Study on the asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around spatially periodic steady states in a periodic layer

榎本, 翔太

出版情報：九州大学, 2016, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	榎本 翔太
論　文　名	Study on the asymptotic behavior of solutions to the compressible Navier-Stokes equation around spatially periodic steady states in a periodic layer （周期的層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間周期定常解の周りの解の漸近挙動に関する研究）
論文調査委員	主　査　　九州大学　教授　　隠居 良行 副　査　　九州大学　教授　　川島 秀一 副　査　　大阪大学　教授　　小林 孝行

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

本論文は周期的層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間周期的定常解の安定性および摂動の時間無限大における漸近挙動を考察したものである．無限層状領域における非圧縮粘性流体の流れの安定性問題は，流れのパターン形成や乱流への遷移を研究するための格好の研究対象として古くから解析が行われてきた．非圧縮粘性流体運動の支配方程式である非圧縮性 Navier-Stokes 方程式は半線形の放物型方程式であるため，中心多様体理論や放物型半群理論が有効な解析手法となり，定常解のまわりの解のダイナミクスに関する十分な数学基礎理論がすでに整備されている．一方，圧縮性 Navier-Stokes 方程式は準線形の双曲型と放物型との連立系であることから，非圧縮流の場合のように，数学基礎理論が整備されているわけではなく，空間非一様な流れをもつ定常解のまわりの解の挙動の解明が重要な研究課題となっている．

境界が平らな層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の時空非一様な流れの安定性解析に関して，定常平行流解の安定性が Kagei ら(2010,2012)により解析され，Reynolds 数と Mach 数が十分小さければ，定常平行流解は十分小さい初期摂動に対して漸近安定であることが示されている．さらに，摂動の時間無限大における漸近挙動の様相が解明されており，空間次元 n が n≧3 の場合は，摂動の時間無限大における漸近挙動の主要部は n-1 次元熱方程式の解として与えられ， n=2 の場合は，摂動の漸近挙動の主要部は１次元粘性 Burgers 方程式の解として与えられることが示されている．その解析においては，平行流解が層状領域の無限に広がる方向について一様であるという性質が本質的に用いられている．

一方，本論文で考察されている周期的層状領域においては，領域自体が領域の無限に広がる方向に非一様であることから，上述の先行研究における解析手法はもはや通用しない．周期的層状領域における圧縮流の安定性については，静止状態の安定性が Kagei-Makio (2015)により考察されている．そこでは領域の周期性を利用した Bloch 変換を用いた線形化作用素のスペクトル解析により，摂動の時間無限大における漸近挙動に関して平行流解の場合と同様の結果が得られるている．静止状態の安定性解析においては線形化半群が解析的半群になるなど取り扱いが比較的易しいが，非自明な空間周期パターンをもつ定常解の場合は方程式の双曲型の側面が強くなるため，本質的に異なる解析が要求され，その安定性解析が次なる課題となっていた．

本論文において榎本氏は周期的層状領域における圧縮性 Navier-Stokes 方程式の非自明な空間周期パターンをもつ定常解の安定性を考察した．Reynolds 数と Mach 数が十分小さけば，空間周期的定常解は

漸近安定であり，摂動の L^2 ノルムは $t^{-(n-1)/4}$ で減衰することが証明されている．さらに，空間 2 次元の場合は，摂動の時間無限大における漸近挙動の主要部が 1 次元粘性 Burgers 方程式の解とある空間周期関数との積で与えられることが示され，摂動の漸近的主要部に周期性という問題の特性が現れる興味深い結果が得られている． 3 次元問題に対しても同様の漸近挙動が現れることが示されている．

このような空間周期的定常解のまわりの解の漸近挙動の精密な様相を得るために，榎本氏はまず線形化半群のスペクトル解析を詳細に行っている．問題の周期性に適した Bloch 変換を用いて，Bloch 変数をパラメータとする基本周期領域上の問題に帰着させ，線形化半群の時間無限大における漸近的主要部は 1 次元熱方程式の解のごとく振る舞うことを示し，主要部へのスペクトル射影の高階 Sobolev 空間における有界性を示している．静止状態の場合とは異なって，線形化作用素は変数係数となり，加えて双曲型的側面が強くなるため，解析は困難となるが，新たに輸送方程式に対するレゾルベント評価を援用して線形化半群のスペクトル解析を完結させている．線形化半群に対する評価は境界が平らな層状領域の場合と同様に非線形問題の解析において重要となるものである．

次いで，線形化半群のスペクトル解析にもとづいて非線形問題の解の漸近挙動に関する主結果の証明が与えられている．平行流型定常解の安定性解析の場合は領域の無限に広がる方向に関する一様性により、線形化半群の主要部へのスペクトル射影と空間無限に広がる方向の変数に関する微分が可換であることが有効に用いられているが，本論文で考察された空間周期的定常解はそのような一様性を持たないため可換性が成り立たない．この困難を克服するため，榎本氏は Bloch 変換に対する合成積の性質を巧みに利用して非線形相互作用の詳細な解析を行い，解の漸近挙動に関する結果を証明している．

これらの結果は，圧縮性 Navier-Stokes 方程式の空間周期パターンをもつ定常解の安定性の研究として先駆的なものの一つであり，非線形偏微分方程式の解の時間無限大における漸近挙動の解析の進展に寄与する重要なものである．

以上のように榎本氏は圧縮性 Navier-Stokes 方程式の安定性解析において顕著な研究成果を挙げ，それらは流体方程式の数学解析において価値ある業績であると認められる．よって，本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める．