

On Multiple Zeta Values of Maximal Height

坂田, 実加

<https://doi.org/10.15017/1806827>

出版情報 : 九州大学, 2016, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 : 全文ファイル公表済

氏 名 : 坂田 実加

論 文 名 : On Multiple Zeta Values of Maximal Height
(高さ最大の多重ゼータ値について)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

多重ゼータ値は、Riemann ゼータ関数を多重化した関数の正の整数点での特殊値である。18 世紀に深さ 2 の多重ゼータ値が Goldbach や Euler らによって研究され、1990 年代に Zagier や Hoffman らによって一般の深さの多重ゼータ値が調べられるようになった。1994 年に Zagier は多重ゼータ値たちによって張られるベクトル空間の次元を予想し、2000 年代に Terasoma、Deligne、Goncharov らによってこの予想は部分的に解決された。彼らの研究により、多重ゼータ値の間には多くの関係式が存在することが明らかになった。双対性や和公式、Hoffman の関係式、さらにこれらを一般化した Ohno の関係式など既に多くの関係式が導出されている。多重ゼータ値は、整数論のみならず結び目理論や他分野との関わりも知られており、結び目の不変量を用いて導出された Le-Murakami の関係式などが知られている。また、1990 年頃、Aomoto、Drinfel'd らによって高さ 1 の多重ゼータ値の母関数がガンマ関数で与えられることが示された。これにより、高さ 1 の多重ゼータ値はリーマンゼータ値たちの多項式で書き表せることが従う。

本論文では、高さ 1 の多重ゼータ値を高さが最大の多重ゼータ値の和として、高さ 1 の多重ゼータ値の双対性を目に見える形で表現する。この関係式を特殊化することで深さ 2 の多重ゼータ値の和公式を得ることもできる。証明には Arakawa-Kaneko ゼータ関数の特殊値である多重ゼータ値の積和が用いられ、この積を調和積によって展開し、組合せ論の手法を用いることで関係式を導出する。さらに本論文ではこの関係式を拡張し、高さを固定した多重ゼータ値たちの和を高さ最大の多重ゼータ値で書き表す関係式も導出する。この関係式の証明には、Ohno の関係式を用いて組合せ論の手法で証明するものと、導分関係式を用いて代数的に証明する 2 つの手法が存在する。さらにこれらの手法を応用し、多重ゼータ値の類似物である有限多重ゼータ値に対しても同様の関係式を与える。有限多重ゼータ値とは、 A -有限多重ゼータ値と対称多重ゼータ値の総称であり、 A -有限多重ゼータ値は、多重級数を途中で打ち切った有限和の素数を法とする還元を素数全体にわたるある枠組みで捉えた対象で、その枠組みは Zagier によって提唱された。対称多重ゼータ値は、Kaneko、Zagier によって定義された実数のある類であり、多重ゼータ値のある積和で与えられる。Kaneko、Zagier は A -有限多重ゼータ値によって張られるベクトル空間と対称多重ゼータ値によって張られるベクトル空間は同型であると予想した。さらに、 A -有限多重ゼータ値の関係式と対称多重ゼータ値の関係式は同じ形で与えられることも Kaneko、Zagier らによって予想されている。

また、本論文では多重ゼータ値の代数的な性質を用いて、ガンマ関数の逆数のテイラー展開を与える。ガンマ関数のテイラー展開は多重ゼータ値の正規化の理論において重要な役割を果たしていた。Arakawa、Kaneko によって解析的な手法で与えられたガンマ関数の逆数のテイラー展開を、本論文では純代数的な手法で再証明する。