I}$ *を行い，超離散極限をとることでトロピカル式* $U_i^{t+1}=f(U)$*,* $U=(U_i^t)_{i\in I}$ *を得る手続きを超離散化とよぶ.このとき式* $U_i^{t+1}=f(U)$ *を式* $u_i^{t+1}=\tilde{f}(u)$ *の超離散式とよぶ.*

定義 4．トロピカル式 $U_i^{t+1}=f(U)$ *から、超離散化したときに上式に一致する差分式* $u_i^{t+1}=\tilde{f}(u)$ *を導出する手続きを逆超離散化とよぶ. このとき式* $u_i^{t+1}=\tilde{f}(u)$ *を式* $U_i^{t+1}=f(U)$ *の逆超離散式とよぶ*

CA のルールはトロピカル演算を用いてより簡単なルールの組み合わせとして表現できる.（Fig2）. CA のルールを記述するトロピカル式を直接逆超離散化するのではなく、より簡単な式に分解しそれぞれの式を逆超離散化し、最後に組み合わせる方が効率的ではないかと考えた.さらにこの手法が有効ならば今まで得られた逆超離散化の成功例の組み合わせにより新たなパターンを解析できる可能性がある.これを重ね合わせの原理とよび、適用するための十分条件を以下の定理で示した.

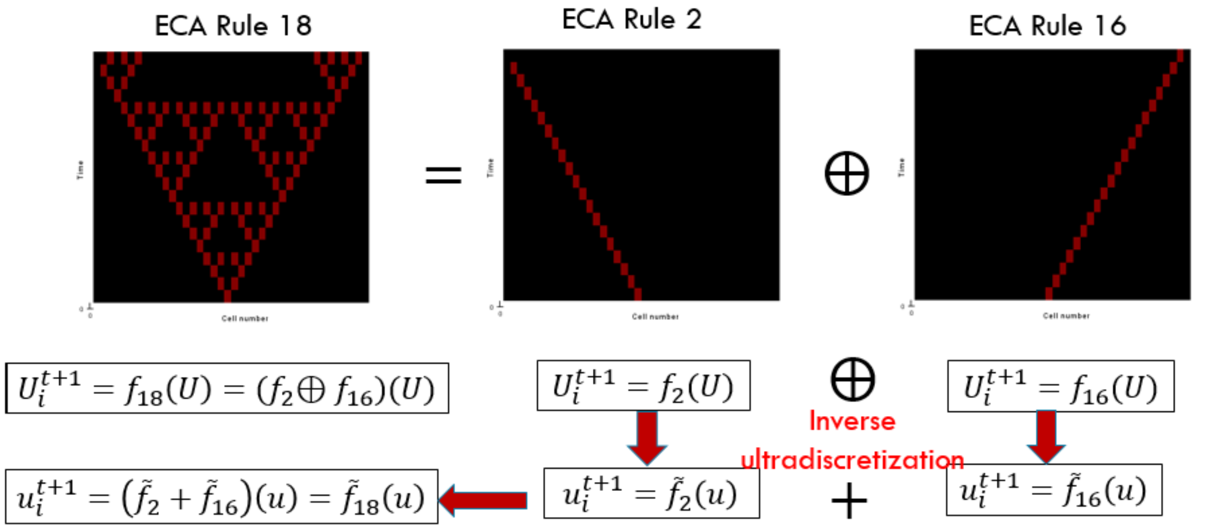

図 1　逆超離散化の重ね合わせ概念図.f_s　はトロピカル演算で書かれたルール関数.$\tilde{f}_s$は逆超離散化で得られた差分式.

図 1 の解の時間発展は，rule 2 と rule 16 の合成で rule 18 が出てくるが，これは解の重ねあわせることができると言う意味ではない（つまり，rule 2 の解と同じ初期値に対する rule16 の解を max 操作によって合成しても rule 18 の解にはならない）あくまでも逆超離散 rule 2 と逆超離散 rule 16 を合成することで逆超離散 rule18 が得られるという意味である．

2.2 定理

$f_1, f_2, \ldots, f_{n(s)}$ はトロピカル演算で書かれたルール関数、$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_{n(s)}$は逆超離散化で得られた差分式のとき次のような定理が成り立つ．

定理１．トロピカル式 $U_i^{t+1} = \otimes_{s\in S} f_s(U)^{k_s} = \sum_{s\in S} k_s f_s(U)$ ，$k_s \in \mathbb{Z}$, $U = (U_i^t)_{i\in I}$

の逆超離散式は差分式 $u_i^{t+1} = \prod_{s\in S} \tilde{f}_s(u)^{k_s}$ ，$u = (u_i^t)_{i\in I} = (e^{\frac{U_i^t}{\varepsilon}})_{i\in I}$ *と書ける*

上の定理は$\otimes$に関する組み合わせの定理であり、f_sに関する条件がないというメリットがる．

二つ目の定理($\oplus$に関する組み合わせ）について述べる前に拡張トロピカルを次のように定義する

定義３．$(\mathbb{T},\oplus,\otimes)$*を半環とし，実数係数*$A_{(k_i)}$，*次数*$k_i$，*変数*$x = (x_1, \ldots, x_n)$*を用いた有限和*

$$p(x) = \max_{k_i\in\mathbb{Z}^n}(A_{(k_i)} + \sum_{i=1}^{n} k_i x_i)$$

を$\mathbb{T}$*上の拡張トロピカル多項式とよぶ．*

定理２．（十分条件）

f_s *が拡張トロピカル多項式のときトロピカル式*

$U_i^{t+1} = \oplus_{s\in S} f_s(U) = \max_{s\in S}(f_s(U))$, $U = (U_i^t)_{i\in I}$

の逆超離散式は差分式 $u_i^{t+1} = \sum_{s\in S} \widetilde{f_s}(u)$, $u = (u_i^t)_{i\in I} = (e^{\frac{U_i^t}{\varepsilon}})_{i\in I}$ *と書ける．*

拡張トロピカル多項式の線形結合が拡張トロピカル多項式であることから定理１と定理２により次のことが云える．

定理３．拡張トロピカル多項式の線形結合（トロピカル代数内）の逆超離散化は従来の多項式の線形結合として書ける．

3. ECA rule18 の逆超離散化

3.1. トロピカル式の導出

ECA rule18 の逆超離散化の例をとり説明することにする．

ECA rule18 は rule90 同様にシャーピンスキーのガスケットとよばれるフラクタルパターンを生成することが知られている.
時間ステップをt、空間座標をi、その時間と場所での状態をU_i^tとすると rule18 は関数f_xを用いて次のように書くことができる

$$U_i^{t+1} = f_{18}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) \tag{1}$$

ただし、$f_x(1,1,1) = x_1, f_x(1,1,0) = x_2, f_x(1,0,1) = x_3, f_x(1,0,0) = x_4, f_x(0,1,1) = x_5, f_x(0,1,0) = x_6, f_x(0,0,1) = x_7$, $f_x(0,0,0) = x_8$ ただし$x = x_1x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8$ は二進法でのxの表現.

さらに

$$f_{18}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) = \max\left(f_2(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t), f_{16}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t)\right) \tag{2}$$

と書くことができ rule2 と rule16 はミラールールであるが故どちらか一つの解析で十分である.
本稿では以下の拡張トロピカル多項式で rule2 と rule16 を表現した

$$f_2(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) = 0 \oplus (U_{i+1}^t \oplus U_i^t) \otimes (U_i^t \oplus U_{i-1}^t)^{-1} \tag{3}$$

$$f_{16}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) = 0 \oplus (U_{i-1}^t \oplus U_i^t) \otimes (U_i^t \oplus U_{i+1}^t)^{-1} \tag{4}$$

上記のf_2, f_{16} は次のような性質を持っている

$$f_2(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) \oplus f_{16}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) = f_2(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) \otimes f_{16}(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) \tag{5}$$

3.2. 差分方程式の導出

式(3)(4)に対して定理 2 を用いて微分可能な差分方程式を得る

$$u_i^{t+1} = \tilde{f}_2(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) = u_o\left(1 + \frac{u_i^t + u_{i+1}^t}{u_i^t + u_{i-1}^t}\right) \tag{6}$$

$$u_i^{t+1} = \tilde{f}_{16}(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) = u_o\left(1 + \frac{u_i^t + u_{i-1}^t}{u_i^t + u_{i+1}^t}\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} u_i^{t+1} = \tilde{f}_{18}(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) &= \tilde{f}_2(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) + \tilde{f}_{16}(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) \\ &= u_o\left(1 + \frac{u_i^t + u_{i+1}^t}{u_i^t + u_{i-1}^t}\right) + u_o\left(1 + \frac{u_i^t + u_{i-1}^t}{u_i^t + u_{i+1}^t}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

さらに　u_o=1　とすると(u_oは次元を調整するために導入されているのでこの条件は限定的ではない)$\tilde{f}_2(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) + \tilde{f}_{16}(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t)$=$\tilde{f}_2(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t) \times \tilde{f}_{16}(u_{i-1}^t, u_i^t, u_{i+1}^t)$となり、逆超離散化後も当初の代数的構造が保持されていることがわかる.

しかしこの差分方程式の時間発展は次第に減衰していく.この問題を解決するべくフィルター関数などが導入されることがあるが[5]、これは式を複雑化し解析を困難にさせるため本稿ではフィルター関数などを導入せずに差分式を記述することを目指す.

ここでひとまず$[1;\infty[\times[0;\infty[$上で微分可能な関数$u:(x,t) \mapsto u(x,t)$があると仮定する。

式(8)はuの偏微分方程式の離散化と考えることができ、

$$u(x,t+\delta_t)=u_0(1+\frac{u(x,t)+u(x-\delta_x,t)}{\left(u(x,t)+u(x+\delta_x,t)\right)})\,(1+\frac{u(x,t)+u(x+\delta_x,t)}{\left(u(x,t)+u(x-\delta_x,t)\right)}) \tag{9}$$

式(9)は以下のように変形できる

$$u(x,t+\delta_t)\left(u(x,t)+u(x+\delta_x,t)\right)\left(u(x,t)+u(x-\delta_x,t)\right)=u_0(2u(x,t)+u(x+\delta_x,t)+u(x-\delta_x,t))^2$$

tおよびxのまわりでそれぞれ次のようにテイラー展開する

$u(x,t+\delta_t)=u(x,t)+\delta_t\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+o(\delta_t)$, $u(x+\delta_x,t)=u(x,t)+\delta_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+o(\delta_x)$, $u(x-\delta_x,t)=$

$u(x,t)-\delta_x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+o(\delta_x)$

これを変形した式(9)に代入し空間変数に対する 2 階微分以上の項を無視できると仮定すると，次の式が得られる．

$$4u^3-16u_0u^2+4\delta_t u^2\frac{\partial u}{\partial t}-{\delta_x}^2u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-\delta_t{\delta_x}^2(\frac{\partial u}{\partial t})\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\mathrm{o}(\delta_t) \tag{10}$$

さらに式(10)の$\delta_t{\delta_x}^2$の項と$u=0$の定常解を無視すると以下の式で近似することができる.

$$u-4u_0+\delta_t\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{{\delta_x}^2}{4u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=0 \tag{11}$$

ここで式(11)を一般化した、式(12) ($a=\frac{1}{\delta_t}, {u_0}'=4u_0, b=\frac{{\delta_x}^2}{4u}$のとき一致する)の性質をみていきたい

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\ a({u_0}'-u)+\frac{b}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{12}$$

両辺を$\frac{1}{u}$でかけると次の式となる

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial t}=\ a\left(\frac{{u_0}'}{u}-1\right)+b\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{12.a}$$

上式に変数変換 $v(x,t)=\log{(u(x,t))}$を行う

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\ a\left(e^{{v_0}'-v}-1\right)+b\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \tag{12.b}$$

さらに${v_0}'-v\sim0$と仮定すると$e^{{v_0}'-v}-1\sim{v_0}'-v$となり以下のように近似できる

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\ a({v_0}'-v)+b\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \tag{13}$$

このことから$\frac{1}{u}$は式（12）において本質的でないと考えている.

また式(13)をオイラー法で次のように離散化する. $\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \sim \frac{v_i^{t+1}-v_i^t}{\delta_t}$, $\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \sim \frac{v_{i+1}^t-v_{i-1}^t}{2\delta_t}$

$$v_i^{t+1} = (1 - a\delta_t)v_i^t + a\delta_t v_0{}' + \frac{b}{4}\frac{\delta_t}{{\delta_x}^2}(v_{i+1}^t - v_{i-1}^t)^2 \tag{14}$$

ここでパラメータを次のよう　に選ぶと　$\delta_t = \frac{1}{a}$, $\delta_x = (\frac{b(v_{max}-v_{min})}{4a})^{1/2}$, $v_0{}' = v_{min}$

次式が得られる.

$$v_i^{t+1} = v_{min} + \frac{1}{v_{max} - v_{min}}(v_{i+1}^t - v_{i-1}^t)^2 \tag{15}$$

上の差分式は式(16)で記述される条件を満たし、減衰することなくシャーピンスキーのガスケットに類似する時間発展パターンを得ることができる.

$$v_i^{t+1} = \begin{cases} v_{min} \text{ for } v_{i+1}^t = v_{i-1}^t \\ v_{max} \text{ for } v_{i+1}^t \neq v_{i-1}^t \end{cases} \tag{16}$$

式(15) (16)においてv_{min}およびにv_{max}は$v_{min} < v_{max}$を満たすのであれば限りなく近い値を与えてもよい。つまり$v_{max} = v_{min} + \varepsilon$と書くことができ、上で行った仮定$v_0{}' - v \sim 0$と矛盾しない.

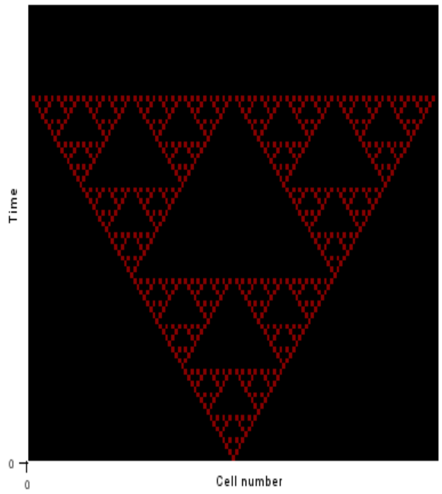

図２　逆超離散化で得られ ECA rule18 に対応する差分方程式(15)の時間発展パターン

（赤：u_{max}、　黒：u_{min}）

3.2. 偏微分方程式の導出

差分式（15）を[5]と同様の手法で連続化する.

まずは時間方向に連続化し、以下の式を得る.

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = -u_i(t) + v_{min} + \frac{1}{v_{max} - v_{min}}(u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t))^2 \tag{17}$$

さらに空間方向に連続化し、以下の式が得られる.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -u(x,t) + v_{min} + \frac{1}{v_{max} - v_{min}} \left(v(x,t) - w(x,t)\right)^2$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathrm{t}} = -\gamma \left(v(x,t) - u(x,t) + \lambda \frac{\partial v(x,t)}{\partial \mathrm{x}} \right) \tag{18}$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial \mathrm{t}} = -\gamma \left(w(x,t) - u(x,t) - \lambda \frac{\partial w(x,t)}{\partial \mathrm{x}} \right)$$

ここでγとλは正のパラメータであり、これらを適切に選ぶことで$v(x,t) \sim u_{i+1}(t)$, $w(x,t) \sim u_{i-1}(t)$, $u_i(t+\delta_t) \sim v_{min} + \frac{1}{v_{max}-v_{min}} (u_{i+1}(t) - u_{i-1}(t))^2)$とみなすことが出来る.

[5]と違い、式(18)はフィルター関数なしで記述されている.

4. まとめ

本研究では逆超離散化の拡張を目指し，工程(ii)において重ね合わせの原理が成立するのかを検討し，拡張トロピカル多項式がその十分条件を満たすことを証明した．また，テイラー展開による近似により従来必要とされていた補助関数なしの差分方程式を導出できる可能性を示した.
ECArule18 に適応例示し、PDE を導出した．逆超離散化後に得られた PDE のさらなる解析が今後の課題である.

参考文献

[1] A. M. Turing, « The Chemical Basis of Morphogenesis », *Philos. Trans. R. Soc. B Biol. Sci.*, vol. 237, nº 641, p. 37-72, 1952.

[2] S. Wolfram, « Universality and complexity in cellular automata », *Phys. Nonlinear Phenom.*, vol. 10, nº 1-2, p. 1-35, 1984.

[3] S. Wolfram, « Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata », *Phys. Scr.*, vol. 1985, nº T9, p. 170, 1985.

[4] T. Tokihiro, A. Nagai, et J. Satsuma, « Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization », *Inverse Probl.*, vol. 15, nº 6, p. 1639, 1999.

[5]W. Kunishima, A. Nishiyama, H. Tanaka, et T. Tokihiro, « Differential Equations for Creating Complex Cellular Automaton Patterns », *J. Phys. Soc. Jpn.*, vol. 73, nº 8, p. 2033-2036, 2004.

[6] 広田良吾, 高橋大輔,　差分と超離散. 共立出版 2004