

## On Multiple Zeta Values of Maximal Height

坂田, 実加

<https://doi.org/10.15017/1806827>

---

出版情報：九州大学, 2016, 博士（数理学）, 課程博士  
バージョン：  
権利関係：全文ファイル公表済

氏 名	坂田 実加			
論 文 名	On Multiple Zeta Values of Maximal Height (高さ最大の多重ゼータ値について)			
論文調査委員	主 査	九州大学	教授	金子 昌信
	副 査	首都大学東京	教授	津村 博文
	副 査	東北大学	教授	大野 泰生
	副 査	九州大学	准教授	斎藤 新悟

### 論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では、多重ゼータ値およびそのある有限類似について、「高さ最大」をキーワードとするいくつかの興味深い結果を得ている。

多重ゼータ値とは、リーマンゼータ関数の正の整数点での値を多重級数に一般化したある実数であり、その研究はオイラーやゴルトバッハにまでさかのぼる。しかしながら、「深さ」が一般の場合を扱い、また数学や物理学の様々な分野との関係が次第に明らかになって活発に研究されだしたのは、この 20 数年ほどのことである。とくに、異なるインデックスを持つ多重ゼータ値の間の代数関係式や線型関係式のありようが、様々な数学的、物理学的対象の構造を反映していることが徐々に明らかになっており、多重ゼータ値の関係式を発見、証明することは多重ゼータ値研究の一つの重要な側面となっている。1994 年に Zagier は多重ゼータ値たちによって張られるベクトル空間の次元を予想し、2000 年代はじめに Terasoma, Deligne, Goncharov らによってこの予想は部分的に解決された。彼らの研究から、多重ゼータ値の間には非常に多くの関係式が存在することが従う。これまでに、双対性や和公式、Hoffman の関係式、さらにこれらを一般化した Ohno の関係式、正規化複シャッフル関係式、アソシエータ関係式など多くの関係式が知られているが、どの関係式族がすべての関係式を導くか、という重要な問題がまだ未解決のままである。

本論文ではまず、高さ 1 の多重ゼータ値を高さ最大の多重ゼータ値の和として対称的な形に具体的に書き表す公式を得ている。これにより、高さ 1 の多重ゼータ値の双対性が目に見える形で表現された。この結果は既に公表されているが、査読者により「gem」と評されたものである。またこの関係式を特殊化することで深さ 2 の多重ゼータ値の和公式を得ることもできる。証明には Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値である多重ゼータ値の積和が用いられ、この積を調和積によって展開し、組合せ論の手法を用いる興味深いものである。

さらに本論文ではこの関係式を拡張し、高さを固定した多重ゼータ値たちの和を高さ最大の多重ゼータ値で書き表す関係式も導出している。この関係式の証明として、Ohno の関係式を用いて組合せ的な手法で証明するものと、導分関係式を用いて代数的に証明するものと、二通りの証明を与えている。さらにこれらの手法を応用し、多重ゼータ値の類似物である有限多重ゼータ値に対しても同様の関係式を証明している。ここで有限多重ゼータ値とは、有限アデール環ともいえるべき、有理数体上のある代数  $A$  に値をもつ「 $A$ -有限多重ゼータ値」と、通常の高さ最大の多重ゼータ値の代数を円周率の自乗で生成されるイデアルで割った商環に値をもつ「対称多重ゼータ値」の総称である。もう少し詳しく述べると、 $A$ -有限多重ゼータ値は、多重級数を途中で打ち切った有限和の素数を法とする還元を素数全体にわたって考え、有限個の素数での値の違いは無視することで  $A$  の元として与えら

れるものである。この枠組みは Zagier によって提唱された。対称多重ゼータ値は, Kaneko, Zagier によって, 通常の多重ゼータ値の正規化を用いて定義された多重ゼータ値のある積和を, 円周率の自乗を法として考えたものである。Kaneko, Zagier は  $A$ -有限多重ゼータ値によって張られる代数と, 対称多重ゼータ値によって張られる代数の具体的な同型を予想した。それによれば  $A$ -有限多重ゼータ値の関係式と対称多重ゼータ値の関係式は全く同じ形で与えられると予想される。本論文で得られた結果もこの Kaneko, Zagier の予想を裏付けるもので, 両者の公式の形は全く同一である。

最後に, 本論文では多重ゼータ値の代数的な性質のみを用いて, ガンマ関数の逆数のテイラー展開公式を与えている。ガンマ関数およびその逆数のテイラー展開は, 多重ゼータ値の正規化の理論において重要な役割を果たしていた。Arakawa, Kaneko によって Weierstrass の無限積を用いた解析的な手法で与えられたガンマ関数の逆数のテイラー展開を, 本論文では純代数的な手法で再証明している。その展開係数はやはり高さ最大の多重ゼータ値の一次結合として書かれていて, 本論文の主題に合致するものとなっている。純代数的な手法で得られる展開公式がなぜ解析的な方法で得られる表示式に一致するかについてはまだよく分かっておらず, 今後の興味深い考察の対象になるものと思われる。

以上の研究成果のうち, 高さ 1 の多重ゼータ値の公式については既に英文学術雑誌に公表済みであり, その拡張および有限類似, またガンマ関数の逆数の展開については現在それぞれ英文学術雑誌に投稿中である。

これらの研究結果は整数論, とくに多重ゼータ値の分野において価値あるすぐれた業績と認められる。よって本研究者は博士(数理学)の学位を授与される資格があるものと認める。